

**I.** Généralité sur les suites avec :  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite son premier terme est  $u_{n_0}$  : (rappel)

**A.** Suite majorée – suite minorée – suite bornée :

**a.** Définitions :

- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est majorée par un réel  $M$  si et seulement si  $\forall n \geq n_0; u_n \leq M$  ( ou  $\forall n \geq n_0; u_n < M$  ).
- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est minorée par un réel  $m$  si et seulement si  $\forall n \geq n_0; u_n \geq m$  ( ou  $\forall n \geq n_0; u_n > m$  ).
- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est bornée si et seulement si  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est majorée et bornée .
- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est bornée si et seulement si  $\exists A \in \mathbb{R}^+; \forall n \geq n_0; |u_n| \leq A$  ou  $( < A )$  .

**B.** La monotonie d'une suite :

**a.** Définition :

- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est croissant si et seulement si  $\forall n \geq n_0 ; u_n \leq u_{n+1}$  .
- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est strictement croissant si et seulement si  $\forall n \geq n_0 ; u_n < u_{n+1}$  .
- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est décroissant si et seulement si  $\forall n \geq n_0 ; u_n \geq u_{n+1}$  .
- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est strictement décroissant si et seulement si  $\forall n \geq n_0 ; u_n > u_{n+1}$  .
- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est constante si et seulement si  $\forall n \geq n_0 ; u_n = u_{n+1}$  .
- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est périodique de période  $T \in \mathbb{N}^*$  si et seulement si  $\forall n \geq n_0 ; u_{n+T} = u_n$  .

**II.** Suite arithmétique – son terme général – la somme  $S_n$  : (rappel)

**a.** Définition :

$(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite numérique .  $r$  est un nombre réel non nul .

❖ La suite  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_{n_0}$  équivaut à  $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} - u_n = r$  .

( ou encore  $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n + r$  ) .

❖  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_{n_0}$  on a :

$$\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$$

❖ Pour la somme suivante :  $S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$  ou a :  $S_n = \left[ \frac{u_n + u_p}{2} \right] \times (n - p + 1)$  .

$$S_n = \frac{(\text{le premier terme}) + (\text{le dernier terme})}{2} \times (\text{le nombre des termes de la somme})$$

❖ **Propriété caractéristique** :  $\forall p \geq n_0 ; \forall q \geq n_0 ; u_q = u_p + (q - p)r$  ( avec  $q$  et  $p$  de  $\mathbb{N}$  ) .

❖ **Moyenne arithmétique** :  $u_i = a$  et  $u_{i+1} = b$  et  $u_{i+2} = c$  trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison  $r$  on a :  $a + b = 2c$

**b. Remarque :**

- La somme suivante  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  possède  $n + 1$  terme . (c.à.d.  $n - 0 + 1$  ) .
- La somme suivante  $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$  possède  $n$  terme . (c.à.d.  $n - 1 + 1$  ) .
- La somme suivante  $S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \dots + u_n$  possède  $n + 1$  terme . (c.à.d.  $n - n_0 + 1$  )

**III. Suite géométrique – son terme général – la somme  $S_n$  : ( rappel )**

**c. Définition :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite numérique .  $q$  est un nombre réel non nul .

- ❖ La suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_{n_0}$  équivaut à  $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = q \times u_n$  .  
( ou encore  $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n + r$  ) .
- ❖  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_{n_0}$  on a :  $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$
- ❖ Pour la somme suivante :  $S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$  ou a :
  - Si  $q \neq 1$  on a  $S_n = \left[ \frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q - 1} \right] \times u_p$  .
  - $q = 1 : S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p (n - p + 1)$  .
- ❖ **Propriété caractéristique :**  $\forall p \geq n_0 ; \forall q \geq n_0 : u_q = u_p \times q^{q-p}$  ( avec  $q$  et  $p$  de  $\mathbb{N}$  ) .
- ❖ Moyenne géométrique :  $u_i = a$  et  $u_{i+1} = b$  et  $u_{i+2} = c$  trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $q$  on a :  $a \times c = b^2$

**IV. Limites d'une suite numérique :  $(n \mapsto +\infty)$**

**A. Limite finie d'une suite :**

**a. Activité :**

- ❖ On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \frac{1}{n} ; n \geq 2$  .
- ❖ Sur une droite graduée on présente l'intervalle  $I_0 = \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$  de centre 0 avec unité de mesure 2 cm .
- ❖ Calculer quelques termes de la suite et on les place sur la droite graduée , que remarquez-vous ?
- ❖ Si  $n$  tend vers  $+\infty$  , que peut-on dire des termes  $u_n$  de la suite ?

**b. Vocabulaire :**

- On dit que la limite de la suite  $(u_n)$  est 0 ( zéro ) lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  .
- On écrit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  .



**c. Définition :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite numérique.

On dit que la limite de la suite  $(u_n)$  est le nombre réel  $l$  si pour tout intervalle ouvert  $I_l$  et de centre  $l$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang, on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

**d. Propriété :**

- Si une suite a une limite alors cette limite est unique .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$  et ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^i} = 0$  ( $i \in \mathbb{N}^*$ ) et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  .

**e. Exemple :**

❖ On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $u_n = \frac{1}{n} + 3$ , on montre que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ .

On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3 - 3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ .

**B. Limite infinie d'une suite :**

**a. Définition :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite numérique.

- On dit que la limite de la suite  $(u_n)$  est  $+\infty$  si pour tout  $A$  de  $\mathbb{R}^+$  l'intervalle  $]A, +\infty[$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang, on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  .
- On dit que la limite de la suite  $(u_n)$  est  $-\infty$  si pour tout  $A$  de  $\mathbb{R}^+$  l'intervalle  $]-\infty, A[$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang, on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  .

**b. Propriété :**

- Si une suite a une limite alors cette limite est unique .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^i = +\infty$  ( $i \in \mathbb{N}^*$ ) et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$  .

**C. Convergence d'une suite numérique :**

**a. Définition :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite numérique.

- Si la limite de la suite  $(u_n)$  est finie on dit que la suite  $(u_n)$  est convergente .
- Si la limite de la suite  $(u_n)$  est infinie ou la suite  $(u_n)$  n'a pas de limite on dit que la suite  $(u_n)$  est divergente .

**b. Exemple :**

- $u_n = n^4$  on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  d'où la suite  $(u_n)$  est divergente .
- $u_n = (-1)^n$  cette suite n'a pas de limite car si n est paire on a  $u_n = 1$  et si n est impaire on a  $u_n = -1$  et la propriété (Si une suite a une limite alors cette limite est unique ) .
- $u_n = \frac{1}{n} + 3n ; \geq 1$  on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$  d'où la suite  $(u_n)$  est convergente .

**c. Propriété :**

- Toute suite croissante et majorée est une suite convergente .
- Toute suite décroissante et minorée est une suite convergente .

**d. Exemple :**

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \frac{1}{n^3} + 7 ; n \geq 1$  .

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est minorée .
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante .
3. En déduit la convergence de la suite  $(u_n)$  .

**Réponse :**

1. la suite  $(u_n)$  est minorée :

on a :

$$\begin{aligned}
 n \geq 1 &\Rightarrow \frac{1}{n} > 0 \\
 &\Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^3 > 0 \\
 &\Rightarrow \frac{1}{n^3} + 7 > 7 \\
 &\Rightarrow \frac{1}{n^3} + 7 > 0 \\
 &\Rightarrow u_n > 0
 \end{aligned}$$

Par suite :  $(u_n)$  est minorée par 0 ( zéro ) .

2. la suite  $(u_n)$  est décroissante .

on a :

$$\begin{aligned}
 n+1 \geq n &\Rightarrow (n+1)^3 \geq n^3 \\
 &\Rightarrow \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3} \\
 &\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n
 \end{aligned}$$

Donc : la suite  $(u_n)$  est décroissante .

3. En déduit la convergence de la suite  $(u_n)$  :

On a : la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée donc d'après une propriété la suite  $(u_n)$  est convergente .

V. **Opérations sur les limites des suites :**

a. **Propriété :**

Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  deux suites numériques .

- Les opérations sur les suites sont les mêmes que les opération des fonctions.  
exemple :  $(u_n)_{n \geq n_0} + (v_n)_{n \geq n_0} = (u_n + v_n)_{n \geq n_0}$  .
- Les propriétés des opérations des limites des suites sont les mêmes que celles des fonctions .  
**exemple 1** : si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = l + l'$  .  
**exemple 2** : si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = -\infty$  .
- si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  et  $u_n > 0$  alors  $l > 0$  .
- si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$  et  $v_n \leq u_n$  alors  $l' \leq l$  .

b. **application :**

1. calculer la limite de la suite suivante :  $u_n = \frac{1}{n}$  ;  $n \geq 1$  .

on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$  d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$  .

2. calculer la limite de la suite suivante :  $v_n = \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n}$  ;  $n \geq 1$  .

On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right) = 3$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$  d'où :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n} = +\infty$  .

VI. **Critères de convergences :**

a. **Critères :**

Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  et  $(w_n)_{n \geq n_0}$  trois suites numériques tel que à partir d'un rang p on a pour tout  $n \geq p \geq n_0$  ( avec  $n \in \mathbb{N}$  ) .  $\alpha > 0$  et  $l \in \mathbb{R}$

1. Si  $v_n \leq u_n \leq w_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  .
2. Si  $v_n \geq \alpha \cdot u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$  .
3. Si  $v_n \leq \alpha \cdot u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  .
4. Si  $|v_n - l| \leq \alpha \cdot u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$  .



**b. Application :**

**Application 1 :** On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par :  $v_n = \frac{(-1)^n}{n} - 5 ; n > 0$  .

1. Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$  .

On a :

$$\begin{aligned} -1 \leq (-1)^n \leq 1 &\Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow \frac{-1}{n} - 5 \leq \frac{(-1)^n}{n} - 5 \leq \frac{1}{n} - 5 \\ &\Rightarrow \frac{-1}{n} - 5 \leq v_n \leq \frac{1}{n} - 5 \end{aligned}$$

On sait que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} - 5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 5 = -5$  .

D'après l'un des critères de convergences on obtient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$

**Conclusion :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$  .

**Application 2 :** On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par :  $u_n = 2n + \cos(n) ; n \geq 0$  .

1. Calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

On a :  $-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \leq 2n + \cos(n) \leq 2n + 1$

Donc :  $2n - 1 \leq 2n + \cos(n)$

D'où :  $2n - 1 \leq u_n$

On sait que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - 1 = +\infty$

D'après l'un des critères de convergences on obtient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  .

**Conclusion :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + \cos(x) = +\infty$  .

**Application 1 :** On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par :  $v_n = \frac{\cos n}{n} ; n \geq 1$  .

2. Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  .

On a :  $|v_n - 0| = \left| \frac{\cos n}{n} \right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n}$  ( car  $|\cos n| \leq 1$  )

D'où :  $|v_n - 0| \leq \frac{1}{n}$  puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  .

**c. Exercice :**

Calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n^2}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n + 5}{n^3}$  .

**VII. Suite de la forme particulières :**

**A. Suite de la forme :  $u_n = q^n$  avec  $q \in \mathbb{R}$  :**



**a. Propriété :**

- Si  $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$  .
- Si  $q = 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$  .
- Si  $-1 < q < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$  .
- Si  $q \leq -1$  alors  $q^n$  n'a pas de limite .

**b. Exemple :**

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$  , car  $q = 3 > 1$  .

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  car  $-1 < q = \frac{1}{2} < 1$  .

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 8^n}{7^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{7^n} - \frac{8^n}{7^n}$   
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n - \left(\frac{8}{7}\right)^n = 0$

( car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^n = +\infty$  ;  $-1 < \frac{2}{7} < 1$  et  $-1 < \frac{8}{7} < 1$  ) .

**B. Suite de la forme  $u_n = n^r$  avec  $r \in \mathbb{Q}^*$**

**a. Propriété :**

- Si  $r > 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = +\infty$  .
- Si  $r < 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = 0$  .

**b. Exemple :**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \sqrt[7]{n^3}$  ;  $n \geq 1$  .

Calculons :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  :

**1<sup>ère</sup> méthode :** On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[7]{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{3}{7}} = +\infty$  car  $r = \frac{3}{7} > 0$  .

**2<sup>ème</sup> méthode :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[7]{n^3} = +\infty$  .

Conclusion :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  .

**C. Suite  $(v_n)_{n \geq n_0}$  de la forme  $v_n = f(u_n)$  :**

**a. Activité :**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{2x-5}{7x+4}$  et la suite  $(u_n)$  définie par  $\left(u_n = \frac{1}{n^3}\right)_{n \geq 1}$  .



1. On considère la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $v_n = f(u_n)$  .
  - Ecrire la suite  $(v_n)$  en fonction du terme  $u_n$  .
  - En déduit  $v_n$  en fonction de  $n$  .
2. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  .
3. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  en déduit une relation entre  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et  $f$  et  $\ell$  .

**b. Propriété :**

Si une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  converge vers  $\ell$  ( c.à.d.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  ) et  $f$  est une fonction continue en  $\ell$  alors la suite  $(v_n)_{n \geq n_0}$  définie par  $v_n = f(u_n)$  est convergente vers  $f(\ell)$  ( c.à.d.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(\ell)$  ) .

**c. Exemple :**

On considère la fonction  $f(x) = \frac{5x-6}{x+3}$  et la suite  $u_n = \frac{\cos n}{n}$  ;  $n \geq 1$  et la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $v_n = f(u_n)$  .

1. Ecrire la suite  $(v_n)$  en fonction de  $n$  .
2. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .
3. On détermine  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

Correction :

1. la suite  $(v_n)$  en fonction de  $n$  .

$$\text{on a : } v_n = f(u_n) = \frac{5u_n - 6}{u_n + 3} = \frac{5 \times \frac{\cos n}{n} - 6}{\frac{\cos n}{n} + 3} = \frac{5 \cos n - 6n}{\cos n + 3n} .$$

**Conclusion :**  $v_n = \frac{5 \cos n - 6n}{\cos n + 3n}$  .

2. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

On a :  $\forall x \in \mathbb{R}$  ;  $-1 \leq \cos x \leq 1$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ;  $-1 \leq \cos n \leq 1$

Par suite  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ;  $-1 \times \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \times \cos n \leq 1 \times \frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$

Or :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  .

**D'où :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  ( d'après un critère de convergence ) .

3. On détermine  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et la fonction  $f$  est continue en  $0$  ( car  $f$  est continue sur  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$  ) et

$v_n = f(u_n)$  donc d'après la propriété la limite de la suite  $(v_n)$  est  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(0) = -2$  .



**Conclusion :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -2$

**D.** Suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  de la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$  :

**a.** Définition :

Soit une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  tel que  $\forall n \geq n_0 ; u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  est une fonction .

Si on a :

- $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$  .
- $f(I) \subset I$  .
- $u_{n_0} \in I$  ( le premier terme ) .
- La suite  $(u_n)$  est convergente ( vers  $l \in \mathbb{R}$  )

Alors  $l$  est solution de l'équation  $x \in I , f(x) = x$  ( c.à.d.  $l$  vérifie  $l = f(l)$  ) .

**b.** Exemple :

On considère la fonction  $f(x) = \sqrt{x+6}$  .

1. Donner le tableau de variation de  $f$  .

2. On considère l'intervalle  $I = [0, 3]$  .

- Déterminer  $f(I)$  .

3. On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} ; n \geq 0 \end{cases}$

- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 3$
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante .
- La suite  $(u_n)$  est convergente ?
- Ecrire la suite  $(u_n)$  en fonction de  $f$  et de  $u_n$

4. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  .

**Correction :**

1. On donne le tableau de variation de  $f$  .

On a :

•  $f'(x) = (\sqrt{x+6})' = \frac{(x+6)'}{2\sqrt{x+6}} = \frac{1}{2\sqrt{x+6}} > 0$  .

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  .

• Le tableau de variation de  $f$  est :

x	-6		$+\infty$
$f'(x)$		$+\infty$	+
$f(x)$			$+\infty$
	0		$\nearrow$

2. On détermine  $f(I)$ .

La fonction  $f$  est continue sur son domaine de définition  $D_f = [-6, +\infty[$  donc  $f$  est continue sur  $I = [0; 3]$

On a :  $f(I) = f([0; 3])$

$= [f(0), f(3)]$  ( car l'image d'un intervalle est un intervalle et puisque  $f$  est croissante ).

$= [\sqrt{6}; 3]$

**Conclusion :**  $f(I) = f([0; 3]) = [\sqrt{3}, 3] \subset [0, 3]$ .

3. ..

- Montrons que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 3$

On démontre par récurrence :

- On vérifie la relation est vrai pour  $n = 0$ , on a :  $0 \leq u_0 = 2 \leq 3$  donc la relation est vrai pour  $n = 0$ .
- On suppose que la relation est vraie pour  $n$  de  $\mathbb{N}$  c.à.d.  $0 \leq u_n \leq 3$  ( hypothèse de récurrence )
- On démontre que : la relation est vraie pour  $n + 1$  c.à.d. on démontre que  $0 \leq u_{n+1} \leq 3$ .

D'après hypothèse de récurrence on a :

$$0 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow 6 \leq 6 + u_n \leq 9 ; (+6)$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} \leq \sqrt{6 + u_n} \leq 3 \text{ ( car la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante )}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq 3$$

Donc la relation est vraie pour  $n + 1$ .

**Conclusion :** On applique le principe de récurrence on a :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 3$

- Montrons que la suite  $(u_n)$  est croissante .

On montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_{n+1} - u_n \geq 0$

On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{6 + u_n} - u_n = \frac{6 + u_n - u_n^2}{\sqrt{6 + u_n} + u_n} = \frac{(3 - u_n)(2 + u_n)}{\sqrt{6 + u_n} + u_n} \text{ son signe est le signe de}$$

$(3 - u_n)(2 + u_n)$ . ( on peut écrire  $(3 - x)(2 + x)$  avec  $x = u_n$  )

$u_n$	$-\infty$	$-2$	$3$	$+\infty$
$(3 - u_n)(2 + u_n) = u_{n+1} - u_n$		$-$	$0$	$+$
		$0$	$+$	$0$
			$-$	

Puis que  $0 \leq u_n \leq 3$  donc  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

**Conclusion :** la suite  $(u_n)$  est croissante

- La suite  $(u_n)$  est convergente car la suite est croissante et majorée par 3 ( d'après une propriété )
- On écrire la suite  $(u_n)$  en fonction de  $f$  et de  $u_n$ , on a  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = f(u_n)$ .



5. On détermine la limite de la suite  $(u_n)$ .

On a :

- $f$  est une fonction continue sur l'intervalle  $I$ .
- $f(I) = f([0;3])$ .
- $u_0 = 2 \in [0;3]$  ( le premier terme ) .
- La suite  $(u_n)$  est convergente ( vers  $l \in \mathbb{R}$  )

Donc d'après une propriété on a  $l$  est solution de l'équation  $x \in I$  ,  $f(x) = x$ .

On résout l'équation  $x \in I$  ,  $f(x) = x$ .

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x+6} = x$$

$$\Leftrightarrow x+6 = x^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-x)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \in [0;3] \text{ ou } x = -2 \notin [0;3]$$

D'où :  $l = 3 \in [0;3]$

**Conclusion :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$