Fonctions logarithmes

EL KYAL MOHAMED

➤ *Fonction Logarithme népérienne :*

- ***Définition :***

*La fonction **logarithme népérien** est la primitive de la fonction :* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *sur l'intervalle* $]0;+\infty[$ *qui s'annule en* 1 *et notée* ***ln***

- ***Conséquences et propriétés :***

$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(x^r) = r\ln x \qquad r \in \mathbb{Q}$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$		
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$		

- ***Domaine de définition :***

f *une fonction numérique de la variable réelle* x *définie par :*	*Domaine de définition de* f *:*
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ et $u(x) > 0\}$
$f(x) = \ln\left[(u(x))^2\right]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ et $u(x) \neq 0\}$
$f(x) = \ln\lvert u(x)\rvert$	

- ***Limites usuelles :***

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^n \ln x = 0$	
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	

- ***Continuité:***

La fonction ln est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I
et si u est continue sur I
alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ *est continue sur I*

- **Dérivabilité :**

La fonction ln est dérivable sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$

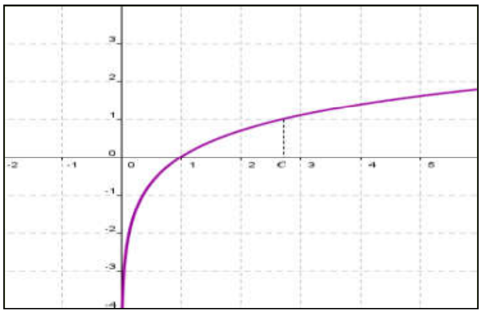
et on a : $\forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I
et si u est dérivable sur I
alors la fonction $x \mapsto \ln\left[u\left(x\right)\right]$ est dérivable sur I

et on a : $\forall x \in I \quad \left(\ln\left[u\left(x\right)\right]\right)' = \dfrac{u'\left(x\right)}{u\left(x\right)}$

- **Signe et représentation graphique de ln :**

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	‖ -	0	+



➢ Fonction Logarithme de base $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

- **Définition :**

La fonction **logarithme de base** a est la fonction

définie par : $\forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad \ell og_a\left(x\right) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Cas particulier : si a=10, ℓog_a est le logarithme décimal. On le note ℓog

- **Conséquences et propriétés :**

$\forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad \forall y \in \left]0;+\infty\right[$ $\ell og_a\left(xy\right) = \ell og_a\left(x\right) + \ell og_a\left(y\right)$ $\ell og_a\left(x^r\right) = r\ell og_a\left(x\right) \qquad \left(r \in \mathbb{Q}\right)$ $\ell og_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ell og_a\left(x\right)$ $\ell og_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ell og_a\left(x\right) - \ell og_a\left(y\right)$	$\ell og_a 1 = 0$ $\ell og_a a = 1$ $\forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad \forall y \in \left]0;+\infty\right[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$ $\ell og_a\left(x\right) = \ell og_a\left(y\right) \Leftrightarrow x = y$ $\ell og_a\left(x\right) = r \Leftrightarrow x = a^r$

$\mathbf{0 < a < 1}$	$\mathbf{a > 1}$
$\ell og_a\left(x\right) > \ell og_a\left(y\right) \Leftrightarrow x < y$	$\ell og_a\left(x\right) > \ell og_a\left(y\right) \Leftrightarrow x > y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a\left(x\right) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a\left(x\right) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a\left(x\right) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a\left(x\right) = -\infty$
$\forall x \in \left]0,+\infty\right[\qquad \left[\ell og_a\left(x\right)\right]' = \dfrac{1}{x\ln a}$	