Correction de la série N2

Exercice 1 .

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

1. *Montrons que* $P(x)$ *est divisible par* $(x-1)$:

   On a $P(1) = 1^3 - 2\times 1^2 - 5\times 1 + 6 = 0$ *donc* 1 *est une racine du polynôme* $P(x)$ *d'où le polynôme* $P(x)$ *est divisible par* $(x-1)$.

2. **a)** *On cherche* a *et* b *tels que* $P(x) = (x-1)(x^2+ax+b)$:

   On écrit le polynôme $(x-1)(x^2+ax+b)$ *sous la forme réduite*

   $$(x-1)\left(x^2+ax+b\right) = x^3+ax^2+bx-x^2-ax-b = x^3+x^2(a-1)+x(b-a)-b$$

   et comme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ *donc d'après l'égalité de deux polynômes on obtient*

   $$\begin{cases} a-1=-2 \\ b-a=-5 \\ -b=6 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2+1 \\ b=-5+a \\ b=-6 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=-5-1 \\ b=-6 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=-6 \end{cases}$$

   donc $a=-1$ *et* $b=-6$, *ce qui signifie que* $P(x) = (x-1)(x^2-x-6)$.

   b) *On factorise* $P(x)$ *sous la forme des polynômes de degré* 1 :

   On a $P(x) = (x-1)(x^2-x-6)$. *On factorise le trinôme* x^2-x-6 :

   Calculons le discriminant Δ :

   $$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times 1\times(-6) = 25 > 0$$

   donc le trinôme x^2-x-6 *admet deux racines réelles distinctes* x_1 *et* x_2 *telles que*

   $$x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2\times 1} = -2 \quad et \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2\times 1} = 3$$

   d'où : $x^2-x-6 = (x+2)(x-3)$. *Donc*

   $$P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$$

3. **a)** *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $P(x) \geq 0$:

   On a $P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$ *donc le signe de* $P(x)$ *dépend le signe des binômes* $(x-1)$, $(x+2)$ *et* $(x-3)$.

   ♣ $x-1=0 \iff x=1$

♣ $x+2=0 \iff x=-2$

♣ $x-3=0 \iff x=3$

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \geq 0$ *est :*

$$S = [-2, 1] \cup [3, +\infty[$$

b) *On déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation* $(I): 6-2x \geq \sqrt{x}(5-x)$

L'inéquation (I) *est définie sur* $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. *On a*

$$\begin{array}{rcl} (I) & : & 6-2x \geq \sqrt{x}(5-x) \\ & \iff & 6-2x \geq 5\sqrt{x} - x\sqrt{x} \\ & \iff & x\sqrt{x} - 5\sqrt{x} - 2x + 6 \geq 0 \\ & \iff & \sqrt{x^2} \times \sqrt{x} - 5\sqrt{x} - 2\sqrt{x^2} + 6 \geq 0 \\ & \iff & \left(\sqrt{x}\right)^3 - 5\sqrt{x} - 2\left(\sqrt{x}\right)^2 + 6 \geq 0 \\ & \iff & P\left(\sqrt{x}\right) \geq 0 \\ & \iff & \sqrt{x} \in [0,1] \cup [3, +\infty[\\ & \iff & \sqrt{x} \in [0,1] \;\; ou \;\; \sqrt{x} \in [3, +\infty[\\ & \iff & 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \;\; ou \;\; \sqrt{x} \geq 3 \\ & \iff & 0 \leq x \leq 1 \;\; ou \; x \geq 9 \\ & \iff & x \in [0,1] \;\; ou \; x \in [9, +\infty[\\ & \iff & x \in [0,1] \cup [9, +\infty[\end{array}$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) *est :*

$$S = [0, 1] \cup [9, +\infty[$$

Exercice 2 .

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 9x^2 + 11x + 21$.

1. *Calculons* $P(-1)$:

   On a $P(-1) = (-1)^3 - 9 \times (-1)^2 + 11 \times (-1) + 21 = 0$.

2. *En effectuant la division euclidienne du polynôme* $P(x)$ *par* $x+1$ *on obtient*

$$P(x) = (x+1)\left(x^2 - 10x + 21\right)$$

3. *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $P(x) > 0$

   On a $P(x) = (x+1)(x^2 - 10x + 21)$ *donc le signe de* $P(x)$ *dépend le signe des expressions :* $(x+1)$ *et* $(x^2 - 10x + 21)$.

   ♣ $x + 1 = 0 \iff x = -1.$

   ♣ *Calculons le discriminant* Δ *du trinôme* $x^2 - 10x + 21$:

   On a

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 21 = 16 > 0$$

   donc le trinôme $x^2 - 10x + 21$ *admet deux racines réelles distinctes* x_1 *et* x_2 *telles que :*

$$x_1 = \frac{10 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 7$$

   d'où on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x2-10x+21$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) > 0$ *est :*

$$S =]-1, 3[\cup]7, +\infty[$$

Exercice 3 .

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + x^2 - 22x + 24.$

1. **a)** *Montrons que le polynôme* $P(x)$ *est divisible par* $\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

   On a $P\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ *donc* $\frac{3}{2}$ *est une racine du polynôme* $P(x)$ *d'où le polynôme* $P(x)$ *est divisible par* $\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

   b) *On factorise le polynome* $P(x)$ *sous la forme des polynômes de degré* 1 :

   Le polynôme $P(x)$ *est divisible par* $\left(x - \frac{3}{2}\right)$ *donc il existe un polynôme* $Q(x)$ *tel que*

$$P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) Q(x)$$

On a $\deg(P(x)) = 3$ *donc le degré du polynôme* $Q(x)$ *est 2 d'où* $Q(x) = ax^2 + bx + c$ *avec* $a \neq 0$, *donc*

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(ax^2 + bx + c\right) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - \frac{3ax^2}{2} - \frac{3bx}{2} - \frac{3c}{2} \\ &= ax^3 + x^2\left(b - \frac{3a}{2}\right) + x\left(c - \frac{3b}{2}\right) - \frac{3c}{2} \end{aligned}$$

et comme $P(x) = 2x^3 + x^2 - 22x + 24$ *donc d'après l'égalité de deux polynômes on obtient*

$$\left\{\begin{array}{c} a = 2 \\ b - \dfrac{3a}{2} = 1 \\ c - \dfrac{3b}{2} = -22 \\ -\dfrac{3c}{2} = 24 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a = 2 \\ b - \dfrac{3 \times 2}{2} = 1 \\ c = -22 + \dfrac{3b}{2} \\ c = \dfrac{24}{\frac{-3}{2}} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a = 2 \\ b = 4 \\ c = -22 + \dfrac{3 \times 4}{2} \\ c = -16 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a = 2 \\ b = 4 \\ c = -16 \end{array}\right.$$

donc $P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(2x^2 + 4x - 16\right)$. *On factorise le trinôme* $2x^2 + 4x - 16$:
Calculons le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times (-16) = 144 > 0$$

donc le trinôme $2x^2 + 4x - 16$ *admet deux racines réelles distinctes* x_1 *et* x_2 *telles que*

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{144}}{2 \times 2} = -4 \quad et \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{144}}{2 \times 2} = 2$$

d'où : $2x^2 + 4x - 16 = 2(x-2)(x+4)$. *Donc*

$$P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)(x-2)(x+4)$$

2. *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* $P(x) > 0$.

   On a $P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)(x-2)(x+4)$ *donc le signe de* $P(x)$ *dépend le signe des binômes* $\left(x - \frac{3}{2}\right)$, $(x-2)$ *et* $(x+4)$.

♣ $x - \frac{3}{2} = 0 \iff x = \frac{3}{2}$
♣ $x - 2 = 0 \iff x = 2$

♣ $x+4=0 \iff x=-4$

donc on obtient le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	-4		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$x-\frac{3}{2}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x)>0$ est :

$$S=\left]-4,\frac{3}{2}\right[\cup\left]2,+\infty\right[$$

3. *Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E): 2|x|^3+x^2-22|x|+24=0$.*

   Soit $x\in\mathbb{R}$.

   On sait que $x^2=|x|^2$ donc l'équation (E) devient $2|x|^3+|x|^2-22|x|+24=0$ qui est équivaut à $P(|x|)=0$. Donc

$$\begin{aligned} P(|x|) &= 0 \iff \left(|x|-\frac{3}{2}\right)(|x|-2)(|x|+4)=0 \\ &\iff |x|=\frac{3}{2} \text{ ou } |x|=2 \text{ ou } \underbrace{|x|=-4}_{impossible} \\ &\iff |x|=\frac{3}{2} \text{ ou } |x|=2 \\ &\iff x=\frac{3}{2} \text{ ou } x=\frac{-3}{2} \text{ ou } x=2 \text{ ou } x=-2 \end{aligned}$$

   donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S=\left\{-2,\frac{-3}{2},\frac{3}{2},2\right\}$$

4. *Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I): 2|x|^3+x^2-22|x|+24\geq 0$.*

   Soit $x\in\mathbb{R}$

   On sait que $x^2=|x|^2$ donc l'inéquation (I) devient $2|x|^3+|x|^2-22|x|+24\geq 0$, qui est équivaut à $P(|x|)\geq 0$.

D'après la question 2/ on obtient

$$
\begin{aligned}
P(|x|) &\geq 0 \\
&\iff |x| \in \left(\left[-4, \frac{3}{2}\right] \cup [2, +\infty[\right) \cap [0, +\infty[\\
&\iff |x| \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \cup [2, +\infty[\\
&\iff |x| \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \text{ ou } |x| \in [2, +\infty[\\
&\iff 0 \leq |x| \leq \frac{3}{2} \text{ ou } |x| \geq 2 \\
&\iff 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \text{ ou } -\frac{3}{2} \leq x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2 \\
&\iff x \in \left[\frac{-3}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{3}{2}\right] \cup [2, +\infty[\cup]-\infty, -2] \\
&\iff x \in]-\infty, -2] \cup \left[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right] \cup [2, +\infty[
\end{aligned}
$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est :

$$S =]-\infty, -2] \cup \left[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right] \cup [2, +\infty[$$

Exercice 4 .

On considère l'équation $(E) : x^3 - 15x^2 + 62x - 72 = 0 \quad x \in \mathbb{R}$.

1. *Montrons que l'équation (E) est équivalente au système* $\begin{cases} x = X + 5 \\ X \in \mathbb{R},\ X^3 - 13X - 12 = 0 \end{cases}$

   On pose $x = X + 5$ donc

$$
\begin{aligned}
(E) &\iff (X+5)^3 - 15(X+5)^2 + 62(X+5) - 72 = 0 \\
&\iff \left(X^3 + 15X^2 + 75X + 125\right) - 15\left(X^2 + 10X + 25\right) + 62X + 310 - 72 = 0 \\
&\iff X^3 + 15X^2 + 75X + 125 - 15X^2 - 150X - 375 + 62X + 310 - 72 = 0 \\
&\iff X^3 + 75X - 150X + 62X + 125 - 375 + 310 - 72 = 0 \\
&\iff X^3 - 13X - 12 = 0
\end{aligned}
$$

   donc l'équation (E) est équivalente au système $\begin{cases} x = X + 5 \\ X \in \mathbb{R},\ X^3 - 13X - 12 = 0 \end{cases}$.

2. *On cherche une solution évidente de l'équation : $X^3 - 13X - 12 = 0$*

   On a : $(-1)^3 - 13 \times (-1) - 12 = -1 + 13 - 12 = 0$. Donc -1 est une solution évidente de l'équation $X^3 - 13X - 12 = 0$.

3. *On cherche les réels a, b et c tels que :* $X^3 - 13X - 12 = (X+1)(aX^2 + bX + c)$.
On écrit le polynôme $(X+1)(aX^2+bX+c)$ *sous la forme réduite.*

$$\begin{aligned}(X+1)\left(aX^2+bX+c\right) &= aX^3+bX^2+cX+aX^2+bX+c\\ &= aX^3+X^2(b+a)+X(c+b)+c\end{aligned}$$

et d'après l'égalité de deux polynômes on obtient

$$\begin{cases} a=1 \\ b+a=0 \\ c+b=-13 \\ c=-12 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-13-b \\ c=-12 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-12 \end{cases}$$

donc : $X^3 - 13X - 12 = (X+1)(X^2 - X - 12)$ *pour tout* $X \in \mathbb{R}$.

4. **a)** *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $X^3 - 13X - 12 = 0$.
Soit $X \in \mathbb{R}$.

$X^3-13X-12=0 \iff (X+1)\left(X^2-X-12\right)=0 \iff X=-1$ *ou* $X^2-X-12=0$

Calculons le discriminant Δ *de l'équation* $X^2 - X - 12 = 0$:
On a

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times 1\times(-12) = 49 > 0$$

donc l'équation $X^2 - X - 12 = 0$ *admet deux solutions réelles distinctes* X_1 *et* X_2 :

$$X_1 = \frac{1+\sqrt{49}}{2\times 1} = 4 \quad et \quad X_2 = \frac{1-\sqrt{49}}{2\times 1} = -3$$

d'où l'ensemble des solutions de l'équation $X^3 - 13X - 12 = 0$ *est*

$$S = \{-3, -1, 4\}$$

b) *On déduit l'ensemble des solutions de l'équation* (E) :
On a

$$X^3 - 13X - 12 = 0 \iff X=-3 \text{ ou } X=-1 \text{ ou } X=4$$

donc d'après la question 1, on obtient

$$\begin{aligned}(E)\quad &: \quad x^3 - 15x^2 + 62x - 72 = 0\\ &\iff x=-1+5 \text{ ou } x=-3+5 \text{ ou } x=4+5\\ &\iff x=4 \text{ ou } x=2 \text{ ou } x=9\end{aligned}$$

d'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$S = \{2, 4, 9\}$$

Exercice 5 .

On considère le trinôme $T(x) = -4x^2 + 4x + 5$.

1. **a)** *On cherche la forme canonique du trinôme* $T(x)$:

   On a

$$\begin{aligned} T(x) &= -4x^2 + 4x + 5 \\ &= -\left(4x^2 - 4x - 5\right) \\ &= -\left((2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 - 5\right) \\ &= -\left((2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1 - 6\right) \\ &= -\left((2x-1)^2 - 6\right) \\ &= -(2x-1)^2 + 6 \end{aligned}$$

   donc

$$T(x) = -(2x-1)^2 + 6$$

   b) *Montrons que :* $T(x) \leq 6$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$T(x) - 6 = -(2x-1)^2 + 6 - 6 = -(2x-1)^2$$

   comme $(2x-1)^2 \leq 0$ *donc* $T(x) \leq 6$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

2. **a)** *On vérifier que le trinôme* $T(x)$ *admet deux racines distinctes* α *et* β :

   Calculons Δ :

   On a $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-4) \times 5 = 96 > 0$, *donc le trinôme* $T(x)$ *admet deux racines réelles distinctes* α *et* β.

   b) *Calculons* $\alpha \times \beta$, $\alpha + \beta$, $\alpha^2 + \beta^2$ *et* $\alpha^3 + \beta^3$:

   Le trinôme $T(x)$ *admet deux racines réelles distinctes* α *et* β, *donc*

   ♣ $\alpha \times \beta = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{5}{4}$.

   ♣ $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-4}{-4} = 1$.

   ♣ *On a :* $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ *ce qui entraine que* $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 - 2 \times \left(\dfrac{-5}{4}\right) = \dfrac{7}{2}$.

   ♣ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)\left(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2\right) = 1 \times \left(\dfrac{7}{2} + \dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{19}{4}$.

3. **a)** *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $T(x) = 0$.

   L'équation $T(x) = 0$ *admet deux solutions réelles distinctes* x_1 *et* x_2 (*Le discriminant* $\Delta > 0$)

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{96}}{2 \times (-4)} = \frac{1 - \sqrt{6}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{96}}{2 \times (-4)} = \frac{1 + \sqrt{6}}{2}$$

   donc l'ensemble des solutions de l'équation $T(x) = 0$ *est*

$$S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{6}}{2}, \frac{1 + \sqrt{6}}{2} \right\}$$

b) *On déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation* $T(x) \geq 0$:

Le discriminant du trinôme $T(x)$ *est* $96 > 0$. *Et comme* $a = -4 < 0$ *donc*

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{6}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$T(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $T(x) \geq 0$ *est* :

$$S = \left[\frac{1-\sqrt{6}}{2}, \frac{1+\sqrt{6}}{2}\right]$$

Exercice 6 .

1. **a)** *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* (E) : $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (E) \quad &: \quad x^2 + 2x - 8 = 0 \\ &\iff x^2 + 2x + 1 - 9 = 0 \\ &\iff (x+1)^2 = 9 \\ &\iff |x+1| = 3 \\ &\iff x + 1 = 3 \text{ ou } x + 1 = -3 \\ &\iff x = 2 \text{ ou } x = -4 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est*

$$S = \{-4, 2\}$$

b) *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* (I) : $\dfrac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} \leq \dfrac{3}{2}$.

On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation (I) :

$$\begin{aligned} D &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ x^2 - 4 \neq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ (x-2)(x+2) \neq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ x \neq 2 \text{ et } x \neq -2\right\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}. \end{aligned}$$

Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} &\leq \frac{3}{2} \\ &\iff \frac{2(2x^2 + x - 10) - 3(x^2 - 4)}{2(x^2 - 4)} \leq 0 \\ &\iff \frac{x^2 + 2x - 8}{2(x^2 - 4)} \leq 0 \\ &\iff \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} \leq 0 \end{aligned}$$

Le signe de $\dfrac{x^2+2x-8}{2\left(x^2-4\right)}$ *dépend le signe des trinômes* x^2+2x-8 *et* x^2-4.

Donc

x	$-\infty$	-4		-2		2		$+\infty$
$x2+2x-8$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x2-4$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{x2+2x-8}{x2-4}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) *est :*

$$S=[-4,-2[$$

2. *On considère le polynôme* $P(x)=x^3+\left(\sqrt{2}-1\right)x^2-\left(2+\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{2}$

   a) *On cherche* $Q(x)$ *tel que :* $P(x)=(x+1)\,Q(x)$.
   On a $P(-1)=0$ *donc le polynôme* $P(x)$ *est divisible par* $(x+1)$ *donc il existe un polynôme* $Q(x)$ *tel que*

$$P(x)=(x+1)\,Q(x)$$

   On a $\deg(P(x))=3$ *donc le degré du polynôme* $Q(x)$ *est* 2 *d'où* $Q(x)=ax^2+bx+c$ *avec* $a\neq 0$, *donc*

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)\left(ax^2+bx+c\right) \\ &= ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c \\ &= ax^3+x^2(b+a)+x(c+b)+c \end{aligned}$$

   et comme $P(x)=x^3+\left(\sqrt{2}-1\right)x^2-\left(2+\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{2}$ *donc d'après l'égalité de* *deux polynômes on obtient*

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = \sqrt{2} - 1 \\ c + b = -\left(2 + \sqrt{2}\right) \\ c = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{2} - 1 - 1 \\ c = -2 - \sqrt{2} - b \\ c = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{2} - 2 \\ c = -2 - \sqrt{2} - \sqrt{2} + 2 \\ c = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{2} - 2 \\ c = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

donc $P(x) = (x+1)\left(x^2 + \left(\sqrt{2} - 2\right)x - 2\sqrt{2}\right).$

b) *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $P(x) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & 0 \\ & \iff & (x+1)\left(x^2 + \left(\sqrt{2} - 2\right)x - 2\sqrt{2}\right) = 0 \\ & \iff & x = -1 \ \ ou\ x^2 + \left(\sqrt{2} - 2\right)x - 2\sqrt{2} = 0 \quad / \ \Delta = \left(\sqrt{2} + 2\right)^2 \\ & \iff & x = -1 \ ou\ x = -\sqrt{2} \ ou\ x = 2 \end{array}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation $P(x) = 0$ *est*

$$S = \left\{-\sqrt{2}, -1, 2\right\}$$

c) *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $(I) : |x|^3 + \left(\sqrt{2} - 1\right)x^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)|x| - 2\sqrt{2} < 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$
On sait que $x^2 = |x|^2$ *donc l'inéquation* (I) *devient* $|x|^3+(\sqrt{2}-1)|x|^2-(2+\sqrt{2})|x|-2\sqrt{2}<0$ *qui est équivaut à* $P(|x|)<0$.
On pose $X=|x|$ *avec* $X \in \mathbb{R}^+$ *on obtient* $P(X)<0$.
donc

x	0	2	$+\infty$
$X+1$	$+$		$+$
$Q(X)$	$-$	0	$+$
$P(X)$	$-$	0	$+$

d'où

$$\begin{aligned} P(X) &< 0 \\ &\iff X \in [0,2[\\ &\iff |x| \in [0,2[\\ &\iff 0 \leq |x| < 2 \\ &\iff 0 \leq x < 2 \ \text{ou} \ -2 < x \leq 0 \\ &\iff x \in]-2,0] \cup [0,2[\\ &\iff x \in]-2,2[\end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S =]-2,2[$$

Exercice 7 .
On considère l'équation (E) : $x^2-6x-3=0$.

1. *On pose* $a = 1-\sqrt{3}$ *et* $b = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

♣ *Montrons que :* $\dfrac{a}{b} = 3-2\sqrt{3}$.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}\,(1-\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}\,(1-\sqrt{3})^2}{1-\sqrt{3}^2} \\
&= \frac{\sqrt{3}\,(1-2\sqrt{3}+3)}{-2} \\
&= \frac{\sqrt{3}\,(4-2\sqrt{3})}{-2} \\
&= -\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right) \\
&= 3-2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

♣ *Montrons que :* $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{b}\right) - 3 = 0$.

On a $\frac{a}{b} = 3 - 2\sqrt{3}$ *donc*

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{b}\right) - 3 &= \left(3-2\sqrt{3}\right)^2 - 6\left(3-2\sqrt{3}\right) - 3 \\
&= \left(9-12\sqrt{3}+12\right) - 18 + 12\sqrt{3} - 3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. *On déduit l'ensemble des solutions de l'équation* (E) :

   On a $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{b}\right) - 3 = 0$ *ceci signifie que* $\frac{a}{b}$ *est solution de l'équation* (E). *On cherche la* $2^{éme}$ *solution.*

   On a

$$\left(\frac{a}{b}\right) \times x_2 = \frac{c}{a} \iff \left(\frac{a}{b}\right) \times x_2 = -3 \iff x_2 = \frac{-3}{3-2\sqrt{3}} = \frac{-3\,(3+2\sqrt{3})}{-3} = 3+2\sqrt{3}$$

   donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$S = \left\{3-2\sqrt{3}; 3+2\sqrt{3}\right\}$$