Lycée qualifiant EL JAHID — P : Akaddar Driss

NIVEAU : 2BACSE F — 2021/2022

FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

I. Fonction Exponentielle Népérienne

1) La fonction Exponentielle Népérienne

Définition

La fonction Réciproque de $\ln$ S'appelée la fonction Exponentielle Népérienne note Exp

- la fonction exp est Définie sur R , on a $\forall x \in R; exp(x) = e^x$
- On a $(\forall x \in R)(\forall y > 0); exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$

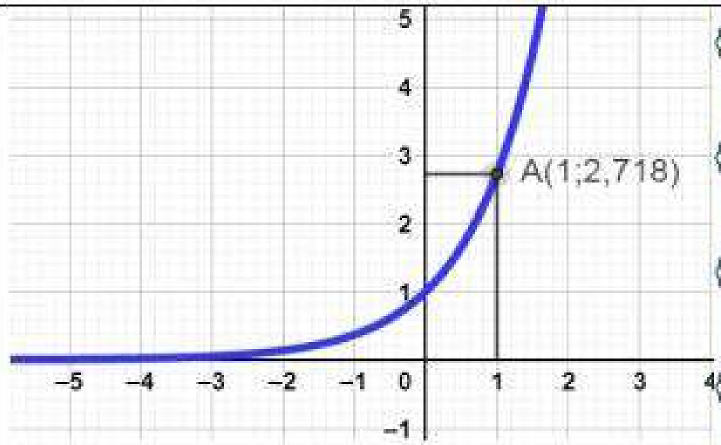
Propriété

- Domaine de définition de Exp est R et $exp(0) = 1$; $Exp(1) = e \approx 2.718281$
- La fonction $x \rightarrow e^x$ Dérivable sur R et on a : $\forall x \in R; (exp(x))' = (e^x)' = e^x$
- La fonction $x \longrightarrow e^x$ est Strictement croissante sur R
- $\forall x \in R; \exp(x) > 0$

Tableau de la variation

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0 ↗	$+\infty$

LA courbe de la fonction $x \longrightarrow e^x$



2) Limite de la fonction Exp en $+\infty$ et en $-\infty$

Propriété

Soit $n \in N$, on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

3) Les branches infinie de la courbe de exp

Propriété

Soit C_f la courbe de la fonction Exp sur R,on a :

- On a $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ alors C_f admet un assymptote Horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ alors C_f admet un Branche parabolique de direction (oy) (l'axe des ordonnées) au voisinage de $+\infty$

4) Propriété Algébrique

Propriété 1

Soient $a\ et\ b$ deux nombres réels ,on a :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$
- $e^a \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 0$
- $e^a > 1 \Leftrightarrow a > 0$

Propriété 2

Soient $a\ et\ b$ deux nombres réels et $r \in Q$,on a :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $(e^a)^r = e^{ra}$

II. Etude de la fonction $x \longrightarrow \text{Exp}(f(x))$

1) Dérivée de $x \longrightarrow \text{Exp}(u(x))$

Propriété

Soit f une fonction Numérique Définie et Dérivable sur une intervalle I

- La fonction $g: x \longrightarrow \text{Exp}(f(x))$ est Dérivable sur I et on a
  $$\forall x \in I; g'x) = f'(x) \times Exp(f(x))$$
- L'ensemble des fonctions primitives de la fonction $x \longrightarrow f'(x) \times Exp(f(x))$ sur I sont les fonctions $x \longrightarrow \text{Exp}(f(x)) + C$ Avec $C \in R$

2) Limite de la fonction $x \longrightarrow \text{Exp}\, f(x)$

Propriété

Soit f une fonction Numérique et $a \in R$

- $\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^b$
- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to a} e^{f(x)} = +\infty$
- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to a} e^{f(x)} = 0^+$

Remarque : Si propriété Reste correcte si x tend vers $+\infty; -\infty; a^+\ et\ a^-$

EXERCICE D'APPLICATION

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+e^x$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3-e^x$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5\,e^x$	• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+x-e^x$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-x^2$	• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3e^x$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\,e^x$	• $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x-x}{3x}$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\,e^x$

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes

• $e^x-3=0$ • $e^{2x}+2=0$ • $e^{2x}-5e^x+6=0$ • $e^{2x}-e^x-20=0$	• $\frac{e^x-2}{e^x+5}=\frac{3}{4}$ • $e^{x^2+1}-e^{3x-1}=0$ • $e^{2x}-2e^x=0$

Exercice 3 : Résoudre les inéquations suivantes

• $2e^x-7\leq 0$ • $e^{2x}-5e^x+6>0$ • $e^{2x}-e^x-20\leq 0$	• $e^x-8e^{-x}+2\geq 0$ • $e^{x^2+1}-e^{3x-1}\geq 0$ • $e^{2x}-2e^x>0$

Exercice 4

Soit f la fonction definie sur R par $f(x)=e^x-2$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $f(0)$
2) Etudier les branches infinie de f
3) Montrer que $\forall x\in R;\, f'(x)=e^x$
4) Etudier la variation de f sur R
5) Construire C_f la courbe de f

Exercice 5

Soit g la fonction definie sur R par $g(x)=e^x-x+1$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $g(0)$
2) Etudier les branches infinie de g
3) Etudie la Dérivabilité de g sur R et Montrer que $\forall x\in R;\, g'(x)=e^x-1$
4) Etudier la variation de g sur R
5) Construire C_g la courbe de g