

	www.coursfacile.com	Cours 2 : Equation -inéquation-système	1BAC ECO Page1
<p><b>I. Résolution d'une équation-inéquation du premier degré</b></p> <p><b>1) Équations du premier degré</b></p> <p>Définition : Soient <math>a</math> et <math>b</math> de <math>\mathbb{R}</math> (avec <math>a \neq 0</math>)</p> <p>Toute équation son écriture se ramène sous la forme <math>x \in \mathbb{R} / ax + b = 0</math> est appelé équation du premier degré à un seul inconnu <math>x</math> de <math>\mathbb{R}</math> et ses coefficients réels <math>a</math> et <math>b</math></p> <p><b>Exercice 01</b></p> <p>Résoudre dans <math>\mathbb{R}</math> les équations suivantes : <math>2x + 3 = -3x + 2</math></p> <p><b>Correction</b></p> $2x + 3 = -3x + 2$ $2x + 3x = 2 - 3$ $5x = -1$ $x = -\frac{1}{5}$ <p>On note : <math>S = \left\{-\frac{1}{5}\right\}</math></p> <p><b>2) Équation-produit</b></p> <p><b>Propriété :</b> Si <math>A \times B = 0</math> alors <math>A = 0</math> ou <math>B = 0</math>.</p> <p><b>Exercice 02</b></p> <p>Résoudre dans <math>\mathbb{R}</math> les équations suivantes :</p> <p>a) <math>(x + 6)(3 - 7x) = 0</math>      b) <math>5x^2 - 4x = 0</math></p> <p><b>Correction</b></p> $(x + 6)(3 - x) = 0$ <p>Soit : <math>x + 6 = 0</math> ou <math>3 - x = 0</math></p> $x = -6 \quad -x = -3$ $x = -6 \quad x = 3$ <p>On note : <math>S = \{-6 ; 3\}</math>.</p>	<p>c) <math>5x^2 - 4x = 0</math></p> $x(5x - 4) = 0$ <p>Soit : <math>x = 0</math> ou <math>5x - 4 = 0</math></p> $5x = 4$ $x = \frac{4}{5}$ <p>L'équation a deux solutions : <math>0</math> et <math>\frac{4}{5}</math>.</p> <p>On note : <math>S = \left\{0 ; \frac{4}{5}\right\}</math>.</p> <p><b>3) Équation de la forme <math>x^2 = a</math></b></p> <p><b>Propriété :</b> Les solutions dans <math>\mathbb{R}</math> de l'équation <math>x^2 = a</math> dépendent du signe de <math>a</math>.</p> <p>Si <math>a &lt; 0</math>, alors l'équation n'a pas de solution.</p> <p>Si <math>a = 0</math>, alors l'équation possède une unique solution qui est <math>0</math>.</p> <p>Si <math>a &gt; 0</math>, alors l'équation possède deux solutions qui sont <math>-\sqrt{a}</math> et <math>\sqrt{a}</math>.</p> <p><b>Exercice 03</b></p> <p>Résoudre dans <math>\mathbb{R}</math> les équations :</p> <p>a) <math>x^2 = 4</math>      b) <math>x^2 = -1</math>      c) <math>(x + 2)^2 = 9</math>.</p> <p><b>Correction</b></p> <p>a) L'équation <math>x^2 = 4</math> possède deux solutions : <math>x = -\sqrt{4} = -2</math> et <math>x = \sqrt{16} = 2</math>.</p> <p>On note : <math>S = \{-2 ; 2\}</math>.</p> <p>b) L'équation <math>x^2 = -1</math> n'a pas de solution dans <math>\mathbb{R}</math> car <math>-1</math> est négatif. Donc <math>S = \emptyset</math>.</p> <p>c) L'équation <math>(x + 2)^2 = 9</math> possède deux solutions :</p> $x + 2 = -\sqrt{9} \quad \text{et} \quad x + 2 = \sqrt{9}$ <p>Soit : <math>x = -3 - 2 = -5</math> et <math>x = 3 - 2 = 1</math></p> <p>L'équation a deux solutions : <math>-5</math> et <math>1</math>.</p> <p>On note : <math>S = \{-5 ; 1\}</math>.</p>		

	www.coursfacile.com	Cours 2 : Equation -inéquation-système	1BAC ECO Page2																											
<p><b>4) Le signe de <math>f(x) = ax + b</math> tel que <math>a \neq 0</math></b></p> <p><b>Propriété :</b></p> <p>Le tableau de signe de <math>f(x) = ax + b</math> tel que <math>a \neq 0</math> et <math>b \in \mathbb{R}</math></p> <table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-\frac{b}{a}</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td><td>Signe de <math>-a</math></td><td>Signe de <math>a</math></td><td></td></tr> </table> <p><b>Exercice 05</b></p> <p>Résoudre dans <math>\mathbb{R}</math> l'inéquation suivante : (I) : <math>(2x + 8)(2 - x) \leq 0</math></p> <p><b>Correction</b></p> <p>(I) : <math>(2x + 8)(2 - x) \leq 0</math></p> <p><math>(2x + 8)(2 - x) = 0</math> donc <math>x = -4</math> ou <math>x = 2</math></p> <table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-4</math></td><td><math>2</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr> <td><math>2x + 8</math></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>+</td></tr> <tr> <td><math>2 - x</math></td><td>+</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td></tr> <tr> <td><math>(2x + 8)(2 - x)</math></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td></tr> </table> <p>Donc : <math>S = ]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[</math></p> <p><b>6) Équation-Inéquations -valeur absolue</b></p> <p><b>Propriété :</b> Soit <math>r</math> un réel positif</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Si <math> x  = r</math> alors <math>x = r</math> ou <math>x = -r</math></li> <li>Si <math> x  =  y </math> alors <math>x = y</math> ou <math>x = -y</math></li> <li><math> x  \leq r</math> ssi <math>-r \leq x \leq r</math> c.à.d : <math>x \in [-r; r]</math>.</li> <li><math> x  \geq r</math> ssi <math>(x \leq -r \text{ ou } x \geq r)</math>, c.à.d : <math>x \in ]-\infty; -r] \cup [r; +\infty[</math>;</li> </ol>	$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$	$f(x)$	Signe de $-a$	Signe de $a$		$x$	$-\infty$	$-4$	$2$	$+\infty$	$2x + 8$	-	0	+	+	$2 - x$	+	0	+	0	$(2x + 8)(2 - x)$	-	0	+	0	<p><b>Exercice 06</b></p> <p><b>1) Résoudre dans <math>\mathbb{R}</math> les équations suivantes :</b> (E<sub>1</sub>) : <math> 2x + 8  = 2</math> ; (E<sub>2</sub>) : <math> 2x - 8  =  3x - 6 </math></p> <p><b>2) Résoudre dans <math>\mathbb{R}</math> les inéquations suivantes :</b> (I<sub>1</sub>) : <math> 2x - 8  &lt; 2</math> ; (I<sub>2</sub>) : <math> -3x + 6  \geq 2</math></p> <p><b>Correction</b></p> <p><math> 2x + 8  = 2</math> donc <math>2x + 8 = 2</math> ou <math>2x + 8 = -2</math></p> <p>c.à.d <math>2x = 2 - 8</math> ou <math>2x = -2 - 8</math></p> <p>c.à.d <math>2x = -6</math> ou <math>2x = -10</math></p> <p>c.à.d <math>x = -\frac{6}{2}</math> ou <math>x = -\frac{10}{2}</math> ssi <math>x = -3</math> ou <math>x = -5</math></p> <p>Donc : <math>S = \{-3; -5\}</math></p> <p>(E<sub>2</sub>) : <math> 2x - 8  =  3x - 6 </math></p> <p><math> 2x - 8  =  3x - 6 </math> si <math>2x - 8 = -3 - 6</math> ou <math>2x - 8 = -(3x - 6)</math></p> <p>ssi <math>2x = -6</math> ou <math>2x = -10</math></p> <p>ssi <math>x = -\frac{6}{2}</math> ou <math>x = -\frac{10}{2}</math> ssi <math>x = -3</math> ou <math>x = -5</math></p> <p>Donc : <math>S = \{-3; -5\}</math></p> <p><b>3) Résoudre dans <math>\mathbb{R}</math> les inéquations suivantes :</b></p> <p><math> 2x - 8  &lt; 2</math> ssi <math>-2 &lt; 2x - 8 &lt; 2</math></p> <p>ssi <math>6 &lt; 2x &lt; 10</math></p> <p>ssi <math>3 &lt; x &lt; 5</math></p> <p>Donc : <math>S = ]3; 5[</math></p> <p><math> -3x + 6  \geq 2</math> donc <math>(-3x + 6 \leq -2 \text{ ou } -3x + 6 \geq 2)</math></p> <p>donc <math>(-3x \leq -8 \text{ ou } -3x \geq -4)</math> donc <math>(3x \geq 8 \text{ ou } 3x \leq 4)</math></p> <p>DONC <math>(x \geq \frac{8}{3} \text{ ou } x \leq \frac{4}{3})</math> c.à.d : <math>x \in [\frac{8}{3}; +\infty[</math> ou <math>x \in ]-\infty; \frac{4}{3}]</math></p> <p>Donc : <math>S = ]-\infty; \frac{4}{3}] \cup [\frac{8}{3}; +\infty[</math></p>	
$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$																											
$f(x)$	Signe de $-a$	Signe de $a$																												
$x$	$-\infty$	$-4$	$2$	$+\infty$																										
$2x + 8$	-	0	+	+																										
$2 - x$	+	0	+	0																										
$(2x + 8)(2 - x)$	-	0	+	0																										

**II. Résolution d'une équation-inéquation du second degré****Définition :**

Une équation du second degré est une équation de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels avec  $a \neq 0$ .

Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme  $ax^2 + bx + c$ .

On appelle discriminant du trinôme  $ax^2 + bx + c$ , le nombre réel, noté  $\Delta$ , égal à  $b^2 - 4ac$ .

**Propriété :**

Soit  $\Delta$  le discriminant du trinôme  $ax^2 + bx + c$ .

➤ Si  $\Delta < 0$  : L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  n'a pas de solution réelle.

➤ Si  $\Delta = 0$  : L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  a une unique solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

➤ Si  $\Delta > 0$  : L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  a deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

**Exercice 07**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $2x^2 - x - 6 = 0$       b)  $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$

c)  $x^2 + 3x + 10 = 0$

**Solution**

a) Calculons le discriminant de l'équation  $2x^2 - x - 6 = 0$  :

$$a = 2, b = -1 \text{ et } c = -6$$

$$\text{Donc } \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49.$$

Comme  $\Delta > 0$ , l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 2$$

Soit  $S$  l'ensemble des solutions de l'équation donc  $S = \left\{ -\frac{3}{2}; 2 \right\}$

b) Calculons le discriminant de l'équation  $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$  :

$$a = 2, b = -3 \text{ et } c = \frac{9}{8}$$

$$\text{Donc } \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0.$$

Comme  $\Delta = 0$ , l'équation possède une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

c) Calculons le discriminant de l'équation  $x^2 + 3x + 10 = 0$  :

$$a = 1, b = 3 \text{ et } c = 10 \text{ donc } \Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31.$$

Comme  $\Delta < 0$ , l'équation ne possède pas de solution réelle.

**Propriété :**

La somme  $S$  et le produit  $P$  des solutions d'une équation du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  sont donnés par :

$$S = -\frac{b}{a} \text{ et } P = \frac{c}{a}.$$

**2). Factorisation d'un trinôme****Propriété :**

Soit  $f$  une fonction polynôme de degré 2 définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

➤ Si  $\Delta = 0$  : Pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x) = a(x - x_0)^2$ .

➤ Si  $\Delta > 0$  : Pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

**Exercice 08**

Factoriser les trinômes suivants :

a)  $4x^2 + 19x - 5$       b)  $9x^2 - 6x + 1$

**Solution**

a) On cherche les racines du trinôme  $4x^2 + 19x - 5$  :

$$\text{Calcul du discriminant : } \Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$$

$$\text{Les racines sont : } x_1 = \frac{-19 - \sqrt{441}}{2 \times 4} = -5 \text{ et } x_2 = \frac{-19 + \sqrt{441}}{2 \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{On a donc : } 4x^2 + 19x - 5 = 4(x - (-5))(x - \frac{1}{4}) = (x + 5)(4x - 1).$$

b) On cherche les racines du trinôme  $9x^2 - 6x + 1$  :

$$\text{Calcul du discriminant : } \Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$$

$$\text{La racine (double) est : } x_0 = -\frac{6}{2 \times 9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{On a donc : } 9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = (3x - 1)^2.$$

**3). Signe d'un trinôme****Propriété :**

Soit  $f$  une fonction polynôme de degré 2 définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Si  $\Delta < 0$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de $a$	

Si  $\Delta = 0$  :

$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de $a$	0	Signe de $a$

Si  $\Delta > 0$  :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de $a$	0	Signe opposé 0	Signe de $a$

**Exercice 11**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation (I) :  $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

**Solution**

➤ Le discriminant de  $x^2 - 4x + 3$  est  $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$  et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} = 3$$

➤ On obtient le tableau de signes de  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  :

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0

➤ On déduit l'ensemble des solutions de (I) :  $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

$$S = ]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[.$$

## Exercice 12

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\frac{1}{x^2 - x - 6} \geq 2$ 

## Solution

 $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$  équivaut à  $x^2 + 4x - 7 < 0$ .Le discriminant de  $x^2 + 4x - 7$  est  $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$  et ses racines sont :

$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 - \sqrt{11}$  et  $x_2 = \frac{-4 + \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 + \sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes de  $f(x) = x^2 + 4x - 7$  :

$x$	$-\infty$	$-2 - \sqrt{11}$	$-2 + \sqrt{11}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0

L'ensemble des solutions de l'inéquation  $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$  est donc  $]-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11}[$ .

Donc  $S = ]-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11}[$

2)  $\frac{1}{x^2 - x - 6} \geq 2$  équivaut à  $\frac{1}{x^2 - x - 6} - 2 \geq 0$ 

Donc  $\frac{1}{x^2 - x - 6} - \frac{2(x^2 - x - 6)}{x^2 - x - 6} \geq 0$  ; Donc  $\frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6} \geq 0$

On commence par déterminer les racines du trinôme  $x^2 - x - 6$ :Le discriminant est  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$  et ses racines sont :

$x_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -2$  et  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 3$

Les valeurs -2 et 3 annulent le dénominateur.

On résout donc l'équation dans  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$ .On détermine les racines du trinôme  $-2x^2 + 2x + 13$ :Le discriminant est  $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$  et ses racines sont

$x_1' = \frac{-2 - \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}$  et  $x_2' = \frac{-2 + \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}$

- On obtient le tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$	-2	3	$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$-2x^2 + 2x + 13$	-	0	+	+	+	0
$x^2 - x - 6$	+		0	-	0	+
$-2x^2 + 2x + 13$	-	0	+	-	+	0
$x^2 - x - 6$	-	0	-	-	+	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation  $\frac{1}{x^2 - x - 6} \geq 2$  est :

$S = \left[ \frac{1-3\sqrt{3}}{2}; -2 \right] \cup \left[ 3; \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \right]$

III) Equations et inéquations de 1<sup>ère</sup> degré à deux inconnues :

## Activité :

1) Considérons l'équation : (E) :  $(x; y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x + 5y = 10$ a) Vérifier que le couple  $(0; 2)$  est solution de l'équation (E)b) Est-ce que le couple  $(2; 0)$  est solution de l'équation (E)c) Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  l'équation (E)1) Considérons dans le plan (D) l'ensemble des point  $M(x; y)$  tel que  $2x + 5y = 10$ 

Tracer l'ensemble (D) dans un repère orthonormé

Noté sur la figure le demi plan ( $P_1$ ) de bord la droite (D) qui contient le point  $O(0; 0)$  et l'autre demi plan sera noté ( $P_2$ )2) Considérons l'inéquation : (I) :  $(x; y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x + 5y \leq 10$ a) Prendre plusieurs points quelconque de ( $P_1$ ) puis vérifier si leurs coordonnées  $(x; y)$  vérifie l'inéquation : (I)b) Prendre plusieurs points quelconque de ( $P_2$ ) puis vérifier si leurs coordonnées  $(x; y)$  vérifie l'inéquation : (I)

c) Résoudre graphiquement l'inéquation (I)

## Solution :

1) Considérons l'équation : (E) :  $(x; y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x + 5y = 10$ a) Pour  $x=0$  et  $y=2$  l'équation est vérifiée donc le couple  $(0; 2)$  est solution de l'équationb) Par exemple le couple  $(2; 0)$  n'est pas une solution de (E)c) Pour trouver tous les couples qui vérifie (E) on cherche  $x$  en fonction de  $y$  ou bien  $y$  en fonction de  $x$ Donc le couple  $(x; y)$  est solution de (E) revient à dire que

$x = \frac{10 - 5y}{2}$  et  $y \in \mathbb{R}$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est  $S = \left\{ \left( \frac{10 - 5y}{2}; y \right); y \in \mathbb{R} \right\}$ 

2) Considérons dans le plan l'ensemble des

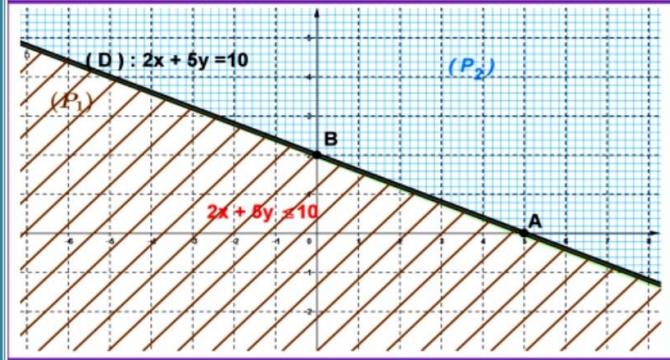
point  $M(x; y)$  tel que  $2x + 5y = 10$ 

Donc l'ensemble est la droite (D) d'équation cartésienne

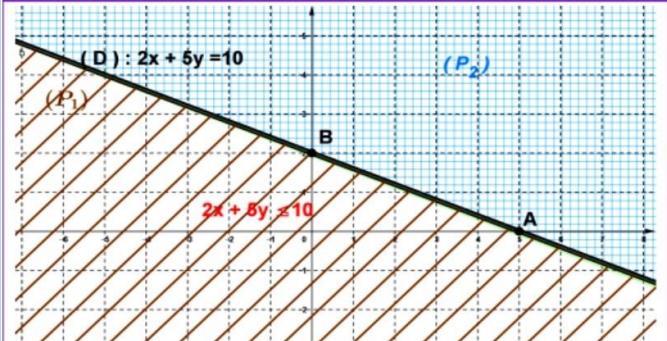
$2x + 5y = 10$

Pour tracer la droite (D) on cherche deux points A et B de (D)

Par exemple A(5; 0) et B(0; 2) appartiennent à (D)

Noté sur la figure le demi plan ( $P_1$ ) de bord la droite (D) qui contient le point  $O(0; 0)$  et l'autre demi plan sera noté ( $P_2$ )3) Considérons l'inéquation : (I) :  $(x; y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x + 5y \leq 10$ a) Prendre plusieurs points quelconque de ( $P_1$ ) puis vérifier si leurs coordonnées  $(x; y)$  vérifie l'inéquation : (I)Par exemple les points O; A; B et C(1; 1) ..... de demi plan ( $P_1$ ) leurs coordonnées vérifie l'inéquation : (I)b) Prendre plusieurs points quelconque de ( $P_2$ ) puis vérifier si leurs coordonnées  $(x; y)$  vérifie l'inéquation : (I)Par exemple les points D(0; 3); E(3; 3) et F(4; 10) ..... de demi plan ( $P_2$ ) leurs coordonnées ne vérifie pas l'inéquation : (I)

c) Résoudre graphiquement l'inéquation (I)

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est le demi plan ( $P_1$ ) fermé c'est-à-dire qui contient la droite (D) (Voir la figure)

## Exercice 08

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  l'équation :  $x + 2y + 1 = 0$ 2) Tracer la droite  $(D) : x + 2y + 1 = 0$  dans un repère orthonormé3) Résoudre graphiquement l'inéquation :  $x + 2y + 1 \leq 0$

## IV) Système de deux équations de premier degré à deux inconnues

## 1) Méthode de substitution

## Exercice 13

Résoudre le système d'équations par la méthode de substitution

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$$

Solution

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

On isole facilement l'inconnue  $x$  dans la 2<sup>e</sup> équation.

$$\begin{cases} 3(14 + 4y) + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

On remplace  $x$  par  $14 + 4y$  dans la 1<sup>re</sup> équation (substitution).

$$\begin{cases} 42 + 12y + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14y = -42 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{42}{14} = -3 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 14 + 4 \times (-3) \end{cases}$$

On remplace  $y$  par  $-3$  dans la 2<sup>e</sup> équation.

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

La solution du système est le couple  $(2 ; -3)$  et on note :

$$S = \{(2 ; -3)\}$$

## 2) Méthode des combinaisons linéaires

## Exercice 14

Résoudre les systèmes d'équations par la méthode des combinaisons linéaires :  $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$ 

Solution

$$\bullet \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases} \quad \times 2 \quad \text{On multiplie la 1<sup>re</sup> équation par 2...}$$

$$\begin{cases} 6x - 4y = 22 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$

... pour obtenir le même coefficient devant une des inconnues.

$$\begin{cases} 6x - 4y = 22 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$

$$6x - 6x - 4y - 3y = 22 - 15$$

$$-4y = 22 - 15$$

$$-7y = 7$$

$$y = -1$$

On remplace  $y$  par  $-1$  dans une des deux équations (au choix).Par exemple dans  $3x - 2y = 11$ 

$$3x - 2 \times (-1) = 11$$

$$3x + 2 = 11$$

$$3x = 11 - 2$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

La solution du système est le couple  $(3 ; -1)$  et on note :

$$S = \{(3 ; -1)\}$$

## 3) Méthode de GRAMER

## Définition et théorème :

Soient  $a ; b ; c ; a' ; b' ; c'$  des nombres réelsOn considère le système  $(S)$  :  $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$  :  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ Le nombre  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$  est appelé le déterminant du système  $(S)$ Le nombre  $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$  est appelé le déterminant pour déterminer  $x$ Le nombre  $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$  est appelé le déterminant pour déterminer  $y$ ➤ Si  $\Delta \neq 0$  alors le système est appelé système de GRAMERLe système admet une unique solution c'est le couple  $(\frac{\Delta_x}{\Delta} ; \frac{\Delta_y}{\Delta})$ Donc l'ensemble des solutions de  $(S)$  est

$$S = \left\{ \left( \frac{\Delta_x}{\Delta} ; \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \right\}$$

➤ Si  $\Delta = 0$ Cas 01 : Si  $\Delta_x \neq 0$  ou  $\Delta_y \neq 0$ 

Le système n'admet pas des solutions

Donc l'ensemble des solutions de  $(S)$  est  $S = \emptyset$ Cas 02 : Si  $\Delta_x = 0$  et  $\Delta_y = 0$ 

Le système se ramène à une seule équation

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ équivaut à } ax + by = c$$

Donc c'est une équation à deux inconnus qui a une infinité des solutions ; d'où l'ensemble des solutions de  $(S)$  est :

$$S = \{(x ; y) : x = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a} \text{ si } a \neq 0 \text{ ou } S = \{(x ; y) : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \text{ si } b \neq 0\}$$

## Exercice 15

Résoudre les systèmes par la méthode des déterminants :

$$(S_1) : \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 4y = 1 \end{cases} \quad (S_3) : \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = -2 \end{cases}$$

Solution

$$(S_1) : \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 12 = 21$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} = 33 + 30 = 63$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 45 - 66 = -21$$

On a  $\Delta \neq 0$  donc  $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{63}{21} = 3$  et  $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-21}{21} = -1$ Donc l'ensemble des solutions de  $(S)$  est  $S = \{(3 ; -1)\}$ 

$$(S_2) : \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

On a  $\Delta = 0$  et  $\Delta_x \neq 0$ Donc l'ensemble des solutions de  $(S)$  est  $S = \emptyset$ 

$$(S_3) : \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = -2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

Donc  $\Delta = 0$  et  $\Delta_x = 0$  et  $\Delta_y = 0$ , donc le système est équivalent à l'équation  $3x - 2y = 1$  donc  $x = \frac{1+2y}{3}$ , donc  $S = \{(x ; y) : x = \frac{1+2y}{3}\}$