Leçon1 : Calcul numérique partie5

Identités remarquables

Présentation globale

V) Identités remarquables

Capacités attendues

- Maitriser les techniques de calcul numérique.
- Appliquer les identités remarquables dans le développement et la factorisation des expressions algébriques

Recommandations pédagogiques

- On appliquera les différentes connaissances acquises sur les ensembles de nombre,
- On introduira des symboles ensemblistes et on renforcera ces connaissances et des Compétences acquises dans le cycle collégial ;
- On choisira des situations qui mettent en évidence le rôle des mathématiques dans le Traitement des situations issues de la vie courante
- On introduira aux élèves des connaissances essentielles relatives à la calculatrice scientifique (Calcul d'une racine carrée, somme algébriques, valeurs approchées……) ;

V) Identités remarquables : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 4) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

5) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab - b^2)$ Somme de deux cubes

6) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ Cube d'une Somme

7) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ Cube d'une différence

Ces formules sont pour développer et pour factoriser

Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

Applications 1: **Développement**

En utilisant les Identités remarquables développer les produits suivants comme pour les exemples :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	**$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$**	**$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$**
$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2\times3x\times5 + 5^2$ $= 9x^2 + 30x + 25$	$(3x - 7)^2 = (3x)^2 - 2\times3x\times7 + 7^2$ $= 9x^2 - 42x + 49$	$(5x - 6)(5x + 6) = (5x)^2 - 6^2$ $= 25x^2 - 36$
$(7x + 8)^2 =$	$(4x - 7)^2 =$	$(x - 3)(x + 3) =$
$(4x + 2)^2 =$	$(6x - 1)^2 =$	$(9x - 4)(9x + 4) =$
$(x + 1)^2 =$	$(5x - 9)^2 =$	$(6x + 5)(6x - 5) =$
$(9 + 5x)^2 =$	$(2 - 4x)^2 =$	$(2 + x)(2 - x) =$

Applications 2: factorisations

Factoriser une somme algébrique c'est la transformer en produit.

1/Utilisation des identités remarquables $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$.

Somme algébrique à factoriser	**Forme reconnue :** **$a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$**	**Résultat de la factorisation**
$4x^2+36x+81$	$= (2x)^2 + 2\times 2x \times 9 + 9^2$	$= (2x + 9)^2$
1/ $25x^2+70x+49$	=	=
2/ $12x+9x^2+4$	=	=
3/ $25x^2+9-30x$	=	=
4/ $9x^2-24x+16$	=	=
5/ $9x^2+48x+64$	=	=
6/ $x^2-10x+25$	=	=

2/Utilisation de l'identité remarquable $a^2 - b^2$ = (différence de deux carrés).

Somme algébrique à factoriser	**Forme reconnue :** **$a^2 - b^2$**	**Résultat de la factorisation**
$4x^2 - 25$	$= (2x)^2 - 5^2$	$= (2x - 5)(2x + 5)$
1/ x^2-49	=	=
2/ $16-x^2$	=	=
3/ $64x^2-9$	=	=
$(x-1)^2-36$	$= (x - 1)^2 - 6^2$	$= [(x - 1) + 6][(x - 1) - 6]$ $= [x - 1 + 6][x - 1 - 6]$ $= (x + 5)(x - 7)$
5/ $25 - (2x + 3)^2$	=	= =
6/ $(7x - 3)^2 - (3x + 7)^2$		= =

3/ Utilisation de la distributivité en identifiant un facteur commun : $k\times a + k\times b$ =

Somme algébrique à factoriser	**Forme reconnue :** **$k\times a + k\times b$**	**Résultat de la factorisation**
$6x - 15$	$= \underline{3\times} 2x - \underline{3\times} 5$	$= \underline{3}\,(2x - 5)$
1/ $12 + 3x$	=	=
2/ $x^2 + 7x$	=	=
3/ $14x - 7$	=	=
4/ $2x - 8x^2$	=	=
$(2x+3)(5x - 7) - (2x + 3)(x - 1)$	$=\underline{(2x+3)}(5x - 7) - \underline{(2x + 3)}(x - 1)$	$= \underline{(2x + 3)}\,[(5x - 7) - (x - 1)]$ $= (2x + 3)\,[5x - 7 - x + 1]$ $= (2x + 3)(4x - 6)$
5/ $7(x - 5) - (x - 5)(9 - 2x)$	=	=
6/ $(2x - 3)^2 + (2x - 3)(x + 1)$	=	=

4/Lorsque le facteur commun se cache ou qu'une factorisation peut en cacher une autre.

Factoriser les expressions suivantes en suivant l'indication

A = (2x-3)(x+1) -5(4x-6) (factoriser (4x-6) puis A) A =(2x-3)(x+1) -10(2x-3) A =(2x-3)(x+1-10) A =(2x-3)(x-9)	B = $16x^2$-1 - (4x-1)(x-3) (factoriser $16x^2$-1 puis B) B = B = B = B = B =
C = $18x^2$-50 (mettre 2 en facteur puis factoriser) C = C = C =	D = (3x + 1)(6x – 9) – $(2x – 3)^2$ (factoriser 6x – 9) D = D = D = D = D =

Exercice : $x \in \mathbb{R}$ développer et calculer et simplifier :

$A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$ et $B=\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2$

$C=\left(\sqrt{2}+1\right)^3$ $\quad D=(3x-2)^3$ $\quad E=(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$

$F=(200520052006)^2-(200520052005\times 200520052007)$

(Lorsque la calculatrice tombe en panne ou ne peut pas calculer)

Correction : : $A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$

$A=5+2\sqrt{10}+2-\left(5-2\sqrt{10}+2\right)=5+2\sqrt{10}+2-5+2\sqrt{10}-2=4\sqrt{10}$

$B=\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^2=(2-3)^2=(-1)^2=1$

$C=\left(\sqrt{2}+1\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)^3+3\left(\sqrt{2}\right)^2\times 1+3\sqrt{2}(1)^2+(1)^3=2\sqrt{2}+3\times 2+3\sqrt{2}+1$

$C=5\sqrt{2}+7$

$D=(3x-2)^3=(3x)^3-3(3x)^2\times 2+3\times 3x\times(2)^2-(2)^3$

$D=27x^3-54x^2+36x-8$

$E=(x+2)\left(x^2-2x+4\right)=(x+2)\left(x^2-2\times x+2^2\right)=x^3+2^3=x^3+8$

$F=(200520052006)^2-(200520052005\times 200520052007)$

On remarque que les nombres : 200520052006 et 200520052005

Et 200520052007 différent par leurs chiffes des unités

Pour simplifier on pose : $x=200520052006$

Donc : $200520052005=x-1$ et $200520052007=x+1$

Donc : $F=x^2-(x-1)(x+1)=x^2-\left(x^2-1\right)=x^2-x^2+1=1$ Donc : $F=1$

Exercice : Factoriser les expressions suivantes : $x \in \mathbb{R}$

1) $49x^2-81$ 2) 16x² - 8x + 1 3) x^3-8

4) C = (a + 1) (2a - 3) + 6(a + 1) D = $27x^3$ + 1

Correction : 1) On regarde l'expression, pour choisir l'identité remarquable à appliquer.

L'expression semble être de la forme : a² - b².

$49x^2-81=(7x)^2-9^2=(7x-9)\times(7x+9)$ il s'agit d'un produit. L'expression est factorisée.

2)16x² - 8x + 1 = (4x) ²-8x+1²=(4x) ²+2×(4x) ×+1=(4x-1) ²

3) x^3-8= x^3-2^3=(x-2) (x^2+2x+2^2) =(x-2) (x^2+2x+4)

4) (a + 1) est le facteur commun.
C = (a + 1)(2a - 3 + 6)   Donc C = (a + 1) (2a +3)
5)D = $27x^3 + 1$ -> Il n'y a pas de facteur commun.
-> L'expression semble être de la forme $a^3+ b^3$.
D = $27x^3 + 1=(3x)^3 - 1^3=(3x+1) ((3x)^2 -1(3x) +1^2)$
= $(3x+1) (9x^2 - 3x +1)$
Donc : Méthodes : Pour factoriser une expression, on doit :
- identifier une identité remarquable   ou
- identifier un facteur commun
Attention : on ne peut pas toujours factoriser une expression
<u>exemple :</u>$16x^2 + 8x + 3 = (4x+1)^2 + 2$; cette expression ne peut pas être factorisée sous la forme d'un produit de deux facteurs de degré 1

Exercice : Remplissez les blancs suivants :
$10-4\sqrt{6}=(\ldots-\ldots)^2$ et $4+2\sqrt{2}=(\ldots+\ldots)^2$

Correction :<u>1)</u>$4+2\sqrt{3}=4+2\times\sqrt{3}\times1=3+2\times\sqrt{3}\times1+1=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\sqrt{3}\times1+(1)^2$

$4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

$10-4\sqrt{6}=10-2\times2\times\sqrt{6}=(2)^2+2\times\sqrt{6}\times2+\left(\sqrt{6}\right)^2$

$10-4\sqrt{6}=\left(2-\sqrt{6}\right)^2$

Exercice : Montrer et utiliser une égalité
1. Montrer que pour tous nombres *a* et *b* de $\mathbb{R}$ on a l'égalité suivante :

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. Utiliser cette égalité pour factoriser x^3-8.

Correction : Développer $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ pour vérifier.

2. Avec *a* = *x*, et *b* = 2 : $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

Exercice : Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$
$A=16x^2-8x+1$; $B=16-25x^2$; $C=1-(1-3x)^2$
$D=(2x-1)^3-8$; $E=27+x^3$; $F=x^{12}-2x^6+1$
$H=x^3+1+2\left(x^2-1\right)-(x+1)$ et $G=x^5+x^3-x^2-1$

Correction : $A=16x^2-8x+1=(4x)^2-2\times4x\times1+1^2=(4x-1)^2$

$B=16-25x^2=(4)^2-(5x)^2=(4-5x)(4+5x)$

$C=1-(1-3x)^2=1^2-(1-3x)^2=(1-(1-3x))(1+(1-3x))$

$C=(1-1+3x)(1+1-3x)=3x(2-3x)$

$D=(2x-1)^3-8=(2x-1)^3-2^3=$ On a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

Donc : $D=((2x-1)-2)\left((2x-1)^2+(2x-1)\times2+2^2\right)$

$D=(2x-3)\left((2x)^2-4x+1+4x-2+4\right)=(2x-3)\left(4x^2+3\right)$

$E=27+x^3=3^3+x^3=(3+x)\left(3^2-3x+x^2\right)$

On a : $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab-b^2\right)$

$E=(3+x)\left(9-3x+x^2\right)$

<u>Factoriser</u> c'est écrire sous la forme d'un **produit**

$F=\left(x^6\right)^2-2x^6+1=\left(x^6\right)^2-2x^6\times1+1^2=\left(x^6-1\right)^2$

$G=x^5+x^3-x^2-1=x^3\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)=\left(x^3-1\right)\left(x^2+1\right)$

$H = x^3 + 1 + 2\left(x^2 - 1\right) - \left(x+1\right) = x^3 + 1^3 + 2\left(x^2 - 1^2\right) - \left(x+1\right)$

$H = \left(x+1\right)\left(x^2 - x + 1^2\right) + 2\left(x+1\right)\left(x-1\right) - \left(x+1\right)$

$H = \left(x+1\right)\left(x^2 - x + 1 + 2\left(x-1\right) - 1\right) = \left(x+1\right)\left(x^2 - x + 1 + 2x - 2 - 1\right)$

$H = \left(x+1\right)\left(x^2 + x - 2\right)$

Exercice: On considère l'expression suivante où x est un nombre quelconque :
$F = (3x-1)^2 - (3x-1)(2x-6)$

1/Développer puis réduire F.

2/Factoriser F.

3/Développer puis réduire l'expression de F obtenue au 2/.

Exercice :1. On considère l'expression : G = $(x – 3)^2 – (x – 1)(x – 2)$

a) Développer et réduire G.

b) Comment peut-on déduire, sans calculatrice, le résultat de
$99997^2 – 99999 \times 99998$?

2. a) Factoriser l'expression : H = $(7x – 3)^2 – 9$

b) Calculer la valeur de H pour x = $\frac{1}{7}$