

**Cours : LA DERIVATION Avec Exercices avec solutions**

**Présentation globale**

**I) DERIVATION EN UN POINT**

1) Définition :

2) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES :

II) FONCTION DERIVEE D'UNE FONCTION.

1) Fonction dérivée d'une fonction.

2) Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles

III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES

## LA DERIVATION

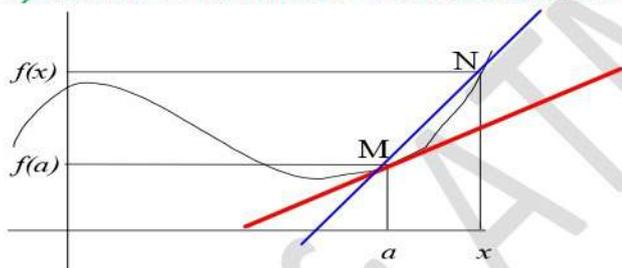
**I) DERIVATION EN UN POINT**

1) Définition :

**Définition :** Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre  $a$ .

On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si la limite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe et est finie. Dans ce cas on appellera cette limite le nombre dérivé de la fonction  $f$  en  $a$  et se note  $f'(a)$ .

2) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES :



**Théorème :** Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors sa courbe représentative  $C_f$  admet une tangente  $(T)$  en  $A(a; f(a))$  d'équation :  $(T) : y = f(a) + f'(a)(x - a)$

**Exemple :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^2$ .

1) Montrer que  $f$  est dérivable en  $a=1$  et préciser  $f'(1)$

2) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  en  $a=1$

**Solution : 1) On calcul :**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ?$  on a :  $f(1) = 2 \times 1^2 = 2$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1^2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2(x + 1) = 2(1 + 1) = 4 = f'(1) \in \mathbb{R}$$

Donc  $f$  est dérivable en  $a=1$  et  $f'(1) = 4$

2) L'équation de la tangente à la courbe de  $f$  en  $a$  est :  $(T) : y = f(a) + f'(a)(x - a)$

On a  $a=1$  : donc :  $(T): y = f(1) + f'(1)(x-1)$  et On a :  $f(1) = 2 \times 1^2 = 2$  et  $f'(1) = 4$

Donc :  $(T): y = 2 + 4(x-1)$

Donc :  $(T): y = 2 + 4x - 4$  Donc :  $(T): y = 4x - 2$

**Exercice1** : On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + x - 3$ .

1) vérifier que :  $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

2) Montrer que  $f$  est dérivable en  $a = -2$  et préciser  $f'(-2)$

3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  en  $a = -2$

**Solution : 1)**  $(x+2)(x-1) = x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2$

2) On calcul :  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = ?$  on a :  $f(-2) = (-2)^2 - 2 - 3 = 4 - 5 = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 3 + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} x - 1 = -3 = f'(-2)$$

Donc  $f$  est dérivable en  $-2$  et  $f'(-2) = -3$

3) L'équation de la tangente à la courbe de  $f$  en  $a$  est :  $(T): y = f(a) + f'(a)(x-a)$

On a  $a = -2$  : donc :  $(T): y = f(-2) + f'(-2)(x - (-2))$  et On a :  $f(-2) = -1$  et  $f'(-2) = -3$

Donc :  $(T): y = -1 - 3(x+2)$

Donc :  $(T): y = -1 - 3x - 6$  Donc :  $(T): y = -3x - 7$

## II) FONCTION DERIVEE D'UNE FONCTION.

### 1) Fonction dérivée d'une fonction.

**Définition** : Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ . La fonction qui associe à tout élément  $x$  son nombre dérivé  $f'(x)$  s'appelle la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $I$ .

### 2) Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles

#### Tableau des dérivées des fonctions usuelles et opérations

La fonction dérivée $f'$	La fonction $f$
$f'(x) = 0$	$f(x) = k$
$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax + b$
$n \in \mathbb{Z}^*$ $f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = x^n$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$

**Exemple1** : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = 11$     2)  $f(x) = 7x + 15$     3)  $f(x) = x^3$

4)  $f(x) = x^5 + 3x^2$

**Solution** : 1)  $f'(x) = (11)' = 0$

2)  $f'(x) = (7x + 15)' = 7$

3)  $f'(x) = (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$

4)  $f'(x) = (x^5 + 3x^2)' = (x^5)' + (3x^2)'$

$$f'(x) = (x^5 + 3x^2)' = 5x^{5-1} + 3(x^2)' = 5x^4 + 3 \times 2x^{2-1} = 5x^4 + 6x$$

### III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES.

La fonction dérivée $f'$	La fonction $f$
$f'(x) = u' + v'$	$f(x) = u + v$
$f'(x) = u' - v'$	$f(x) = u - v$
$f'(x) = k u'$	$f(x) = k.u$
$f'(x) = u' \times v + u \times v'$	$f(x) = u \times v$
$f'(x) = n u^{n-1} \times u'$	$f(x) = u^n$
$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$	$f(x) = \frac{1}{u}$
$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$f(x) = \frac{u}{v}$

**Exemple2 :** Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 5x - 3$

2)  $f(x) = x^2 + 7x + 15 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

**Solution :** 1)  $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 5x - 3$

$$f'(x) = (5x^3 - 2x^2 + 5x - 3)' = 5 \times 3x^{3-1} - 2 \times 2x^{2-1} + 5 - 0$$

$$f'(x) = 15x^2 - 4x + 5$$

$$2) f'(x) = \left(x^2 + 7x + 15 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)' = (x^2)' + (7x + 15)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + (\sqrt{x})'$$

$$f'(x) = \left(x^2 + 7x + 15 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)' = 2x + 7 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Exemple3:** Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante :  $f(x) = (5x^2 + 1)(3x - 1)$

On utilise la formule :  $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = \left((5x^2 + 1)(3x - 1)\right)' = (5x^2 + 1)' \times (3x - 1) + (5x^2 + 1) \times (3x - 1)'$$

$$f'(x) = 10x \times (3x - 1) + 3(5x^2 + 1) = 30x^2 - 10x + 15x^2 + 3$$

$$f'(x) = 45x^2 - 10x + 3$$

**Exemple4 :** Déterminer la fonction dérivée de la fonction :  $f(x) = (3x + 4)^3$

On utilise la formule :  $(u^n)' = n u^{n-1} \times u'$

$$f'(x) = \left((3x + 4)^3\right)' = 3 \times (3x + 4)^{3-1} \times (3x + 4)' = 3 \times 3 \times (3x + 4)^{3-1} = 9(3x + 4)^2$$

**Exemple5** : Déterminer la fonction dérivée de la fonction :  $f(x) = \frac{1}{2x-1}$

On utilise la formule :  $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x-1}\right)' = -\frac{(2x-1)'}{(2x-1)^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2}$$

**Exemple6** : Déterminer la fonction dérivée de la fonction :  $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

On utilise la formule :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)' = \frac{(3x-1)'(x+2) - (3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2) - 1 \times (3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

**Exercice2** : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = 4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1$     2)  $f(x) = \frac{3}{x}$     3)  $f(x) = 4\sqrt{x} - 1$     4)  $f(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$

5)  $f(x) = (3x^2+2)(7x+1)$     6)  $f(x) = \frac{1}{5x+7}$     7)  $f(x) = \frac{7x}{x^3+1}$

**Solutions :1)**  $f'(x) = \left(4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1\right)' = 4 \times 4x^{4-1} - \frac{1}{3} \times 3x^{3-1} - 1 + 0 = 16x^3 - x^2 - 1$

2)  $f'(x) = \left(\frac{3}{x}\right)' = \left(3 \times \frac{1}{x}\right)' = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{3}{x^2}$

3)  $f'(x) = (4\sqrt{x} - 1)' = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$

4)  $f(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$

$$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)' = \frac{(2x+1)'(3x-2) - (2x+1)(3x-2)'}{(3x-2)^2} = \frac{2(3x-2) - 3 \times (2x+1)}{(3x-2)^2} = \frac{6x-4-6x-3}{(3x-2)^2} = \frac{-7}{(3x-2)^2}$$

5)  $f(x) = (3x^2+2)(7x+1)$     On utilise la formule :  $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = \left((3x^2+2) \times (7x+1)\right)' = (3x^2+2)' \times (7x+1) + (3x^2+2) \times (7x+1)'$$

$$f'(x) = 6x \times (7x+1) + 7(3x^2+2) = 42x^2 + 6x + 21x^2 + 14 = 63x^2 + 6x + 14$$

6)  $f(x) = \frac{7x}{x^3+1}$     On utilise la formule :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{7x}{x^3+1}\right)' = \frac{(7x)'(x^3+1) - 7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = \frac{7(x^3+1) - 7x \times 3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7x^3 + 7 - 21x^3}{(x^3 + 1)^2} = \frac{7 - 14x^3}{(x^3 + 1)^2}$$

**Exercice3** : Déterminer les fonctions dérivées dans les cas suivants :

1)  $f(x) = x^2 + 3x - 1$     2)  $f(x) = \frac{4x-3}{2x-1}$

**Solution** : 1)  $f(x) = x^2 + 3x - 1$

$$f'(x) = (x^2)' + (3x-1)' = 2x + 3$$

2)  $f(x) = \frac{4x-3}{2x-1}$

$f(x) = u(x)/v(x)$  Avec  $u(x) = 4x - 3$  et  $v(x) = 2x - 1$

On utilise la formule :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)' = \frac{(4x-3)'(2x-1) - (4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{4(2x-1) - 2 \times (4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x-1) - 2 \times (4x-3)}{(2x-1)^2} = \frac{8x - 4 - 8x + 6}{(2x-1)^2} = \frac{2}{(2x-1)^2}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.  
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

