

## 1) Rappel

- La norme d'un vecteur  $\vec{u} = \overline{AB}$  est le nombre réel positif  $\|\vec{u}\| = AB$ .
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont le même sens, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de sens contraire, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls, alors:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$
- Si  $H$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ , alors  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$
- Le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  est appelé carré scalaire de  $\vec{u}$  et noté  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ .
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- Si  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs et  $k$  un nombre réel. On a :
  - ✓  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  ;  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  ;  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
  - ✓  $(\vec{u} \pm \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v}$  et  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

*Dans tout le reste, on considère que le plan est muni d'un repère orthonormé*

Soient  $\vec{u}(a; b; c)$  ;  $\vec{v}(a'; b'; c')$  et  $\vec{w}(a''; b''; c'')$  deux vecteurs exprimés dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$  et  $\vec{u} \cdot \vec{u} = a^2 + b^2 + c^2 = \|\vec{u}\|^2$  donc  $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$ .
- $\overline{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$  et  $AB = \|\overline{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Le système : 
$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} / t \in \mathbb{R}$$
 est une représentation paramétrique de la droite  $D(A; \vec{u})$ .

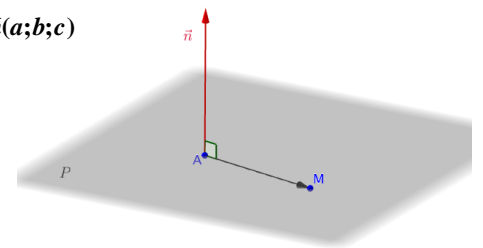
## 2) Plan et vecteur normal.

### a) Vecteur normal à un plan.

**Définition** : Soit  $(D)$  une droite perpendiculaire à un plan  $(P)$ , tout vecteur non nul directeur de  $(D)$  est appelé vecteur **normal** à  $(P)$ .

### b) Equation d'une droite définie par un point $A$ et un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$

**Théorème** : Soit  $A$  un point et  $\vec{n}$  un vecteur non nul.  
L'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\vec{n} \cdot \overline{AM} = 0$  est la droite de vecteur normal  $\vec{n}$  et passant par  $A$ .



- **Théorème** : soit  $\vec{n}(a; b; c)$  un vecteur non nul avec  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ . et  $d$  un nombre réel.
- Une droite admettant  $\vec{n}(a; b; c)$  comme vecteur normal a une équation de la forme  $ax + by + cz + d = 0$ .
- **Réciproquement** : tout plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  admet  $\vec{n}(a; b; c)$  comme vecteur normal.

**Remarque** :

- Deux plans dites orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
- Deux plans dites parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

### c) Distance d'un point à un plan.

**Propriété**: Considérons un point  $A(x_A, y_A, z_A)$  et un plan  $(P): ax + by + cz + d = 0$

La distance du point  $A$  au plan  $(P)$  est:  $d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

### 3) Sphère.

a) **Equation cartésienne d'une sphère définie par son centre et son rayon.**

Sachant que l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  qui vérifient  $\Omega M = R$  (avec  $R > 0$ ) est une sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ . alors on en déduit la propriété suivante

**Propriété :** Le cercle de centre  $\Omega(a; b; c)$  et de rayon  $R$  a pour équation :  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

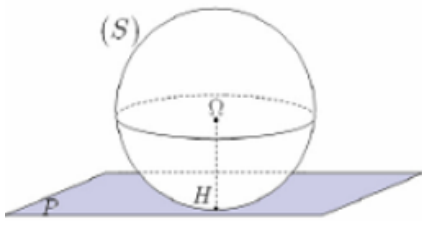
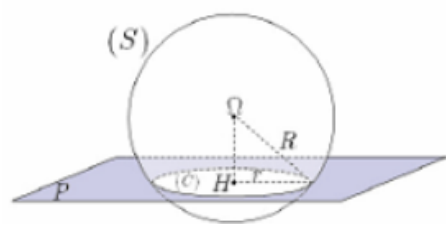
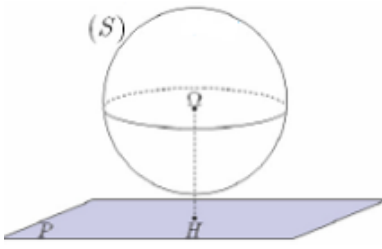
b) **Equation cartésienne d'une sphère défini par son diamètre.**

**Propriété :** Le cercle de diamètre  $[AB]$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que:  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$ .

**Remarque :**  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0 \Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0$

### 4) Positions Relatives d'un plan et d'une sphère.

Pour étudier la position relative d'un plan  $(P)$  et d'une sphère  $(S)$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ . Il suffit de comparer  $d(\Omega, (P))$  au rayon  $R$ .

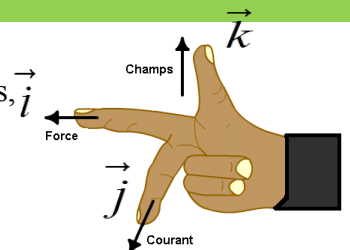
$d(\Omega, (P)) = R$	$d(\Omega, (P)) < R$	$d(\Omega, (P)) > R$
Le plan $(P)$ et la sphère $(S)$ ont un seul point commun $H$ , le projeté de $\Omega$ sur $(P)$ . On dit que le plan $(P)$ est tangent à la sphère $(S)$ .	Le plan $(P)$ coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle de centre $H$ , le projeté de $\Omega$ sur $(P)$ et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$	Le plan ne coupe pas la sphère
		

### 5) Produit vectoriel.

a) **Orientation de l'espace.**

L'espace doit être **orienté** en adoptant le même point de vue qu'en sciences physiques, on peut notamment utiliser la règle des **trois doigts de la main droite** ou le « **bonhomme d'ampère** » :

On dit alors que le repère est de **sens direct**.



b) **Notation et définition.**

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs **non nuls**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur, noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  tel que :

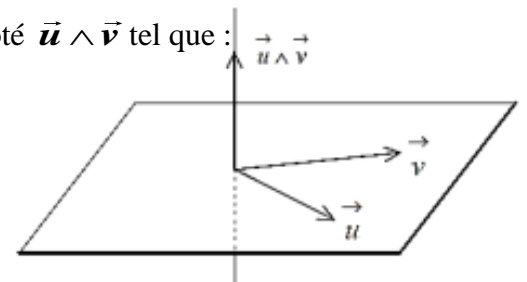
Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires** alors  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  ;

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires alors :

1) **Direction :** Le vecteur  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$  .

2) **Le sens** de  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  est tel que la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  soit de sens direct.

3) **Norme :**  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\overline{\vec{u}; \vec{v}})|$ .



**Remarque :** Le produit **vectoriel** est un **vecteur**, alors que le produit **scalaire** est un **nombre**.

c) **Propriétés :** Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  et tout nombre réel  $a$ ,

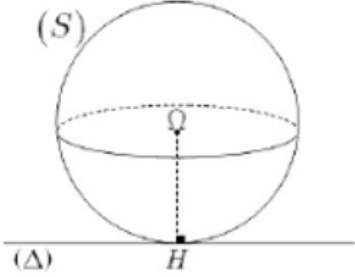
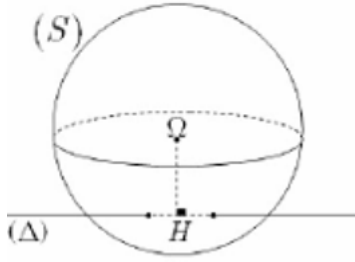
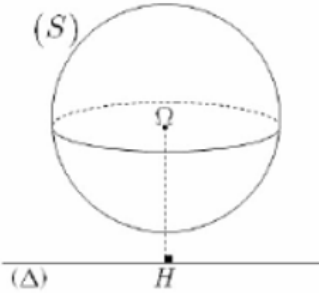
•  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$       •  $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$       •  $a(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (a\vec{v}) = (a\vec{u}) \wedge \vec{v}$       •  $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

•  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \vec{k}$

• Soient la droite  $D(A; \vec{u})$  et le point  $M$ , alors  $d(M; (D)) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overline{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$

**d) Positions relatives d'une droite et d'une sphère.**

Pour étudier la position relative d'une droite  $(D)$  et d'une sphère  $(S)$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ . Il suffit de comparer  $d(\Omega, (D))$  au rayon  $R$ .

$d(\Omega, (D)) = R$	$d(\Omega, (D)) < R$	$d(\Omega, (D)) > R$
<p>La droite <math>(D)</math> est tangente à la sphère <math>(S)</math>.</p> 	<p>La droite <math>(D)</math> coupe la sphère <math>(S)</math> en deux points différents.</p> 	<p>La droite <math>(D)</math> ne coupe pas la sphère <math>(S)</math>.</p> 

**Propriété :** L'aire du triangle  $ABC$  est égale à  $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$