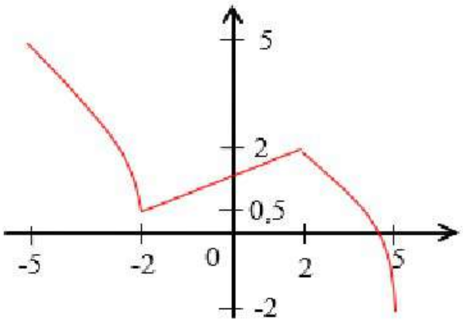
Exemple3 : Determiner le **tableau de variation** la fonction f définie par la representation suivante :



Solution :

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	$\searrow$	$0,5$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

2) Le taux d'accroissement d'une fonction

a)Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tq $x_1 \neq x_2$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Le réel noté $T(x_1;x_2)$ est tq : $T(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

• On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_{\acute{e}} \in I$ et $x_1 \neq x_2$

on a $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \succ 0$ $\left(\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0\right)$

• On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_{\acute{e}} \in I$ et $x_1 \neq x_2$

on a $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \prec 0$ $\left(\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0\right)$

• On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_{\acute{e}} \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=0$

Exemple1 : Soit f une fonction tq : $f(x)=3x+2$

Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$

1) Déterminer le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

2) En déduire les variations de f

3) Dresser le tableau de variation de g

Solution :1) f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(3x_1+2)-(3x_2+2)}{x_1-x_2}$$

$T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{3x_1+2-3x_2-2}{x_1-x_2}=\dfrac{3\left(x_1-x_2\right)}{x_1-x_2}$

2) On a : $T\left(x_1;x_2\right)=3\succ 0$

D'où : f que est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3) Le tableau de variation de f

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

Exemple2 : Soit f une fonction tq : $g\left(x\right)=-2x+1$

Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\neq x_2$

1) Déterminer le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction gentre x_1 et x_2

2) En déduire les variations de g

3) Dresser le tableau de variation de g

Solution :1) g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction g entre x_1 et x_2

Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\neq x_2$

$T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\dfrac{\left(-2x_1+1\right)-\left(-2x_2+1\right)}{x_1-x_2}$

$T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{-2x_1+1+2x_2-1}{x_1-x_2}=\dfrac{-2\left(x_1-x_2\right)}{x_1-x_2}$

2) On a : $T\left(x_1;x_2\right)=-2\prec 0$

D'où : g que est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$\searrow$

Exemple2 : Soit f une fonction tq : $f\left(x\right)=3x^2+2$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\neq x_2$ on a : $T\left(x_1;x_2\right)=3\left(x_1+x_2\right)$

a)Soit $x_1\in\left[0;+\infty\right[$ et $x_2\in\left[0;+\infty\right[$

Donc $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$ Donc $x_1+x_2\geq 0$ Donc $3\left(x_1+x_2\right)\geq 0$ car $3\succ 0$

Donc $T\left(x_1;x_2\right)=3\left(x_1+x_2\right)\geq 0$

D'où f que est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$

b) Soient $x_1\in\left]-\infty;0\right]$ et $x_2\in\left]-\infty;0\right]$

Donc $x_1\leq 0$ et $x_2\leq 0$ Donc $x_1+x_2\leq 0$ Donc $3\left(x_1+x_2\right)\leq 0$ car $3\succ 0$

Donc $T\left(x_1;x_2\right)=3\left(x_1+x_2\right)\leq 0$

D'où f que est décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$

b) <u>résumé</u> : **tableau de variation :** $f\left(0\right)=3\times 0^2+2=2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

c) les variations et la parité :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

Si f est paire alors :

- f est croissante sur I ssi f est décroissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

- f est croissante sur I ssi f est croissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est décroissante sur I'

Exemple: Soit f une fonction tel que : $f(x) = 3x^2$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f

2) Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1;x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f tq $x_1 \neq x_2$

3) Étudier les variations de f sur $I = [0;+\infty[$

4) En déduire les variations de f sur D_f

5) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$

2) soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2) - (3x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

3) On a : $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2)$

$x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ Donc $x_1 + x_2 \geq 0$ Donc $3(x_1 + x_2) \geq 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2) \geq 0$

D'où f que est croissante sur $[0;+\infty[$

4) on a : f est paire et le symétrique de $I = [0;+\infty[$ est l'intervalle $J =]-\infty;0]$ et f que est croissante sur $[0;+\infty[$ D'où f que est décroissante sur $]-\infty;0]$

5) le tableau de variations de f sur D_f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 2 \times 0^2 = 0$

V) Les extremums d'une fonction numérique

Propriétés : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I = [a;b]$ (a et b dans $\mathbb{R}$) et soit $c \in I$

➢Si f est croissante sur $[a;c]$ et décroissante sur $[c;b]$ alors $f(c)$ est une valeur maximale de f sur I

➢Si f est décroissante sur $[a;c]$ et croissante sur $[c;b]$ alors $f(c)$ est une valeur minimale de f sur I

x	a	c	b
$f(x)$		$f(c)$	
	$\nearrow$		$\searrow$

x	a	c	b
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		$f(c)$	

Exemple: Du tableau de variation

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	$\searrow$	0,5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

Déduire les extrémums de f

Solution : Du tableau de variation on a :

Le nombre 2 est une valeur maximale de f au point $x_0 = 2$

Le nombre 0.5 est une valeur Minimale de f au point $x_0 = -2$

VI) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2$

1iér cas : si $a \succ 0$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2iér cas : si $a \prec 0$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

Prof/ATMANI NAJIB

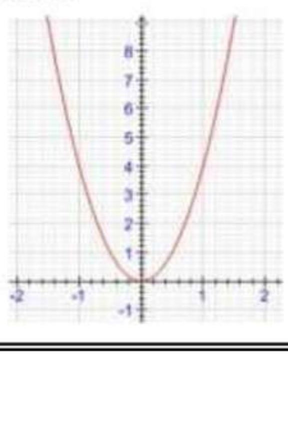
4° Représentation graphique

Définition : dans un Repére orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction

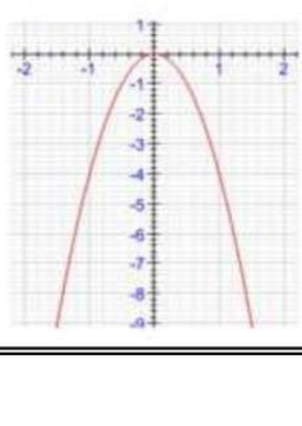
$x \xrightarrow{f} ax^2$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une parabole dont les éléments caractéristiques sont son sommet qui est l'origine du repére et son axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées

Si a > 0



Si a < 0



Exemple1: Soit f une fonction tq : $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^{2}$

1) Déterminer D_f

2) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

3) Déterminer les extremums de la fonction f

4) Tracer la courbe représentative de la fonction fdans un Repére orthonormé $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$

Solution : 1) $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^{2}$ $D_f=\mathbb{R}$

2) On a $a=\frac{1}{2}\succ 0$

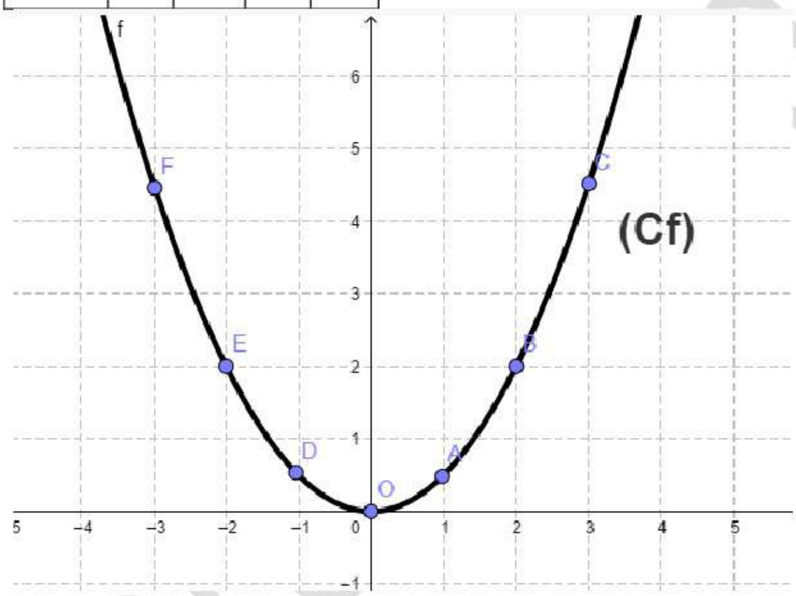
Donc : Tableau de variations de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

3) $f\left(0\right)=2\times 0^2=0$ est une valeur minimale de f

4) Représentation graphique :

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$



Exemple2: Soit f une fonction tq : $f\left(x\right)=-\frac{3}{2}x^{2}$

1) Déterminer D_f

2) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

3) Déterminer les extremums de la fonction f

4) Tracer la courbe représentative de la fonction fdans un Repére orthonormé $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$

Solution : 1) $f\left(x\right)=-\frac{3}{2}x^{2}$ $D_f=\mathbb{R}$

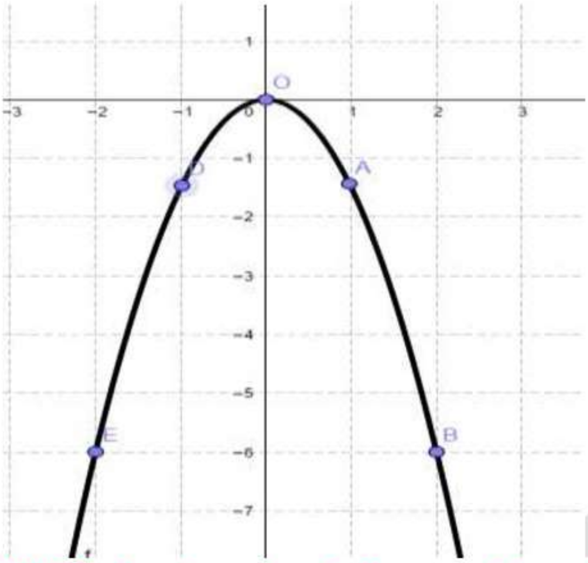
2) On a $a=-\frac{3}{2}\prec 0$ donc : Tableau de variations de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↗	0	↘ $+\infty$

3) $f\left(0\right)=-\dfrac{3}{2}\times 0^2=0$ est une valeur Maximale de f

4) Représentation graphique :

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$-\frac{3}{2}$	-6	$-\frac{27}{2}$



VII) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2+bx+c$

Propriétés : 1° Soit f une fonction numérique tq : $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$

Avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$

1° On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

Avec $\Delta=b^2-4ac$ et On pose $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a}$

la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W\left(\alpha;\beta\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$

2° <u>Les variations de f</u>

<u>Si</u> $a\succ 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗

<u>Si</u> $a\prec 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘

Exemple1 : Soit f une fonction tq : $f\left(x\right)=2x^2+4x-2$

1) Déterminer D_f

2) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

3) Déterminer les extremums de la fonction f

4) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un Repére orthonormé $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$

On peut utiliser le tableau <u>des valeurs suivant qu'il faut remplire</u>

x	-4	-3	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
f(x)							

Solution : 1) $f(x) = 2x^2 + 4x - 2$

On a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2) On a $a = 2$ et $b = 4$ et $c = -2$ $\left(f(x) = ax^2 + bx + c\right)$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times (-2) \times 2 = 16 + 16 = 32$

Donc $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{2 \times 2} = 1$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{32}{4 \times 2} = -4$

$\left(f(1) = 2 - 4 - 2 = -4\right)$

<u>Tableau de variations de f</u>

On a $a = 2 \succ 0$ donc :

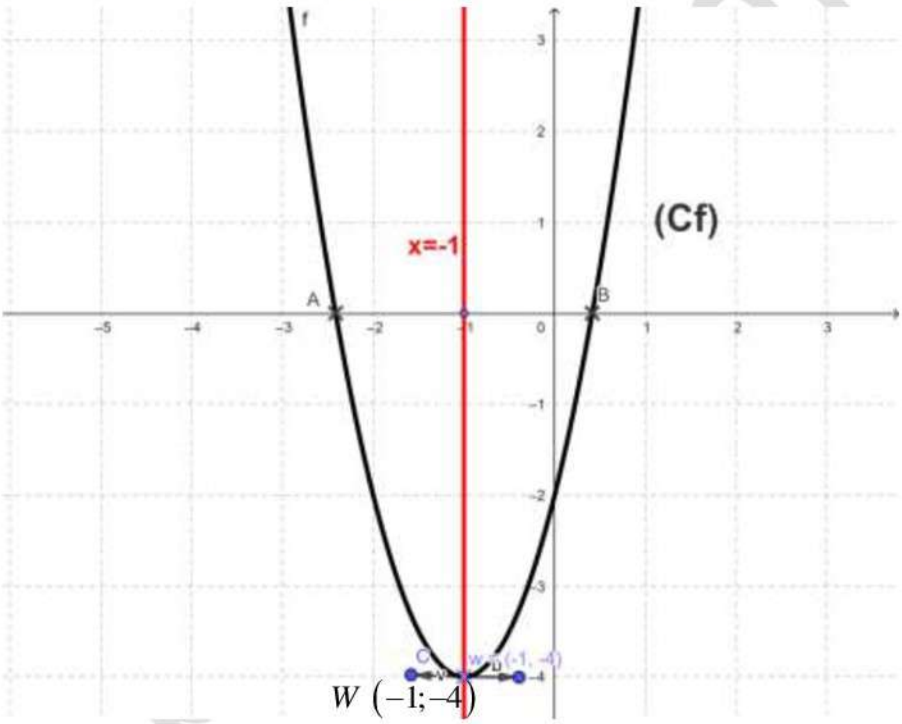
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

3) $f(1) = -4$ est une valeur minimale de f

4) la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-1;-4)$ et d'axe de symétrie la droite $x = -1$

x	-4	-3	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
f(x)	14	4	-2	-4	-2	4	14

Prof/ATMANI NAJIB



Exemple2 : Soit f une fonction tq : $g(x) = -x^2 - 2x + 1$

1) Déterminer D_g

2) Dresser le tableau de variations de f sur D_g

3) Déterminer les extremums de la fonctiong

4) Tracer la courbe représentative de la fonction gdans un Repére orthonormé $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$

On peut utiliser le tableau <u>des valeurs suivant qu'il faut remplire</u>

x	-3	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
f(x)						

Solution : 1) On a g est une fonction polynôme donc $D_g = \mathbb{R}$

2)On a $a=-1$ et $b=-2$ et $c=1\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\Delta = b^2-4ac = 4-4\times(-1)\times 1 = 4+4 = 8$

Donc $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\times(-1)} = -1$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{8}{-4} = 2$

$\left(g(-1) = -(-1)^2 - 2\times(-1)+1 = -1+2+1 = 2\right)$

la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W(-1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-1$

<u>Tableau de variations de g</u>

On a $a=-1\prec 0$ donc :

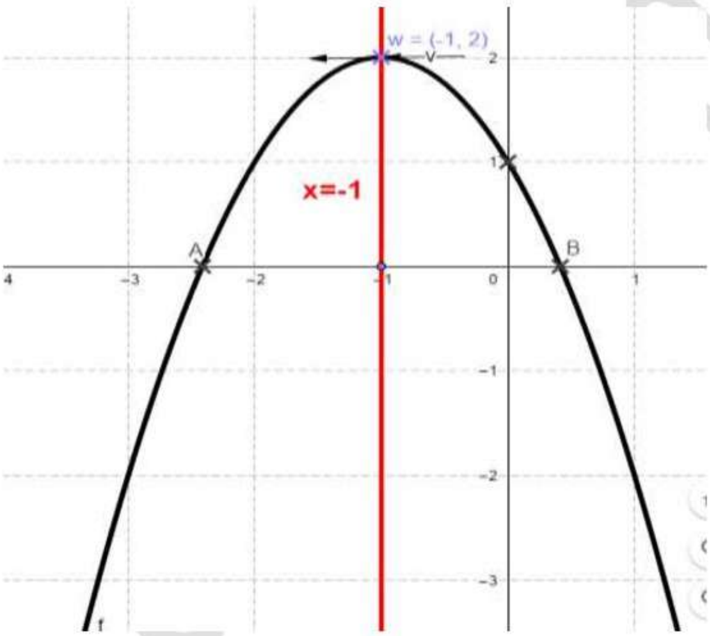
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	↗	2	↘

3) $f(-1)=2$ est une valeur maximal de g

4) la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W(-1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-1$

Le tableau <u>des valeurs est :</u>

x	-3	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
gx)	-2	1	2	1	-2	1



VIII) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x} \left(a \in \mathbb{R}^*\right)$

Résumé : $f(x) = \frac{a}{x} \left(a \in \mathbb{R}^*\right)$

a) 1iér cas : si $a \succ 0$

<u>Tableau de variations de f si</u> $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

2iér cas : si $a \prec 0$

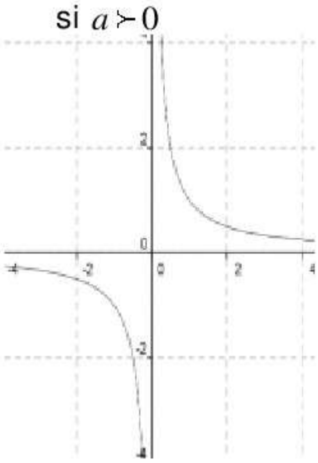
Tableau de variations de f si $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

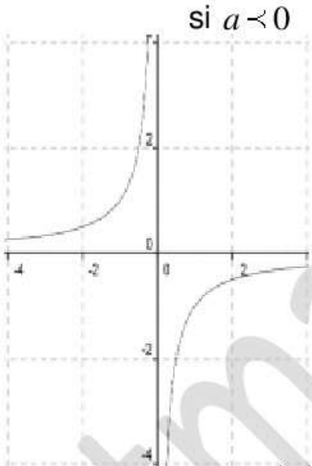
Définition : dans un Repére orthonormé $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe représentative de la fonction $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ dont les éléments caractéristiques sont : son centre de symétrie qui est l'origine du repére et Ses deux asymptotes qui sont l'axe des abscisses et l'axe
des ordonnées

Représentation graphique

si $a \succ 0$



si $a \prec 0$



Exemple1 : Soient la fonction f définie par : $f\left(x\right) = \frac{2}{x}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier La parité de la fonction f

3)a)Montrer que f est strictement décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$

b) Montrer que f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$

4) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

5) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un Repére orthonormé $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$

Solution : 1)$f\left(x\right) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

2)La parité de la fonction :

- Pour tout réel *x*, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$f\left(-x\right) = \frac{2}{-x} = -\frac{2}{x}$ Donc f est une fonction impaire

$f\left(-x\right) = -f\left(x\right)$

3)a) Soit $x_1 \in \left[0;+\infty\right[$ et $x_2 \in \left[0;+\infty\right[$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f\left(x_1\right) \succ f\left(x_2\right)$ d'où f que est strictement décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$

3)b) Soit $x_1 \in \left]-\infty;0\right]$ et $x_2 \in \left]-\infty;0\right]$ tels que : $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

4) tableau de variation :

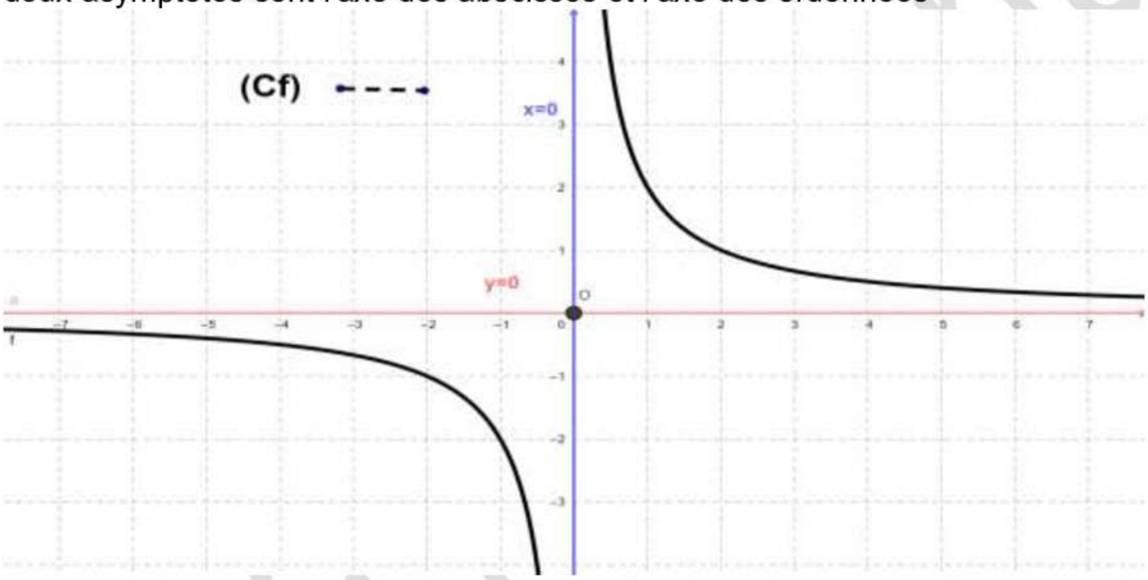
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

5) la courbe représentative de la fonction

Tableau des valeurs :

x	0	1	2	3
$f(x)$		2	1	$\frac{2}{3}$

Dans un Repére orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f est une hyperbole dont les éléments caractéristiques sont : son centre de symétrie qui est l'origine du repére et Ses deux asymptotes sont l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées



Exemple2 : Soit f une fonction tq : $g(x) = \frac{-3}{x}$

1) Déterminer D_g

2) Etudier La parité de la fonction f

3)a)Montrer que g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty;0]$

4) Dresser le tableau de variations de g sur D_g

5) Tracer la courbe représentative de la fonction g dans un Repére orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$

Solution : 1) On a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

Donc $D_g = \mathbb{R}^*$

<u>2)La parité de la fonction g</u> :

- Pour tout réel *x*, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

- $g(-x) = \frac{-3}{-x} = -\frac{-3}{x}$ Donc g est une fonction impaire,

$g(-x) = -g(x)$

3) a)Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{-3}{x_1} \prec \frac{-3}{x_2}$ car $-3 \prec 0$

Alors $g(x_1) \prec g(x_2)$ d'où g que est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{-3}{x_1} \prec \frac{-3}{x_2}$ car $-3 \prec 0$

Alors $g(x_1) \prec g(x_2)$ d'où g que est strictement croissante sur $]-\infty;0]$

4) Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

5) Représentation graphique

Dans un Repére orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction g est une hyperbole dont les éléments caractéristiques sont : son centre de symétrie qui est l'origine du repére et Ses deux asymptotes qui sont l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

Tableau des valeurs :

x	0	1	2	3
$g(x)$		-3	$-\frac{3}{2}$	-1

$g(x) = \frac{-3}{x}$