Exercice 1

Montrer que les propositions suivantes sont vraies puis déterminer leurs négations :

$P_1 : (\exists x \in \mathbb{R}) : 3x + 6 = 0$;

$P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 3x + 2 = 0$;

$P_3 : (\forall x \in [1;6]) : x^2 - 7x + 6 \leq 0$

$P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2x + 3 > 0$;

Exercice 2 : (Contre-exemple)

1) Montrer que les propositions sont fausses

P_1 : « $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\sqrt{x^2} = x$ »

P_2 : « $(\forall x \in \mathbb{R})$: $x^2 \geq x$ »

2) Donner la négation de la proposition (R).

(R): $(\forall x \in \mathbb{R})$: $[\, x^2 = 2x \Rightarrow x = 0]$

3) En déduire que la proposition R est fausse.

Exercice 3 : (Contre-exemple)

f une fct définit sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2) Donner la négation de la proposition (P)
   (P): $\left(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\right)$: " $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
3) Déduire que (P) est fausse
4) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$ puis en déduire que la fonction f ni paire ni impaire

Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$; considérons la proposition (P) :

$(x^2 = 4x) \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 4)$.

1) Montrer que la proposition (P) est vraie
2) Déterminer l'implication contraposée de P

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : 1) $f(x) = x^4 - 5x - 2$

2) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4}$; 3) $f(x) = \sqrt{6 - 2x}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$; 5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

Exercice 6 :(Résonnement déductif ; direct)

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$; Montrer que :
   $(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow (x = y)$
2) Soient $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$; Montrer que :
   $(1 + xy - x - y = 0) \Rightarrow (y = 1 \text{ ou } x = 1)$
3) Montrer que : Si m et n sont deux entiers naturels impairs alors $m + n$ est pair

Exercice 7 : (Equivalence)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$; Montrer que $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$
2) Soient x *et* y deux réels positifs .
   Montrer que :
   $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$
3) Soient a *et* b deux réels positifs Montrer que : $(a + b = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$
4) x et y deux réels positifs. Montrer que :
   $\left(x + y + 13 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y}\right) \Leftrightarrow (x = 4 \text{ et } y = 9)$

Exercice 8 : (Disjonction des cas) :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier $n^2 + n + 1$ est impair

Utiliser les cas $(n = 2k)$ *et* $(n = 2k + 1)$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Utiliser les cas $n = 3k; n = 3k + 1; n = 3k + 2$

3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

Utiliser les deux cas : $(x < 0)$ *et* $(x \geq 0)$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1): $x^2 - |x - 1| - 1 = 0$

Utiliser les deux cas : $(x < 1)$ *et* $(x \geq 1)$

(E_2) : $|x + 1| - 3|x - 2| + 1 = 0$

Exercice 9 :(Raisonnement par contra-posée)

1) Soient $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^+$; montrer que :
   a) $(y \neq 2 \text{ et } y \neq -2) \Rightarrow (2y^2 - 8 \neq 0)$
   b) $(x \neq 0) \Rightarrow (\sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2})$
2) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que
   si $(n^2 \text{ est pair})$ alors $(n \text{ est pair})$
3) Soient $x; y \in]2; +\infty[$, montrer que
   $(x \neq y) \Rightarrow \left(x^2 - 4x \neq y^2 - 4y\right)$

Exercice 10 : (Raisonnement par L'absurde)

1) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}\right)$: $\frac{4x+1}{3x-2} \neq \frac{4}{3}$
2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{6n+5}{4n+2} \notin \mathbb{N}$
3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$

Exercice 11 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$

1) Calculer S_1 ; S_2 et S_3
2) Montrer par récurrence que ;
   $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$
3) En déduire que $n(n + 1)$ est pair
4) Calculer S_{100}

Exercice 12 : Montrer par récurrence que ;

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: « $7^n - 2^n$ est divisible par 5 »
2) $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 + 4 + 4^2 + \cdots\cdots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$
3) $\forall n \in \mathbb{N}$: $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
4) $(\forall n \in \mathbb{N})$: $2^n \geq n$

Exercice 13 :

1) Développer le produit : $(n + 2)(2n + 3)$
2) Montrer par récurrence que ;
   $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$