

Correction de la série

Exercice 1 .

♣ On résout dans \mathbb{R} l'équation (E_1) : $\sqrt{3}(x+2) = 1 - \sqrt{2}x$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3}(x+2) &= 1 - \sqrt{2}x \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} &= 1 - \sqrt{2}x \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}x + \sqrt{2}x &= 1 - 2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow x(\sqrt{3} + \sqrt{2}) &= 1 - 2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{(1 - 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = (1 - 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est :

$$S = \left\{ (1 - 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \right\}$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'équation (E_2) : $\frac{x-1}{x+2} = \frac{x-5}{x-2}$.

On cherche l'ensemble de définition de l'équation (E_2) .

$$\begin{aligned} D_{(E_2)} &= \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0 \text{ et } x-2 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq -2 \text{ et } x \neq 2\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+2} &= \frac{x-5}{x-2} \\ \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} - \frac{x-5}{x-2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2) - (x-5)(x+2)}{(x+2)(x-2)} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-2) - (x-5)(x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 12 = 0 &\quad (\text{impossible}) \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est

$$S = \emptyset$$

♣ On résout dans \mathbb{R} l'équation $(E_3) : |x - 1| = |x + 3|$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |x - 1| &= |x + 3| \\ \Leftrightarrow x - 1 = x + 3 \text{ ou } x - 1 = -(x + 3) \\ \Leftrightarrow x - x = 3 + 1 \text{ ou } x - 1 = -x - 3 \\ \Leftrightarrow \underbrace{-1 = 4}_{\text{Impossible}} \text{ ou } 2x = -2 \\ \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est

$$S = \{-1\}$$

♣ On résout dans \mathbb{R} l'équation $(E_4) : |-x + 7| - 2 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |-x + 7| - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow |-x + 7| &= 2 \\ \Leftrightarrow -x + 7 = 2 \text{ ou } -x + 7 &= -2 \\ \Leftrightarrow -x = 2 - 7 \text{ ou } -x &= -2 - 7 \\ \Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x &= 9 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) est

$$S = \{5, 9\}$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $(E_5) : \frac{(x - 1)(2 + x)}{x^2 - 1} = 0$.

On cherche l'ensemble de définition de l'équation (E_5) .

$$\begin{aligned} D_{(E_2)} &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / (x - 1)(x + 1) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0 \text{ et } x + 1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \text{ ou } x \neq -1\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\begin{aligned} \frac{(x - 1)(2 + x)}{x^2 - 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(2 + x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1) = 0 \text{ ou } (2 + x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x &= -2 \end{aligned}$$

comme $1 \notin \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ alors l'ensemble des solutions de l'équation (E_5) est

$$S = \{-2\}$$

♣ On résout dans \mathbb{R} l'équation $(E_6) : m^3x + 1 = 3 + x$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$m^3x + 1 = 3 + x \iff x(m^3 - 1) = 3 - 1 \iff x(m - 1)(m^2 + m + 1) = 2$$

Résolvons l'équation : $(E') : (m - 1)(m^2 + m + 1) = 0$

$$(m - 1)(m^2 + m + 1) = 0 \iff m - 1 = 0 \text{ ou } m^2 + m + 1 = 0 \iff m = 1 \text{ ou } m^2 + m + 1 = 0$$

comme $\Delta = -3 < 0$ alors l'équation $m^2 + m + 1 = 0$ n'admet aucune solution réelle ($\forall m \in \mathbb{R}, m^2 + m + 1 \neq 0$).. Donc l'équation (E') admet unique solution 1.

■ Si $m = 1$ alors l'équation (E_6) devient $0 = 2$. Donc l'équation (E_6) n'admet aucune solution, d'où $S = \emptyset$.

■ Si $m \neq 1$ alors l'équation (E_6) admet unique solution $\frac{2}{(m - 1)(m^2 + m + 1)}$. Donc

$$S = \left\{ \frac{2}{(m - 1)(m^2 + m + 1)} \right\}.$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'équation : $(E_7) : (x + 2) \frac{(2x - 1)}{3} (x - 2)^2 = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (x + 2) \frac{(2x - 1)}{3} (x - 2)^2 &= 0 \\ \iff (x + 2)(2x - 1)(x - 2)^2 &= 0 \\ \iff x + 2 = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 0 \text{ ou } (x - 2)^2 &= 0 \\ \iff x = -2 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 2 & \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_7) est

$$S = \left\{ -2, \frac{1}{2}, 2 \right\}$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'équation : $(E_8) : x^3 + 27 = 3x(x + 3)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x^3 + 27 &= 3x(x + 3) \\ \iff (x + 3)(x^2 - 3x + 9) &= 3x(x + 3) \\ \iff (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - 3x(x + 3) &= 0 \\ \iff (x + 3)[(x^2 - 3x + 9) - 3x] &= 0 \\ \iff (x + 3)(x^2 - 3x + 9 - 3x) &= 0 \\ \iff (x + 3)(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\ \iff (x + 3)(x - 3)^2 &= 0 \\ \iff x + 3 = 0 \text{ ou } (x - 3)^2 &= 0 \\ \iff x = -3 \text{ ou } (x - 3)^2 &= 0 \\ \iff x = -3 \text{ ou } x = 3 & \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_8) est

$$S = \{-3, 3\}$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'équation : (E_9) : $\frac{2x-1}{x-m} = m$.

On cherche l'ensemble de définition de l'équation (E_9) :

$$\begin{aligned} D_{(E_9)} &= \{x \in \mathbb{R} / x - m \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq m\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{m\} \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{m\}$

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{x-m} &= m \\ \iff 2x-1 &= m(x-m) \\ \iff 2x-1 &= mx-m^2 \\ \iff 2x-mx &= 1-m^2 \\ \iff x(2-m) &= 1-m^2 \end{aligned}$$

■ Si $m = 2$ alors l'équation devient $0 = -3$ ce qui signifie que l'équation (E_9) n'admet aucune solution réelle. Donc $S = \emptyset$.

■ Si $m \neq 2$ alors l'équation (E_9) admet unique solution $\frac{1-m^2}{2-m}$. Donc $S = \left\{ \frac{1-m^2}{2-m} \right\}$.

Exercice 2 .

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation : (I_1) : $\frac{-1}{2}(1-2x) \leq x + \frac{1}{3}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{-1}{2}(1-2x) \leq x + \frac{1}{3} \iff \frac{-1}{2} + x \leq x + \frac{1}{3} \iff 0 \leq \frac{5}{6}$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est

$$S = \mathbb{R}$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation : (I_2) : $\frac{x}{2x+1} \leq \frac{1}{3}$.

On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation (I_2) :

$$\begin{aligned} D_{(I_2)} &= \{x \in \mathbb{R} / 2x+1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / 2x \neq -1\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{-1}{2} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$.

$$\frac{x}{2x+1} \leq \frac{1}{3} \iff \frac{x}{2x+1} - \frac{1}{3} \leq 0 \iff \frac{3x - 2x - 1}{3(2x+1)} \leq 0 \iff \frac{x-1}{3(2x+1)} \leq 0$$

Le signe de $\frac{x-1}{3(2x+1)}$ dépend du signe des expressions : $x-1$ et $3(2x+1)$.

■ $x-1=0 \iff x=1$

■ $3(2x+1)=0 \iff 2x+1=0 \iff x=\frac{-1}{2}$

donc

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+
$3(2x+1)$	-	0	+	+
$\frac{x-1}{3(2x+1)}$	+	-	0	+

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est

$$S = \left] \frac{-1}{2}, 1 \right]$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation : (I_3) : $(2x-1) \left(2 - \frac{1}{4}x \right) < 0$.

On résout dans \mathbb{R} les équations : $2x-1=0$ et $2 - \frac{1}{4}x=0$:

■ $2x-1=0 \iff x=\frac{1}{2}$

■ $2 - \frac{1}{4}x=0 \iff \frac{1}{4}x=2 \iff x=8$

donc

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	8	$+\infty$	
$2x-1$	-	0	+	+	
$2 - \frac{1}{4}x$	+	+	0	-	
$(2x-1)(2 - \frac{1}{4}x)$	-	0	+	0	-

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_3) est

$$S = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[\cup] 8, +\infty [$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation : $(I_4) : x^3 + 2x^2 \leq -x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x^3 + 2x^2 \leq -x \iff x(x^2 + 2x + 1) \leq 0 \iff x(x+1)^2 \leq 0$$

donc

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	$-$	$ $	$-$	0
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$	$+$
$x(x+1)^2$	$-$	0	$-$	0

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S =]-\infty, -1] \cup [-1, 0] =]-\infty, 0]$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation : $(I_5) : \frac{x+3}{3x-5} < \frac{3x-5}{x+3}$.

On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation (I_5) :

$$\begin{aligned} D_{(I_5)} &= \{x \in \mathbb{R} / 3x - 5 \neq 0 \text{ et } x + 3 \neq 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{5}{3} \text{ et } x \neq -3 \right\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \left\{ -3, \frac{5}{3} \right\} \end{aligned}$$

Soit $x \in D_{(I_5)}$.

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{3x-5} &< \frac{3x-5}{x+3} \\ \iff \frac{x+3}{3x-5} - \frac{3x-5}{x+3} &< 0 \\ \iff \frac{(x+3)^2 - (3x-5)^2}{(3x-5)(x+3)} &< 0 \\ \iff \frac{[(x+3) - (3x-5)][(x+3) + (3x-5)]}{(3x-5)(x+3)} &< 0 \\ \iff \frac{(-2x+8)(4x-2)}{(3x-5)(x+3)} &< 0 \end{aligned}$$

Le signe de $\frac{(-2x+8)(4x-2)}{(3x-5)(x+3)}$ dépend du signe des expressions : $-2x+8$, $4x-2$, $3x-5$ et $x+3$.

- $-2x + 8 = 0 \iff x = 4$
- $4x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $3x - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{3}$
- $x + 3 = 0 \iff x = -3$

alors

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	4	$+\infty$	
$-2x+8$	+	+	+	+	0	-	
$4x-2$	-	-	0	+	+	+	
$3x-5$	-	-	-	0	+	+	
$x+3$	-	0	+	+	+	+	
$\frac{(-2x+8)(4x-2)}{(3x-5)(x+3)}$	-	+	0	-	+	0	-

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_5) est :

$$S =]-\infty, -3[\cup \left] \frac{1}{2}, \frac{5}{3} \right[\cup]4, +\infty[$$

- ♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation : (I_5) : $\frac{(x-1)^2}{x} \leq 0$.

l'inéquation est définie sur \mathbb{R}^* .

On a

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	0	+	+
$(x-1)^2$	+	+	0	+
$\frac{(x-1)^2}{x}$	-	+	0	+

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_7) est :

$$S =]-\infty, 0[\cup \{1\}$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation : $(I_7) : m(mx - 1) < x(1 - m)$ où $m \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} m(mx - 1) &< x(1 - m) \\ \iff m^2x - m &< x - mx \\ \iff m^2x + mx - x &< m \\ \iff x(m^2 + m - 1) &< m \end{aligned}$$

Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $m^2 + m - 1 = 0$

On a $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$. Donc l'équation admet 2 solutions réelles distinctes m_1 et m_2 telles que :

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Comme $a = 1 > 0$, on déduit le tableau de signe suivant

m	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$	
m^2+m-1	+	0	-	0	+

■ Si $m \in \left] -\infty, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right[$, alors $m^2 + m - 1 > 0$ donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_7) est :

$$S = \left] -\infty, \frac{m}{m^2 + m - 1} \right[$$

■ Si $m \in \left] \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right[$, alors $m^2 + m - 1 < 0$ donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_7) est :

$$S = \left] \frac{m}{m^2 + m - 1}, +\infty \right[$$

■ Si $m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, alors l'inéquation devient $0 < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ (impossible). donc l'inéquation (I_7) n'admet aucune solution. Donc

$$S = \emptyset$$

■ Si $m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, alors l'inéquation devient $0 < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.
Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_7) est :

$$S = \mathbb{R}$$

Exercice 3 .

♣ Résolvons dans \mathbb{R} le système
$$\begin{cases} 5(2-x) \leq -7x+6 \\ 3x+7 \leq 4\left(x+\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5(2-x) \leq -7x+6 \\ 3x+7 \leq 4\left(x+\frac{1}{2}\right) \end{cases} &\iff \begin{cases} 10-5x \leq -7x+6 \\ 3x+7 \leq 4x+2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -5x+7x \leq 6-10 \\ 3x-4x \leq 2-7 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x \leq -4 \\ -x \leq -5 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 5 \end{cases} \\ &\iff x \leq -2 \text{ et } x \geq 5 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions du système est

$$S =]-\infty, -2] \cap [5, +\infty[= \emptyset$$

♣ Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3x-2 &< 1-2x \leq x+3 \\ \iff 3x-2 &< 1-2x \text{ et } 1-2x \leq x+3 \\ \iff 3x+2x &< 1+2 \text{ et } -2x-x \leq 3-1 \\ \iff 5x &< 3 \text{ et } -3x \leq 2 \\ \iff x &< \frac{3}{5} \text{ et } x \geq -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions du système est

$$S = \left] -\infty, \frac{3}{5} \right[\cap \left[\frac{-2}{3}, +\infty \right[= \left[\frac{-2}{3}, \frac{3}{5} \right[$$

Exercice 4 .

On cherche la forme canonique



$$\begin{aligned}P(x) &= x^2 - 4x + 5 \\&= x^2 - 2 \times 2x + 2^2 - 2^2 + 5 \\&= (x - 2)^2 - 4 + 5 \\&= (x - 2)^2 + 1\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}Q(x) &= x^2 + 8x + 1 \\&= x^2 + 2 \times 4x + 4^2 - 4^2 + 1 \\&= (x + 4)^2 - 16 + 1 \\&= (x + 4)^2 - 15\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}R(x) &= x^2 - 6x - 7 \\&= x^2 - 2 \times 3x + 3^2 - 3^2 - 7 \\&= (x - 3)^2 - 9 - 7 \\&= (x - 3)^2 - 16\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}F(x) &= x^2 - 7x + 3 \\&= x^2 - 2 \times \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 3 \\&= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 3 \\&= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{37}{4}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}A(x) &= x^2 - x + 5 \\&= x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \\&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 5 \\&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} B(x) &= x^2 + 5x - \frac{1}{2} \\ &= x^2 + 2 \times \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - \frac{1}{2} \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{27}{4} \end{aligned}$$

Exercice 5 .

♣ On résout dans \mathbb{R} l'équation $(E_1) : 3 - 2|x - 4| = 2x + 5$.

Le tableau de signe de $x - 4$.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$x-4$	$-$	0	$+$

■ Si $x \in]-\infty, 4]$, alors $|x - 4| = -(x - 4)$ donc

$$\begin{aligned} (E) &\iff 3 - 2(-(x - 4)) = 2x + 5 \\ &\iff 3 + 2(x - 4) = 2x + 5 \\ &\iff 2x - 2x = 5 - 3 + 8 \\ &\iff 0 = 10 \quad (\text{impossible}) \end{aligned}$$

donc

$$S_1 = \emptyset$$

■ Si $x \in [4, +\infty[$, alors $|x - 4| = x - 4$ donc

$$\begin{aligned} (E) &\iff 3 - 2(x - 4) = 2x + 5 \\ &\iff 3 - 2x + 8 = 2x + 5 \\ &\iff -4x = 5 - 11 \\ &\iff x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

et comme $\frac{3}{2} \notin [4, +\infty[$, donc

$$S_2 = \emptyset$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est :

$$S = S_1 \cup S_2 = \emptyset$$

♣ On résout dans \mathbb{R} l'équation $(E_2) : |2x^2 - x - 6| - |x + 1| - 1 = 0$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

On résout d'abord les équations : $2x^2 - x - 6 = 0$ et $x + 1 = 0$.

♠ Les solutions de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$ dans \mathbb{R} sont : 2 et $\frac{-3}{2}$.

♠ L'équation $x + 1 = 0$ admet unique solution -1 .

Donc

x	$-\infty$	$\frac{-3}{2}$	-1	2	$+\infty$	
$2x^2-x-6$	+	0	-	-	0	+
$x+1$	-	-	0	+	+	+

♣ Si $x \in \left] -\infty, \frac{-3}{2} \right]$, alors $|2x^2 - x - 6| = 2x^2 - x - 6$ et $|x + 1| = -(x + 1)$ donc

$$\begin{aligned}
 (E) &\iff (2x^2 - x - 6) + (x + 1) - 1 = 0 \\
 &\iff 2x^2 - 6 = 0 \\
 &\iff 2x^2 - 6 = 0 \\
 &\iff x^2 = 3 \\
 &\iff x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

comme $-\sqrt{3} \notin \left] -\infty, \frac{-3}{2} \right]$ et $\sqrt{3} \notin \left] -\infty, \frac{-3}{2} \right]$ donc

$$S_1 = \emptyset$$

♣ Si $x \in \left[\frac{-3}{2}, -1 \right]$, alors $|2x^2 - x - 6| = -(2x^2 - x - 6)$ et $|x + 1| = -(x + 1)$ donc

$$\begin{aligned}
 (E) &\iff -(2x^2 - x - 6) + (x + 1) - 1 = 0 \\
 &\iff -2x^2 + 2x + 6 = 0
 \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$.

Comme $x_1 \notin \left[\frac{-3}{2}, -1 \right]$. Donc

$$S_2 = \left\{ \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right\}$$

♣ Si $x \in [-1, 2]$, alors $|2x^2 - x - 6| = -(2x^2 - x - 6)$ et $|x + 1| = (x + 1)$ donc

$$\begin{aligned} (E) &\iff -(2x^2 - x - 6) - (x + 1) - 1 = 0 \\ &\iff 4 - 2x^2 = 0 \\ &\iff x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc

$$S_3 = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

♣ Si $x \in [2, +\infty[$ alors $|2x^2 - x - 6| = 2x^2 - x - 6$ et $|x + 1| = x + 1$ donc

$$\begin{aligned} (E) &\iff (2x^2 - x - 6) - (x + 1) - 1 = 0 \\ &\iff 2x^2 - 2x - 8 = 0 \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$.
Comme $x_2 \notin [2, +\infty[$. Donc

$$S_4 = \left\{ \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right\}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \\ &= \left\{ \frac{1 + \sqrt{17}}{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, -3 \right\} \end{aligned}$$

♣ On résout dans \mathbb{R} l'équation $(E_3) : \sqrt{3x + 4} = x$.

On cherche l'ensemble de définition de l'équation (E_3) .

$$\begin{aligned} D_{(E)} &= \{x \in \mathbb{R} / 3x + 4 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / 3x \geq -4\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{-4}{3} \right\} \\ &= \left[\frac{-4}{3}, +\infty \right[\end{aligned}$$

Soit $x \in \left[\frac{-4}{3}, +\infty \right[$

$$\begin{aligned} \sqrt{3x + 4} &= x \\ \iff 3x + 4 &= x^2, \text{ et } x \geq 0 \\ \iff -x^2 + 3x + 4 &= 0, \text{ et } x \geq 0 \end{aligned}$$

comme $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times (-1) \times 4 = 25 > 0$ donc l'équation $-x^2 + 3x + 4 = 0$ admet 2 solutions réelles distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = 4$$

puisque $-1 < 0$ et $4 > 0$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est :

$$S = \{4\}$$

♣ On résout dans \mathbb{R} l'équation (E_4) : $2x^4 - x^2 - 6 = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2x^4 - x^2 - 6 = 0 \iff 2(x^2)^2 - x^2 - 6 = 0 \quad (1)$$

On pose $X = x^2$ avec $X \in \mathbb{R}^+$, l'équation (1) devient (E') : $2X^2 - X - 6 = 0$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49 > 0$, donc l'équation (E') admet 2 solutions réelles distinctes :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2} \\ \iff X_1 &= 2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-3}{2} \\ \iff x_1^2 &= 2 \quad \text{et} \quad x_2^2 = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

L'équation $x_2^2 = \frac{-3}{2}$ est impossible. Et on a

$$x_1^2 = 2 \iff |x_1| = \sqrt{2} \iff x_1 = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x_1 = -\sqrt{2}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) est :

$$S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

♣ On résout l'équation (E_5) : $x^2 + |x| - 2 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + |x| - 2 = 0 \iff |x|^2 + |x| - 2 = 0 \quad (1)$$

On pose $X = |x|$ avec $X \in \mathbb{R}^+$, l'équation (1) devient (E') : $X^2 + X - 2 = 0$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$, donc l'équation (E') admet 2 solutions réelles distinctes :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -2 \\ \iff X_1 &= 1 \quad \text{et} \quad X_2 = -2 \\ \iff |x_1| &= 1 \quad \text{et} \quad |x_2| = -2 \end{aligned}$$

L'équation $|x_2| = -2$ est impossible. Et on a

$$|x_1| = 1 \iff x_1 = 1 \text{ ou } x_1 = -1$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_5) est :

$$S = \{-1, 1\}$$

♣ On résout dans \mathbb{R} l'équation (E_6) : $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$.

L'équation (E_6) est définie sur \mathbb{R}^+ .

Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \iff (\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \quad (1)$$

On pose $X = \sqrt{x}$ avec $X \in \mathbb{R}^+$, l'équation (1) devient (E') : $X^2 - 3X + 2 = 0$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$, donc l'équation (E') admet 2 solutions réelles distinctes :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \\ \iff X_1 &= 2 \quad \text{et} \quad X_2 = 1 \\ \iff \sqrt{x_1} &= 2 \quad \text{et} \quad \sqrt{x_2} = 1 \\ \iff x_1 &= 4 \quad \text{et} \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_6) est :

$$S = \{1, 4\}$$

♣ On résout dans \mathbb{R} l'équation (E_7) : $\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{3}{25} = 0$.

L'ensemble de définition de l'équation (E_7) est \mathbb{R}^* .

Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{3}{25} = 0 \iff 3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{x} + \frac{3}{25} = 0 \quad (1)$$

On pose $X = \frac{1}{x}$, l'équation (1) devient (E') : $3X^2 - 2X + \frac{3}{25} = 0$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{3}{25} = \frac{64}{25} > 0$, donc l'équation (E') admet 2 solutions réelles distinctes :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{\frac{64}{25}}}{2 \times 3} = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{\frac{64}{25}}}{2 \times 3} = \frac{1}{15} \\ \iff X_1 &= \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1}{15} \\ \iff \frac{1}{x_1} &= \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{15} \\ \iff x_1 &= \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = 15 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_6) est :

$$S = \left\{ \frac{5}{3}, 15 \right\}$$

Exercice 6 .

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation (I_1) : $2x + 1 - |4x - 3| < 2x - 4$.

Le tableau de signe de l'expression : $4x - 3$

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$4x-3$	$-$	0	$+$

■ Si $x \in \left] -\infty, \frac{3}{4} \right]$ alors $4x - 3 \leq 0$ c'est-à-dire $|4x - 3| = -(4x - 3)$ donc l'inéquation devient

$$2x + 1 + (4x - 3) < 2x - 4 \iff 2x + 4x - 2x < -4 - 1 + 3 \iff 4x < -2 \iff x < -\frac{1}{2}$$

donc

$$S_1 = \left] -\infty, \frac{3}{4} \right] \cap \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[= \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[$$

■ Si $x \in \left[\frac{3}{4}, +\infty \right[$ alors $4x - 3 \geq 0$ c'est-à-dire $|4x - 3| = 4x - 3$ donc l'inéquation devient

$$2x + 1 - (4x - 3) < 2x - 4 \iff 2x - 4x - 2x < -4 - 1 - 3 \iff -4x < -8 \iff x > 2$$

donc

$$S_2 = \left[\frac{3}{4}, +\infty \right[\cap] 2, +\infty [=] 2, +\infty [$$

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est :

$$S = S_1 \cup S_2 = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup] 2, +\infty [$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation (I_2) : $|x^2 + 3x + 2| + |x^2 - 3x + 2| < 12$.

Étudions le signe des trinômes suivants : $x^2 + 3x + 2$ et $x^2 - 3x + 2$:

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$ donc le trinôme $x^2 + 3x + 2$ admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 1}{2} = -2$$

De même on a $\Delta = b^2 - 4ac = 1 > 0$ donc le trinôme $x^2 - 3x + 2$ admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

donc on obtient le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	+	+	0	-	+
$x^2 + 3x + 2$	+	0	-	0	+	+

- Si $x \in]-\infty, -2]$ alors $|x^2 + 3x + 2| = x^2 + 3x + 2$ et $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$
l'inéquation (I_2) devient

$$x^2 + 3x + 2 + x^2 - 3x + 2 < 12 \iff 2x^2 + 4 < 12 \iff x^2 < 4 \iff |x| < 2 \iff -2 < x < 2$$

donc

$$S_1 =]-2, 2[\cap]-\infty, -2] = \emptyset$$

- Si $x \in [-2, -1]$ alors $|x^2 + 3x + 2| = -(x^2 + 3x + 2)$ et $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$
l'inéquation (I_2) devient

$$-(x^2 + 3x + 2) + x^2 - 3x + 2 < 12 \iff -6x < 12 \iff x > -2$$

donc

$$S_2 = [-2, -1] \cap]-2, +\infty[=]-2, -1[$$

- Si $x \in [-1, 1]$ alors $|x^2 + 3x + 2| = x^2 + 3x + 2$ et $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$
l'inéquation (I_2) devient

$$x^2 + 3x + 2 + x^2 - 3x + 2 < 12 \iff 2x^2 + 4 < 12 \iff x^2 < 4 \iff |x| < 2 \iff -2 < x < 2$$

donc

$$S_3 = [-1, 1] \cap]-2, 2[= [-1, 1]$$

- Si $x \in [1, 2]$ alors $|x^2 + 3x + 2| = x^2 + 3x + 2$ et $|x^2 - 3x + 2| = -(x^2 - 3x + 2)$
l'inéquation (I_2) devient

$$x^2 + 3x + 2 - (x^2 - 3x + 2) < 12 \iff 6x < 12 \iff x < 2$$

donc

$$S_4 = [1, 2] \cap]-\infty, 2[= [1, 2[$$

- Si $x \in [2, +\infty[$ alors $|x^2 + 3x + 2| = x^2 + 3x + 2$ et $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$
l'inéquation (I_2) devient

$$x^2 + 3x + 2 + x^2 - 3x + 2 < 12 \iff 2x^2 + 4 < 12 \iff x^2 < 4 \iff |x| < 2 \iff -2 < x < 2$$

donc

$$S_5 =]-2, 2[\cap [2, +\infty[= \emptyset$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est :

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 =]-2, 2[$$

♣ On résout dans \mathbb{R} l'inéquation (I_3) : $\sqrt{x-1} \geq x-7$.

On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation (I_3) .

$$\begin{aligned} D(I) &= \{x \in \mathbb{R} / x-1 \geq 0\} \\ &= [1, +\infty[. \end{aligned}$$

Le tableau de signe de l'expression $x-7$:

x	$-\infty$	7	$+\infty$
$x-7$	$-$	0	$+$

1. ♣ Si $x \in [1, 7[$, alors $x-7 < 0$ donc $\sqrt{x-1} \geq x-7$ est vraie pour tout $x \in [1, 7[$.
D'où

$$S_1 = [1, 7[$$

♣ Si $x \in [7, +\infty[$, alors $x-7 \geq 0$.
Donc

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &\geq x-7 \\ \iff (x-1) &\geq (x-7)^2 \\ \iff (x-1) - (x^2 - 14x + 49) &\geq 0 \\ \iff -x^2 + 15x - 50 &\geq 0 \\ \iff x \in [5, 10]. \end{aligned}$$

d'où

$$S_2 = [5, 10] \cap [7, +\infty[= [7, 10].$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_3) est :

$$S = S_1 \cup S_2 = [1, 10]$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation (I_4) : $\frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 + 10x - 8} \leq 0$.

On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation (I_4) :

$$D = \{x \in \mathbb{R} / 3x^2 + 10x - 8 \neq 0\}$$

Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $3x^2 + 10x - 8 = 0$:

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \times 3 \times (-8) = 196 > 0$. Donc l'équation $3x^2 + 10x - 8 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{196}}{6} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{196}}{6} = \frac{2}{3}$$

donc

$$\begin{aligned} D &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq -4 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \right\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \left\{ -4, \frac{2}{3} \right\} \end{aligned}$$

d'où l'inéquation (I_4) est définie sur D .

Le signe de $\frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 + 10x - 8}$ dépend du signe des expressions : $3x^2 + 10x - 8$ et $x^2 - 6x + 9$.
 (Le signe de $\frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 + 10x - 8}$ sur D).

On a : $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \geq 0$. Et on a $x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x - 3)^2 = 0 \iff x = 3$.

Donc

x	$-\infty$	-4	$\frac{2}{3}$	3	$+\infty$
$x^2 - 6x + 9$	+	+	+	0	+
$3x^2 + 10x - 8$	+	0	-	0	+
$\frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 + 10x - 8}$	+	-	+	0	+

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_4) est :

$$S = \left] -4, \frac{2}{3} \right[\cup \{3\}$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation (I_5) : $\sqrt{x^2 + 1} - 2x + 1 \leq 0$.

L'inéquation (I_5) est définie sur \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2 + 1} - 2x + 1 \leq 0 \iff \sqrt{x^2 + 1} \leq 2x - 1$$

Le tableau de signe de l'expression $2x - 1$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$	-	0	+

- Si $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$ alors $2x - 1 < 0$ et l'inéquation n'a pas de solution puisque $(\sqrt{x^2 + 1} > 0)$. Donc

$$S_1 = \emptyset$$

- Si $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ alors $2x - 1 \geq 0$ donc

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} &\leq 2x - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + 1 &\leq (2x - 1)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 1 &\leq 4x^2 - 4x + 1 \\ \Leftrightarrow -3x^2 + 4x &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x(-3x + 4) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[\end{aligned}$$

donc

$$S_2 = \left(]-\infty, 0[\cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[\right) \cap \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[= \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_5) est :

$$S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$$

Exercice 7 .

Résolvons dans \mathbb{R} l'équation (E) : $x^2 - 2(1 + m)x + 4 = 0$. ($m \in \mathbb{R}$).

Calculons Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= [-2(1 + m)]^2 - 4 \times 1 \times 4 \\ &= [-2(1 + m)]^2 - 4^2 \\ &= [(-2 - 2m) - 4] [-2(1 + m) + 4] \\ &= (-2m - 6)(-2m + 2) \\ &= 4(m - 1)(m + 3) \end{aligned}$$

On cherche le tableau de signe de l'expression $4(m - 1)(m + 3)$:

m	∞	-3	1	$+\infty$	
$m-1$	-		-	0	+
$m+3$	-	0	+		+
$(m-1)(m+3)$	+	0	-	0	+

- ♠ Si $m \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$ alors $\Delta > 0$ donc l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{2(1+m) + \sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2} = (1+m) + \sqrt{(m-1)(m+3)}$$

et

$$x_2 = \frac{2(1+m) - \sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2} = (1+m) - \sqrt{(m-1)(m+3)}$$

D'où

$$S = \left\{ (1+m) - \sqrt{(m-1)(m+3)}, (1+m) + \sqrt{(m-1)(m+3)} \right\}$$

- ♠ Si $m \in]-3, 1[$ alors $\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas des solutions dans \mathbb{R} . D'où

$$S = \emptyset$$

- ♠ Si $m = 1$ alors $\Delta = 0$ donc l'équation admet unique solution $\frac{2(1+m)}{2} = 2$. D'où

$$S = \{2\}$$

- ♠ Si $m = -3$ alors $\Delta = 0$ donc l'équation admet unique solution $\frac{2(1+m)}{2} = -2$. D'où

$$S = \{-2\}$$

Exercice 8 .

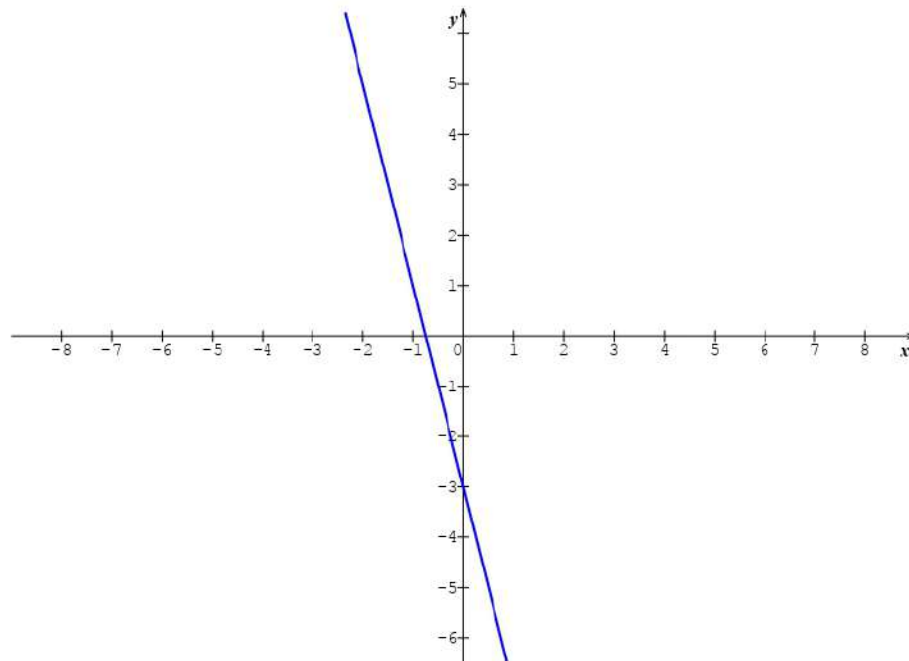
- ♣ Résolvons dans \mathbb{R}^2 l'équation (E_1) : $4x + y + 3 = 0$.

$$4x + y + 3 = 0 \iff y = -4x - 3$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est :

$$S = \{(x, 4x - 3), x \in \mathbb{R}\}$$

La représentation graphique de l'ensemble des solutions



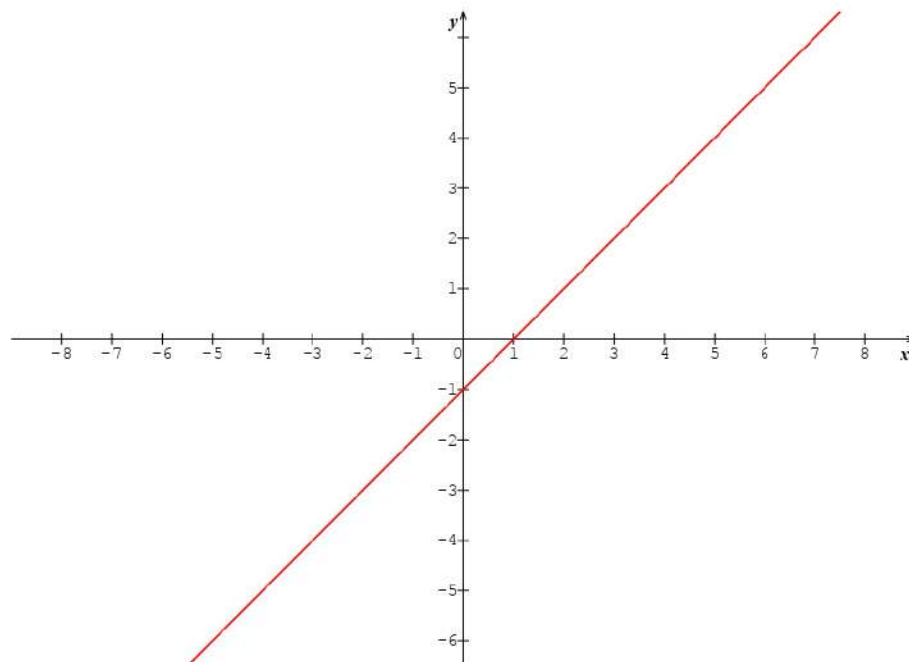
♣ Résolvons dans \mathbb{R}^2 l'équation (E_2) : $2x - 7y + 3 = -x - 4y + 6$.

$$2x - 7y + 3 = -x - 4y + 6 \iff 3x - 3y - 3 = 0 \iff x - y - 1 = 0 \iff y = x - 1$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est :

$$S = \{(x, x - 1), x \in \mathbb{R}\}$$

La représentation graphique de l'ensemble des solutions



Exercice 9 .

♣ Résolvons dans \mathbb{R}^2 le système suivant : $(S_1) : \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

On calcule le déterminant du système $(S_1) : D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

On a

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 1 \times 5 = -9 \neq 0$$

donc le système (S_1) admet une seule solution est le couple (x, y) tel que :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-8 - 1}{-9} = 1 \quad \text{et} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{2 - 20}{-9} = \frac{-18}{-9} = 2$$

d'où l'ensemble des solutions du système est

$$S = \{(1, 2)\}$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R}^2 le système suivant : $(S_2) : \begin{cases} -x + 2y - 8 = 0 \\ -3x + y + 1 = 0 \end{cases}$

On a

$$\begin{cases} -x + 2y - 8 = 0 \\ -3x + y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y = 8 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$$

On calcule le déterminant du système : $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

On a

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times 1 + 2 \times 3 = 5 \neq 0$$

donc le système (S_1) admet une seule solution est le couple (x, y) tel que :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{8 + 2}{-5} = -\frac{10}{5} = -2 \quad \text{et} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{1 + 24}{-5} = -\frac{25}{5} = -5$$

d'où l'ensemble des solutions du système est

$$S = \{(2, 5)\}$$

Exercice 10 .

♣ Résolvons dans \mathbb{R}^2 le système suivant : $(S_1) : \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 9 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 2 \end{cases}$

On cherche l'ensemble de définition du système (S_1) :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\}$$

donc le système (S_1) est défini sur D .

On a

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 9 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{y} = 9 \\ 5 \times \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2 \end{cases}$$

On pose $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$ le système devient $\begin{cases} 3X + 2Y = 9 \\ 5X - Y = 2 \end{cases}$. Calculons le déterminant D du système :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) - 2 \times 5 = -13$$

donc le système (S_1) admet une seule solution est le couple (X, Y) tel que :

$$X = \frac{D_X}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-9 - 4}{-13} = 1 \quad \text{et} \quad Y = \frac{D_Y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{6 - 45}{-13} = \frac{-39}{-13} = 3$$

donc

$$X = 1 \text{ et } Y = 3 \iff \frac{1}{x} = 1 \text{ et } \frac{1}{y} = 3 \iff x = 1 \text{ et } y = \frac{1}{3}$$

d'où l'ensemble des solutions du système est

$$S = \left\{ \left(1, \frac{1}{3} \right) \right\}$$

♣ Résolvons dans \mathbb{R}^2 le système suivant : $(S_1) : \begin{cases} 3|x+2| + 4|y-5| = -9 \\ 2|x+2| - |y-5| = -6 \end{cases}$

L'équation $3|x+2| + 4|y-5| = -9$ est impossible. Donc

$$S = \emptyset$$

Exercice 11 .

1. Résolvons dans \mathbb{R}^2 le système suivant : $(S_1) : \begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$

On calcule le déterminant du système : $D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$

On a

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2 \times 4 - 5 \times 3 = -23 \neq 0$$

donc le système (S_1) admet une seule solution est le couple (x, y) tel que :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{7 \times (-4) - 5 \times (-1)}{-23} = \frac{-23}{-23} = 1$$

et

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{-2 - 21}{-23} = \frac{-23}{-23} = 1$$

d'où l'ensemble des solutions du système est

$$S = \{(1, 1)\}$$

2. On déduit dans \mathbb{R}^2 l'ensemble des solutions du système : $(S) : \begin{cases} 2\sqrt{x-3} + 5|2y-3| = 7 \\ 3\sqrt{x-3} - 4|2y-3| = -1 \end{cases}$

On cherche l'ensemble de définition du système (S) :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - 3 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 3\}$$

donc le système (S) est défini sur D .

On pose $X = \sqrt{x-3}$ et $Y = |2y-3|$, le système devient $\begin{cases} 2X + 5Y = 7 \\ 3X - 4Y = -1 \end{cases}$. D'après

la question précédente on déduit que

$$\begin{aligned} X &= 1 \text{ et } Y = 1 \\ \iff \sqrt{x-3} &= 1 \text{ et } |2y-3| = 1 \\ \iff x-3 &= 1 \text{ et } (2y-3 = 1 \text{ ou } 2y-3 = -1) \\ \iff x &= 4 \text{ et } (2y = 4 \text{ ou } 2y = 2) \\ \iff x &= 4 \text{ et } (y = 2 \text{ ou } y = 1) \\ \iff (x &= 4 \text{ et } y = 2) \text{ ou } (x = 4 \text{ et } y = 1) \end{aligned}$$

d'où l'ensemble des solutions du système est

$$S = \{(4, 2), (4, 1)\}$$

Exercice 12 .

Réolvons dans \mathbb{R}^2 le système suivant : $(S) : \begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = 2 \end{cases}$ avec $m \in \mathbb{R}$.

Calculons le déterminant du système $D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & m \end{vmatrix}$:

$$D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4$$

Réolvons l'équation : $m^2 - 4 = 0$.

$$m^2 - 4 = 0 \iff (m - 2)(m + 2) = 0 \iff m = 2 \text{ ou } m = -2$$

■ Si $m \neq 2$ et $m \neq -2$ alors le système (S) admet une seule solution est le couple (x, y) tel que :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} m+2 & 4 \\ 2 & m \end{vmatrix}}{m^2 - 4} = \frac{m(m+2) - 8}{m^2 - 4} = \frac{m^2 + 2m - 8}{(m-2)(m+2)} = \frac{m+4}{m+2}$$

et

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} m & m+2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{m^2 - 4} = \frac{2m - (m+2)}{m^2 - 4} = \frac{2m - m - 2}{m^2 - 4} = \frac{m-2}{(m+2)(m-2)} = \frac{1}{m+2}$$

d'où l'ensemble des solutions du système (S) est

$$S = \left\{ \left(\frac{m+4}{m+2}, \frac{1}{m+2} \right) \right\}$$

■ Si $m = 2$ alors le système devient $\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ qui est équivalent à $\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$.

Donc le système admet une infinité de solutions ce sont les solutions de l'équation $2x + 4y = 4$. Comme $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Donc

$$S = \left\{ \left(x, -\frac{1}{2}x + 1 \right), x \in \mathbb{R} \right\}$$

■ Si $m = -2$ alors le système devient $\begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ qui est équivalent à $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$.

Donc le système n'admet aucune solution. Donc

$$S = \emptyset$$

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

[www.etude – generale.com](http://www.etude-generale.com)