Leçon5 : Géométrie analytique: Partie2

La doite dans le plan

Présentation globale

1) Equations de droites particulières (axes du repère, droites parallèles à l'un des deus axes)
2) Equation cartésienne d'une droite ;
3) L'équation réduite d'une droite ;
4) Intersection de deux droites ;
5) Parallélisme et orthogonalité de deux droites ;
6) Régioonnement du plan par une droite : la résolution graphique d'inéquations du premier Degré à deux inconnues, la résolution graphique des systèmes de deux inéquations du premier Degré à deux inconnues ; la programmation linéaire

Capacités attendues

- Déterminer et représenter une droite définie par deux points ou par un point et le coefficient directeur ;
- Résoudre graphiquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnue
- Exprimer et reconnaitre le parallélisme et l'orthogonalité de deux droites ;
- Représenter graphiquement la solution d'un système de deux inéquations du premier degré à deux inconnues ; utiliser cette représentation graphique pour le régionnement du plan et dans des problèmes de programmation linéaire.

Recommandations pédagogiques

On fixera et on complètera les acquis des élèves surtout ceux qui seront utiles pour L'interprétation de quelques notions en statistique, en analyse et dans la résolution d'équations, d'inéquations et des systèmes.

I) Equations de droites particulières

Le plan est rapporté au Repère $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

Toute droite est caractérisée par une relation algébrique entre l'abscisse et l'ordonnée de ses points c'est l'équation cartésienne de la droite, du nom du mathématicien Descartes

1) droite non parallèle aux axes des coordonnées

Propriété et définitions : 1) Toute droite (D) non parallèle aux axes des coordonnées admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$

avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$ ou $b\neq 0$

2) Toute droite (D) non parallèle aux axes des coordonnées admet une équation cartésienne de la forme: y = mx + p : et s'appelle la **forme reduite**

- Le nombre *m s'appelle* le coefficient directeur de la droite
- Le nombre *p s'appelle* l'ordonnée a l'origine

3) Si $A\left(x_A,y_A\right)$ et $B\left(x_B,y_B\right)$ avec : $x_A\neq x_B$ et $y_A\neq y_B$

Alors L'équation de la Droite (AB) est : $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}:(AB)$

Exemple1 : Soit (D) la droite d'équation cartésienne : *4x + 2 y + 3 = 0*

- Son équation réduite est de la forme : y = -2x-3
- ***-2** est* le coefficient directeur de la droite (D)

Exemple 2: Soient A (1 ; 3) et B(2 ; 5)
1) Donner une équation cartésienne de la droite (AB).
2) Donner la forme reduite de l'équation de la droite (AB).

Réponse : 1)On a : $(AB)\ \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$

Signifie que : $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-3}{5-3}$ Signifie que : $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}$

Signifie que : $2(x-1)=1(y-3)$

Signifie que : $2x-2-y+3=0$

Signifie que : $(AB)\ 2x-y+1=0$

2) $2x-y+1=0$ Signifie que : $2x+1=y$

Donc : $(AB)\ y=2x+1$ (la forme reduite) $m=2$ est le coefficient directeur de la droite (AB)

Exercice1: Soient A(1 ; 2) et B(3 ; 7)

1) Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

2) Donner la forme reduite de l'équation de la droite (AB).

Réponse : 1) On a : $(AB)\ \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$ Signifie que :

Signifie que : $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{7-2}$ Signifie que : $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{5}$

Signifie que : $5(x-1)=2(y-3)$

Signifie que : $5x-5-2y+6=0$

Signifie que : $(AB)\ 5x-2y+1=0$

2) $5x-2y+1=0$ Signifie que : $5x+1=2y$

Signifie que : $y=\frac{5x+1}{2}$ Signifie que : $y=\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$

Donc : $(AB)\ y=\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$ (la forme reduite)

$m=\frac{5}{2}$ est le coefficient directeur de la droite (AB)

Exercice2: Soients $A(1,-1)$ et $B(3,1)$ et $C(5,-2)$

Donner une équation cartésienne des droites (AB) et (BC) et (AC)

et En déduire les coefficients directeurs des droites (AB) et (BC) et (AC)

Réponse : 1) L'équation cartésienne de (AB)

a)On a : $(AB)\ \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$

Signifie que : $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-(-1)}{1-(-1)}$ Signifie que : $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}$

Signifie que : $2(x-1)=2(y+1)$

Signifie que : $2x-2-2y-2=0$

Signifie que : $(AB)\ 2x-2-2y-2=0$ donc : $(AB)\ 2x-2y-4=0$

b) $2x-2y-4=0$ Signifie que : $2x-4=2y$

Signifie que : $y=\frac{2x-4}{2}$ Signifie que : $y=x-2$

Donc : (AB) ; $y=x-2$ (la forme reduite) $m=1$ est le coefficient directeur de la droite (AB)

2) L'équation cartésienne de (BC)

a)On a : $(BC)\ \frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B}$

Signifie que : $\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-1}{-2-1}$ Signifie que : $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-3}$

Signifie que : $-3(x-3)=2(y-1)$

Signifie que : $-3x-2y+11=0$

Donc : (BC) $3x+2y-11=0$

b) $3x+2y-11=0$ Signifie que : $2y=-3x+11$

Signifie que : $y=\frac{-3x+11}{2}$ Signifie que : $y=\frac{-3}{2}x+\frac{11}{2}$

Donc : (BC) ; $y=\frac{-3}{2}x+\frac{11}{2}$ (la forme reduite)

$m=\frac{-3}{2}$ est le coefficient directeur de la droite (BC)

3) L'équation cartésienne de (AC)

a)On a : (AC) $\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A}$

Signifie que : $\frac{x-1}{5-1}=\frac{y-(-1)}{-2-(-1)}$ Signifie que : $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-1}$

Signifie que : $-(x-1)=4(y+1)$

Signifie que : $-x+1-4y-4=0$

Donc : (AC) $-x-4y-3=0$

Donc : (AC) $x+4y+3=0$

b) $x+4y+3=0$ Signifie que : $4y=-x-3$

Signifie que : $y=\frac{-x-3}{4}$ Signifie que : $y=\frac{-1}{4}x-\frac{3}{4}$

Donc : (AC) ; $y=\frac{-1}{4}x-\frac{3}{4}$ (la forme reduite)

$m=\frac{-1}{4}$ est le coefficient directeur de la droite (AC)

Exercice3: Soit la droite (D) d'équation cartésienne : $(D)-2x+y-1=0$ et les points : $A(1,3)$ et $B(2,5)$ et $C(3,6)$

1) donner l'équation reduite.la droite (D)
2) Donner le coefficient directeur de la droite (D)
3) Les point A et B et C appartient-ils à la droite(D) ?
4) Tracer la droite (D)

Solution :1) $(D)-2x+y-1=0$ Signifie que : $(D)\,y=2x+1$

2) le coefficient directeur de la droite (D) est : $m=2$

3) a) $A(1,3)$? Dire que $A\in(D)$ revient à dire que les coordonnées de A vérifient l'équation de (D).

C'est-à-dire : $(D)\,y_A=2x_A+1$

On a : $2x_A+1=2\times1+1=3$ donc : $A(1,3)\in(D)$

b) $B(2,5)$ Dire que $B\in(D)$ revient à dire que les coordonnées de B vérifient l'équation de (D).

C'est-à-dire : $(D)\,y_B=2x_B+1$

On a : $2x_B+1=2\times2+1=5$ donc : $B(2,5)\in(D)$

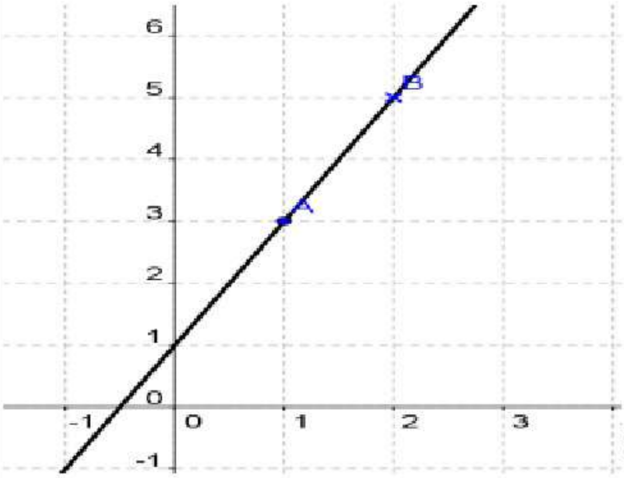
b) $C(3,6)$ Dire que $C \in (D)$ revient à dire que les coordonnées de C vérifient l'équation de (D).

C'est-à-dire : $(D)\ y_C = 2x_C + 1$

On a : $2x_C + 1 = 2\times3+1 = 7 \neq 6$ donc : $C(3,6) \notin (D)$

4) Tracer la droite (D)

Puisque : $A(1,3) \in (D)$ et $B(2,5) \in (D)$

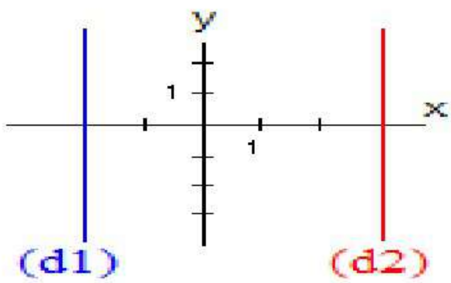


3

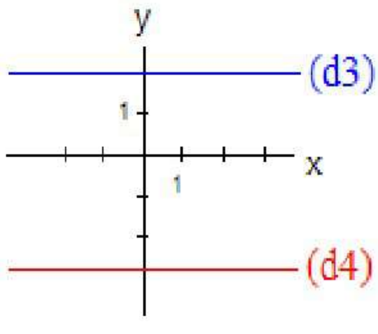
Remarque : si $A(x_A; y_A)$ **;** $B(x_B; y_B)$ et $x_A \neq x_B$ alors $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est coefficient directeur de la droite (AB)

2) droite parallèle aux axes des coordonnées

a) Droite parallèle à l'axe des ordonnées



Une droite parallèle à l'axe des ordonnées (comme (d_1) ou ((d_2) ci-contre) possède une équation de la forme **x = a**
Tous les points d'une telle droite ont la même abscisse : c'est a.
Sur le dessin, les droites (d_1) et (d_2) ont pour équations Respectives : **x = -2 et x = 3.**



b) Droite parallèle à l'axe des abscisse

Une droite parallèle à l'axe des abscisse (Comme **(d_3)** ou **(d_4)** ci-contre) possède une équation de la forme : **y = b** Tous les points d'une telle droite ont la même ordonnée : c'est b.
Sur le dessin, les droites **(d_3) et (d_4)** ont pour équations respectives : **y = 2 et y = -3.**

Exemple : Représenter graphiquemt les droites suivantes :

(D_1) : $x - y - 2 = 0$ 2) (D_2) : $x = 3$ 3) (D_3) : $y = 2$

Réponse :1)

Pour représenter la droite (D) il suffit de trouver deux points qui appartiennent à (D_1).

Si $x = 1$ alors : $1 - y - 2 = 0$

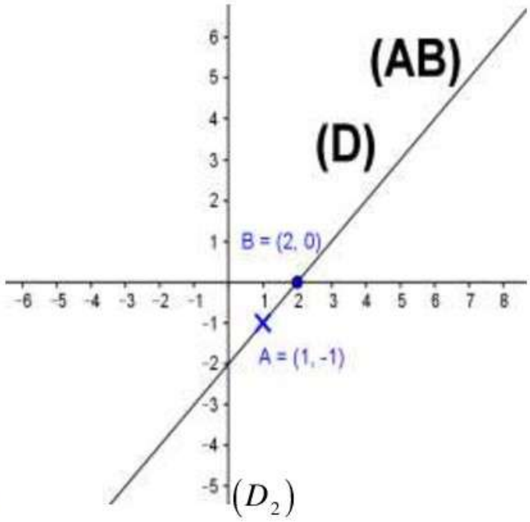
C'est-à-dire : $y = -1$ est par suite : $A(1;-1) \in (D_1)$

Si $y=0$ alors : $x-0-2=0$ C'est-à-dire $x=2$.

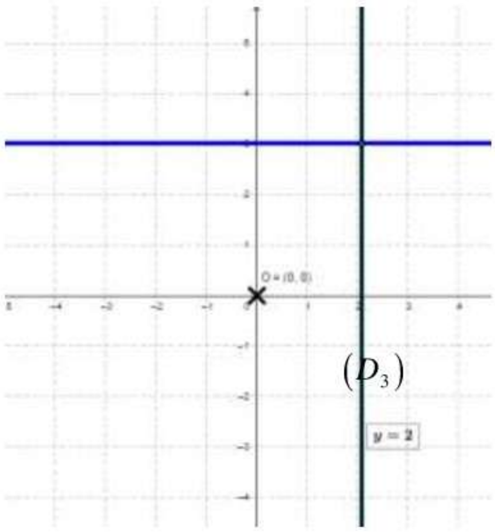
$B(2;0)\in(D_1)$

x	1	2
y	-1	0

Donc (figure1)



2) 3)



II) Positions relatives de deux droites dans le plan

Propriété1 : Soit la droite (D) d'équation : $(D): y = mx + p$ et $(D'): y = m'x + p'$

(D) et (D') sont parallèles si et seulement si $m = m'$

Remarque: 1) si (D) et (D') sont parallèles : on prend un point $A\in(D)$

- Si $A\in(D')$ alors $(D)=(D')$ (confondues)
- Si $A\notin(D')$ alors $(D)\parallel(D')$ strictement

2) si (D) et (D') sont sécantes alors le point d'intersection E (x ; y) vérifie le système :

$$\begin{cases} ax+by+c = 0 \\ a'x+b'y+c' = 0 \end{cases}$$

Application1 : Étudier la position relative des deux droites D) et (D') dans le cas suivant :

$(D): 3x + y - 7 = 0$ et $(D'): 6x + 2y - 3 = 0$

Réponse : $(D): 3x + y - 7 = 0$ Signifie que : $(D): y = -3x + 7$

Donc : le coefficient directeur de la droite (D) est : $m = -3$

$(D'): 6x + 2y - 3 = 0$ Signifie que : $2y = -6x + 3$

Signifie que : $y = \dfrac{-6x + 3}{2}$ donc : $y = -3x + \dfrac{3}{2}$

Donc : le coefficient directeur de la droite (D') est : $m' = -3$

On a donc : $m = m'$ par suite : $(D')\parallel(D)$

On remarque : $A(0;7)\in(D)$ mais $A\notin(D')$ donc : $(D)\parallel(D')$ strictement

Application : Soient les deux droites D) et (D') : D) $2x+5y-2=0$ et (D') **:** $x+3y-2=0$

1) Montrer que (D) et (D') sont sécantes.

2) Determiner le point $E(x; y)$ d'intersection de (D) et (D')

Réponse :1) $(D):2x+5y-2=0$ Signifie que : $(D):5y=-2x+2$

Signifie que : $(D):y=\frac{-2x+2}{5}$ Signifie que : $(D):y=\frac{-2}{5}x+\frac{2}{5}$

Donc : le coefficient directeur de la droite (D) est : $m=-\frac{2}{5}$

$(D'):x+3y-2=0$ Signifie que : $3y=-x+2$

Signifie que : $y=\frac{-x+2}{3}$ donc : $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

Donc : le coefficient directeur de la droite (D') est : $m'=-\frac{1}{3}$

On a donc : $m\neq m'$ par suite : (D) et (D') sont sécantes.

2)Alors **:** $E(x;y)$ vérifie le système : $\begin{cases}2x+5y-2=0\\x+3y-2=0\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}2x+5y=2\\x+3y=2\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}2x+5y=2\\x=2-3y\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}2(2-3y)+5y=2\\x=2-3y\end{cases}$ c'est-à-dire: $\begin{cases}4-6y+5y=2\\x=2-3y\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}4-y=2\\x=2-3y\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}y=2\\x=2-3y\end{cases}$ Donc : $\begin{cases}y=2\\x=-4\end{cases}$ alors : $E(-4;2)$.

Propriété2 : Soit la droite (D) d'équation : $(D):y=mx+p$ et $(D'):y=m'x+p'$

(D) et (D') sont perpondiculaires $(D')\perp(D)$ si et seulement si $m\times m'=-1$

Application : Soient les deux droites D) et (D') : $(D):4x+2y-1=0$ et $(D'):-x+2y+5=0$

Montrer que : $(D')\perp(D)$

Réponse :1) $(D):4x+2y-1=0$ Signifie que : $2y=-4x+1$

Signifie que : $y=-\frac{4}{2}x+\frac{1}{2}$ Signifie que : $y=-2x+\frac{1}{2}$

Donc : le coefficient directeur de la droite (D) est : $m=-2$

2) $(D'):-x+2y+5=0$ Signifie que : $2y=x-5$

Signifie que : $y=\frac{x-5}{2}$ Signifie que : $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

Donc : le coefficient directeur de la droite (D') est : $m'=\frac{1}{2}$

On a : $m\times m'=-2\times\frac{1}{2}=-1$ par suite : $(D')\perp(D)$

Exercice4 : Soit la droite (D) d'équation cartésienne : $(D):-2x+y+3=0$ et les points :

$A(0,2)$ et $B(4,0)$ et $C(3,3)$ et $D(-1,-5)$ et $E(2,1)$

1) Donner l'équation cartésienne.la droite (AB)
2) Donner l'équation reduite.la droite (AB)
3) Les point D et C appartient-ils à la droite(D) ?
4) Tracer la droite (D) et (AB)
5) Le point E appartient-il à la droite(D) ?
6) Le point E appartient-il à la droite(AB) ?
7) Donner le coefficient directeur de la droite (D)

8) Verifier que deux droites D) et (AB) sont perpodiculaires

9) Determiner le point $E(x;y)$ d'intersection de D) et (AB)

Solution : 1) (AB) $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$: Signifie que

Signifie que : $\frac{x-0}{4-0}=\frac{y-2}{0-2}$ Signifie que : $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{-2}$

Signifie que : $-2x=4(y-2)$ Signifie que : $-2x-4y+8=0$ (AB)

2) L'équation reduite.la droite (AB) ?

$-2x-4y+8=0$ (AB) Signifie que : $-2x+8=4y$

Signifie que : $y=\frac{-2x+8}{4}$ Signifie que : (AB) $y=-\frac{1}{2}x+2$

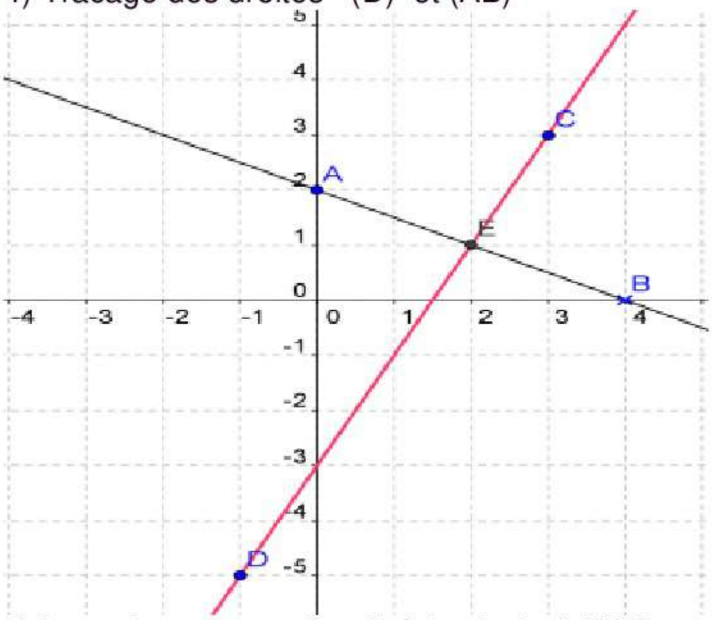
3) a) (D): $-2x+y+3=0$ et $C(3,3)$

On a : $-2\times3+3+3=-6+3+3=0$ donc : $C(3,3)\in(D)$

b) (D): $-2x+y+3=0$ et $D(-1,-5)$

On a : $-2\times(-1)-5+3=2-5+3=0$ donc : $D(-1,-5)\in(D)$

4) Tracage des droites (D) et (AB)



5) Le point E appartient-il à la droite (AB)?

(D): $-2x+y+3=0$ et $E(2,1)$

On a : $-2\times2+1+3=-4+1+3=0$ donc : $E(2,1)\in(D)$

6) Le point E appartient-il à la droite(D) ? (AB); $y=-\frac{1}{2}x+2$ et $E(2,1)$

On a : $-\frac{1}{2}\times2+2=-1+2=1$ donc : $E(2,1)\in(AB)$

7) On a : (D): $-2x+y+3=0$ Signifie que :: (D) $y=2x-3$

Donc : le coefficient directeur de la droite (D) est ; $m=2$

8) On a : $m\times m'=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

Donc les deux droites D) et (AB) sont perpodiculaires

9) $E(2,1)\in(AB)$ et $E(2,1)\in(D)$ donc E est Le point d'intersection de D) et (AB)