Cours : Etude de fonctions Avec Exercices avec solutions

Présentation globale

ETUDE DE FONCTIONS

I) asymptotes à une courbe :

• **Si** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ alors la courbe (C) admet une asymptote verticale d´équation $\boxed{x = a}$

• **Si** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ alors la courbe admet une asymptote horizontale d´équation $\boxed{y = b}$

Exemple : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x-6}$

Déterminer les limites aux bornes de D_f et

(Donner une interprétation géométrique des résultats)

Solution : $D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x-1}{3x-6}$

$\lim\limits_{x \to 2^+} 2x - 1 = 3$ **et** $\lim\limits_{x \to 2^+} 3x - 6 = 0^+$ **et** $\lim\limits_{x \to 2^-} 3x - 6 = 0^-$

x	$-\infty$ $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$
$3x-6$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

Donc : $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

Interprétation géométrique des résultats :

La droite (Δ) : $x = 2$ est une asymptote verticale a la courbe C_f

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{3x-6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{3x-6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$

Interprétation géométrique des résultats :

La droite (Δ) : $y = \dfrac{2}{3}$ est une asymptote horizontale a la courbe C_f

II)Etude d'une fonction polynôme

1) Etude d'une fonction polynôme : $x \to ax^2+bx+c$

Exemple1 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^2+4x+3$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3) Calculer : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)$

4) Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x \in D_f$

5) En déduire les variations de f sur D_f et donner le tableau de variations de f sur D_f

6) Déterminer les points d'Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

7) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

8) Tracer la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

9) Tracer la droite (D) d'équation : $(D): y=3$ dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

10) Déterminer les points d'Intersection de la courbe (C_f) et la droite (D)

11) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2+4x\geq 0$

Solutions :

1) On a : $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$ car f est une fonction polynôme

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2+4x+3=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2+4x+3=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=\left(x^2+4x+3\right)'=\boxed{2x+4}$

4) Etude du signe de $f'(x)$: $\forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=2x+4$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x+4$	$-$	0	$+$

Donc : f est une fonction strictement croissante dans $[-2;+\infty[$

Et f est une fonction strictement décroissante dans $]-\infty;-2]$

Le tableau de variations de f

$f(-2)=(-2)^2+4(-2)+3=4-8+3=-1$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

6)Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $x^2+4x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times1\times3=16-12=4>0$

$x_1 = \frac{-4+\sqrt{4}}{2\times 1} = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-4-\sqrt{4}}{2\times 1} = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C(-1;0)$ et $D(-3;0)$

7) Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

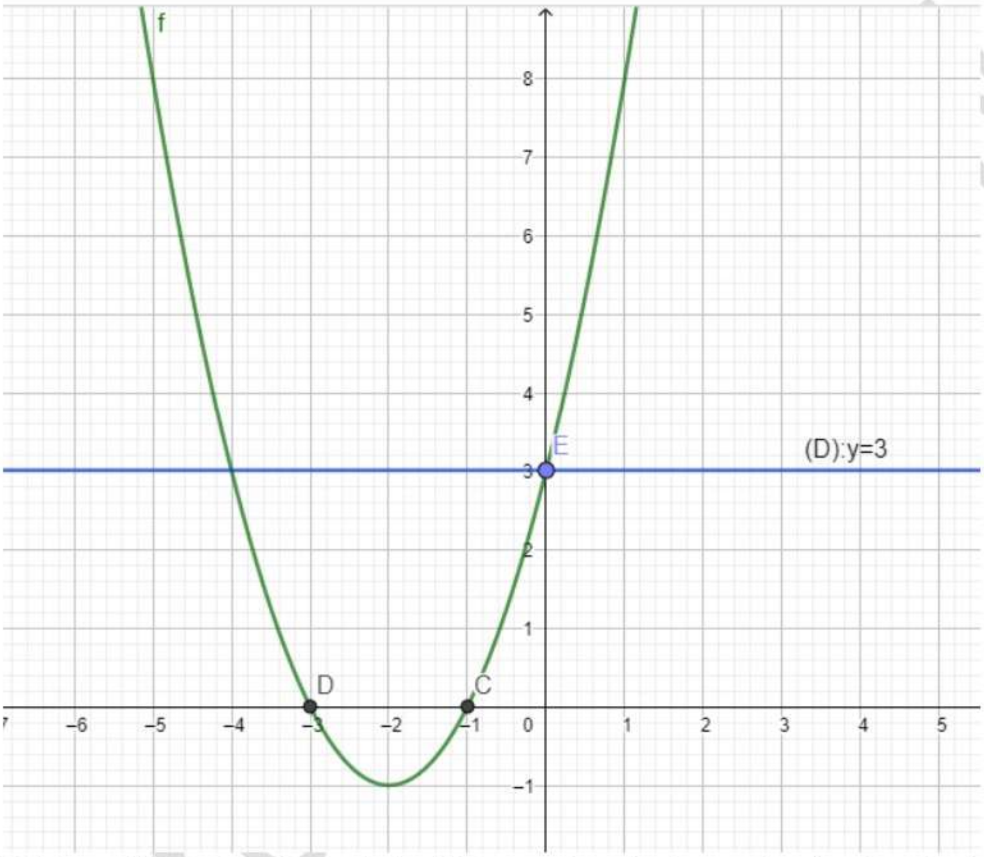
Et on a $f(0) = 0^2 + 4\times 0 + 3 = 3$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;3)$

8) Tracer la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Pour construire la courbe représentative (C_f) on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1
f(x)	3	0	-1	0	3	8



10) Pour déterminer les points d'Intersection de la courbe (C_f) et la droite $(D): y = 3$

On va résoudre l'équation : $f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x+4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -4$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) et la droite $(D): y = 3$ sont :

$A(0;3)$ et $B(-4;3)$

11) Résolution graphique dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2 + 4x \geq 0$

$x^2 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 \geq 0 + 3 \Leftrightarrow f(x) \geq 3$

La courbe (C_f) est au-dessus de (D) si $x \in]-\infty;-4] \cup [0;+\infty[$

Donc $S =]-\infty;-4] \cup [0;+\infty[$

2) *Etude d'une fonction polynôme :* $x \to ax^3 + bx^2 + cx + d$

Exemple2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 3$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

3) Calculer : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x)$

4) Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x \in D_f$

5) En déduire les variations de f sur D_f et donner le tableau de variations de f sur D_f

6) Tracer la courbe Cf

Solution : 1) On a : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ car f est une fonction polynôme

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 - 3x + 3 = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 - 3x + 3 = \lim_{x \to +\infty} x^3 = -\infty$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = (x^3 - 3x + 3)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$

4) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)(x+1)$

$(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ *ou* $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ *ou* $x = -1$

Le tableau de signe est le suivant :

$f'(x) = 3x^2 - 3$ $a = 3 \succ 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)=3x^2-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

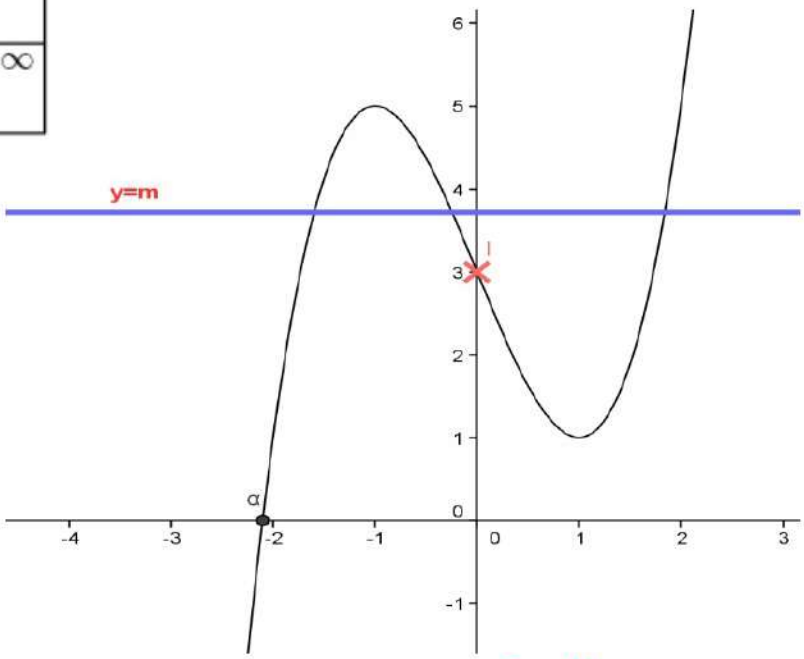
5) Donc : f est une fonction strictement croissante dans $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$

Et f est une fonction strictement décroissante dans $[-1; 1]$

6) Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

6)



III)Etude d'une fonction homographique : $x \rightarrow \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Exemple : Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

1)Déterminer D_f

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

3) Donner une interprétation géométrique de ces limites

4) Calculer : $\forall x \in D_f$; $f'(x)$ et Etudier le signe de $f'(x)$ $\forall x \in D_f$

5) En déduire les variations de f sur D_f et donner le tableau de variations de f sur D_f

6) Tracer la courbe Cf

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}$

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

$D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x+1}{x+1}$

On a : $\lim\limits_{x\to -1^+} 2x+1=2(-1)+1=-2+1=-1$ **et** $\lim\limits_{x\to -1^+} x+1=-1+1=0$

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ $+\infty$
$x+1$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

$\lim\limits_{x\to -1^+} x+1=0^+$ **et** $\lim\limits_{x\to -1^+} 2x+1=-1$

Donc : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x+1}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to -1^-} x+1=0^-$ **et** $\lim\limits_{x\to -1^-} 2x+1=-1$

Donc : $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$

3)Interprétation géométrique des résultats :

a) On a : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$

La droite (Δ_1): $x=-1$ est une asymptote vertical a la courbe C_f

a) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

La droite (Δ_2): $y=2$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f

4) Calculer : $\forall x\in]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$; $f'(x)=\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)'$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)'=\frac{(2x+1)'(x+1)-(2x+1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)-1\times(2x+1)}{(x+1)^2}$$

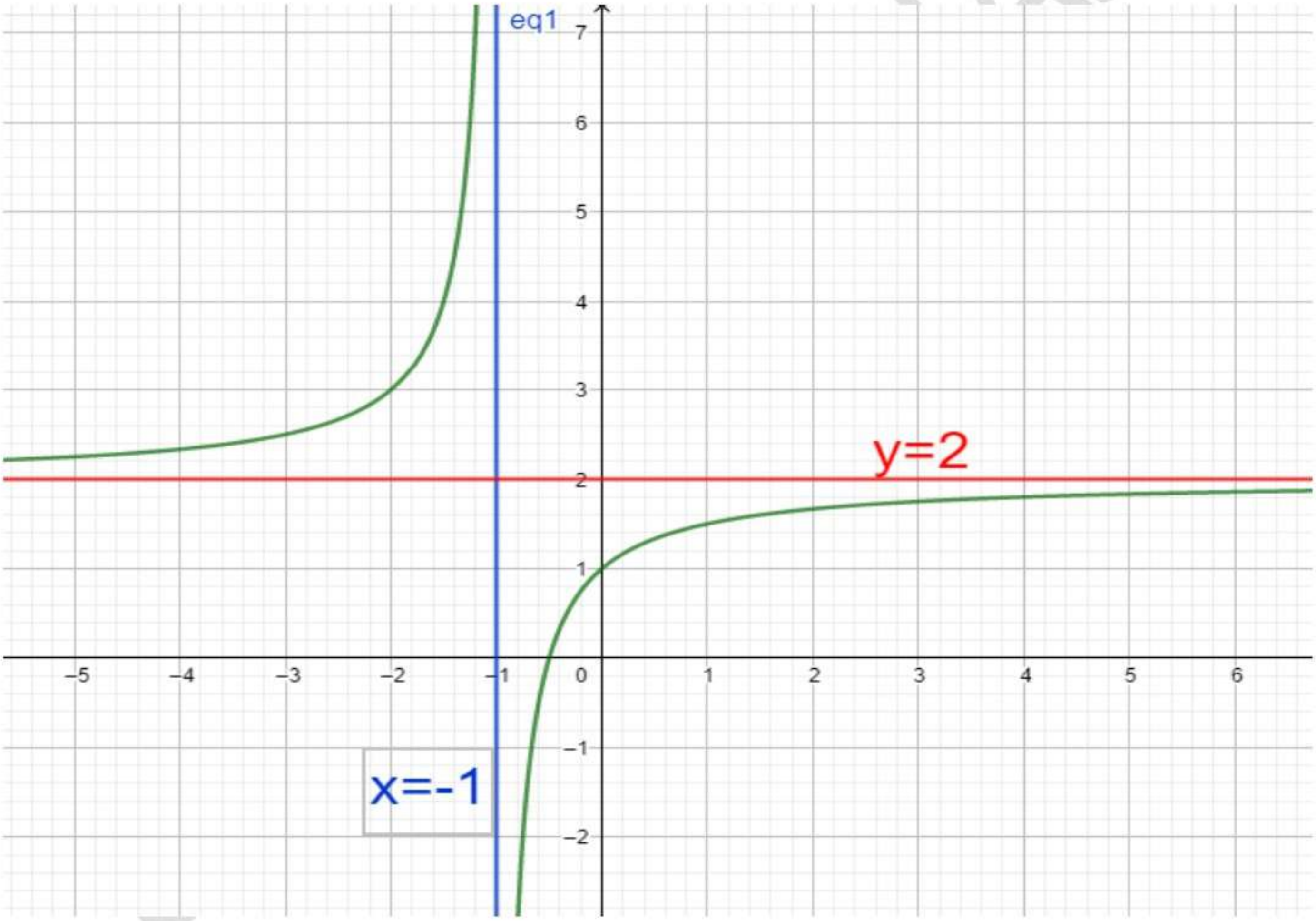
$$f'(x)=\frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}\succ 0$$

5) Donc : f est une fonction strictement croissante dans $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 2$

6) Tracer la courbe Cf



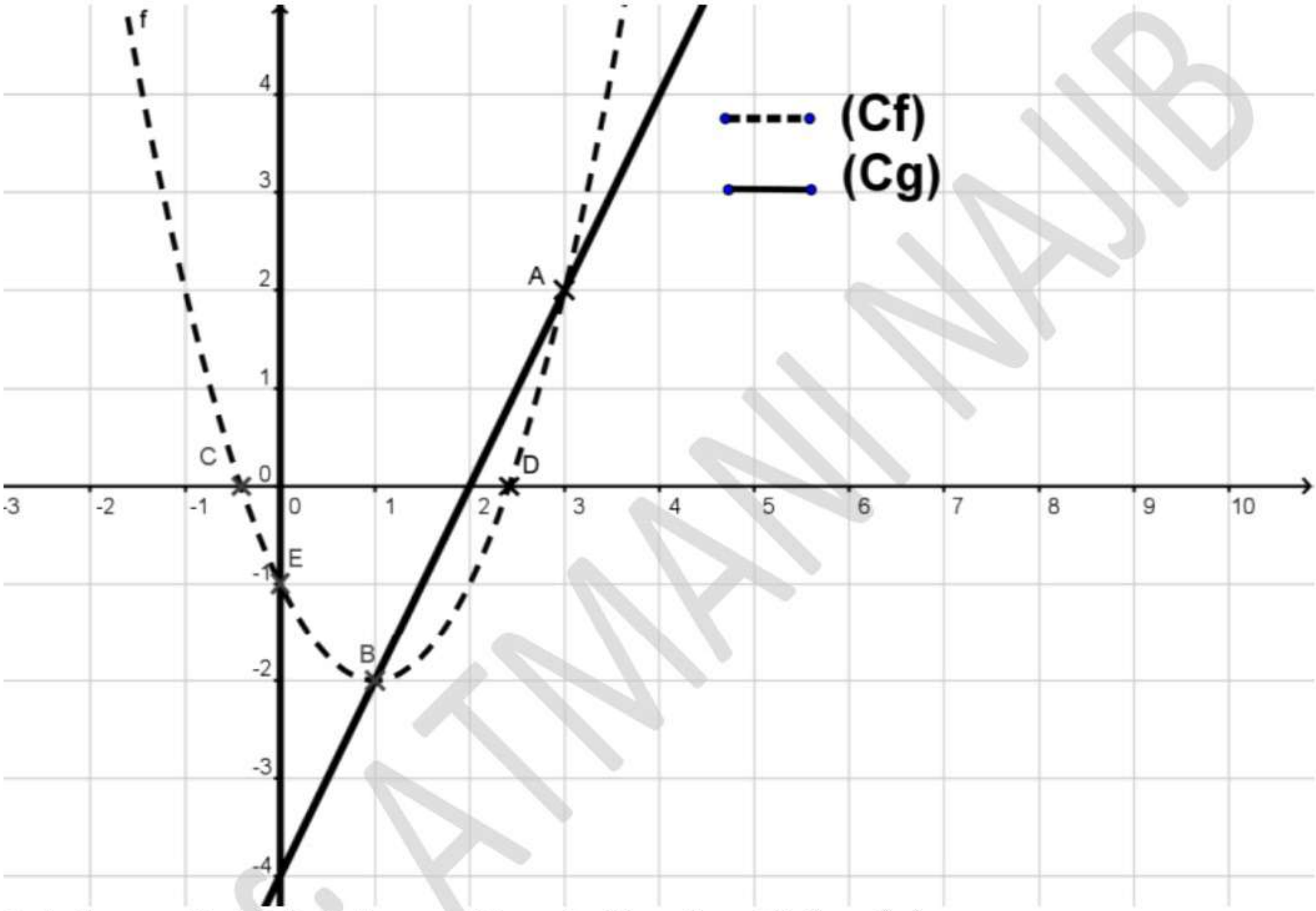
Exercice : Soient f et g les deux fonctions définies sur R par :

$f(x)=x^2-2x-1$ et $g(x)=2x-4$

Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) sont données dans le repère ci-dessous :

Voire figure)

1. Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x)=g(x)$
2. Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x)\succ g(x)$
3. Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère



<u>**Solutions :**</u> 1) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=1$ et $x=3$ donc $S=\{1;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $x^2-2x-1=2x-4$ c'est-à-dire : $x^2-4x+3=0$

$a=1$ et $b=-4$ et $c=+3$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=16-12=4>0$

Donc : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3$ Et $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1$

Donc $S=\{1;3\}$

2) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \succ g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g)

si $x \in \left]-\infty;1\right[\cup \left]3;+\infty\right[$

Donc $S = \left]-\infty;1\right[\cup \left]3;+\infty\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x) \succ g(x)$:

$f(x) \succ g(x)$ Signifie $x^2 - 2x - 1 \succ 2x - 4$

C'est-à-dire : $x^2 - 4x + 3 \succ 0$

Les racines sont : $x_1 = 3$ et $x_2 = 1$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S = \left]-\infty;1\right[\cup \left]3;+\infty\right[$

3)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ Signifie $x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times1\times(-1) = 4 + 4 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 > 0$

$x_1 = \dfrac{-(-2) + 2\sqrt{2}}{2\times1} = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ $\quad x_2 = \dfrac{-(-2) - 2\sqrt{2}}{2\times1} = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(1-\sqrt{2};0\right)$ et $D\left(1+\sqrt{2};0\right)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0) = 0^2 - 2\times0 - 1 = -1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;-1)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien