Le contenu	Remarques

I. Suites arithmétiques (Rappel)

Activité :

Observer puis compléter par quatre nombres convenables pour continuer la série de chacune des listes suivantes :

- $1 ; 3 ; 5 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; \dots\dots\dots\dots$
- $1 \; ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{6} ; \dots\dots\dots\dots\dots$
- $-3 \; ; \frac{-3}{2} ; \frac{-3}{4} ; \frac{-3}{8} ; \frac{-3}{16} ; \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\frac{1}{2} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{4} ; \frac{4}{5} ; \frac{5}{6} ; \dots\dots\dots\dots\dots$

Exemples :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 2n - 1 \quad \forall n \in N$

1) Calculer le premier terme de la suite U_0.
2) Calculer les quartes premiers termes de la suite (U_n) .
3) Calculer $U_{n+1} - U_n$.
4) Conclure .

1) Définition d'une suite arithmétique :

Définition :

On dit que $(U_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique s' il existe un nombre réel r tel que $U_{n+1} = U_n + r \quad \forall n \geq n_0$.
Le nombre r est appelé raison de la suite $(U_n)_{n \geq n_0}$.

Application :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = 2n + 3 \quad \forall n \in N$.

1) Calculer $U_{n+1} - U_n$.
2) Que peut on conclure .

2) Le terme générale d'une suite arithmétique :

Propriétés

Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0
alors $U_n = U_0 + (n - 0)r$.
Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_1
alors $U_n = U_1 + (n - 1)r$
Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_2
alors $U_n = U_2 + (n - 2)r$.

3) La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Propriété

Soit (U_n) est une suite arithmétique ;
on pose $S_n = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \cdots + U_n$ tel que $(p < n)$ on a :
$S_n = \left(\frac{U_p + U_n}{2}\right)(n - p + 1)$.

Exemples :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et son premier terme $U_0 = 1$ .Calculer la somme suivante $S = U_0 + \cdots + U_{30}$
Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = -2$ et son premier terme $U_0 = 4$ .Calculer la somme suivante $S = U_3 + \cdots + U_{30}$

✍ Exercice 1:

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = 3n + 1 \quad \forall n \in N$.

1) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique .
2) Calculer la somme suivante $S = \boldsymbol{U_6} + \cdots + \boldsymbol{U_{10}}$.

✍ Exercice2 :

Soit $(\boldsymbol{U_n})$ une suite arithmétique de raison $\boldsymbol{r} = 2$ et son premier terme $\boldsymbol{U_0} = \boldsymbol{3}$.

1) Calculer $\boldsymbol{U_1}$ et $\boldsymbol{U_2}$ et $\boldsymbol{U_3}$.
2) Exprimer $\boldsymbol{U_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.
3) Calculer la somme suivante $S = \boldsymbol{U_1} + \cdots + \boldsymbol{U_{10}}$.

II. Suites géométriques

1) Définition d'une suite géométrique

Définition :

On dit que $(U_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique s' il existe un nombre réel q tel que $U_{n+1} = qU_n \quad \forall n \geq n_0$.
Le nombre $\boldsymbol{q}$ est appelé raison de la suite $(U_n)_{n \geq n_0}$.

Exemples :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 2 * 3^n \quad \forall n \in N$

1) Calculer le premier terme de la suite U_0.
2) Calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.
3) Conclure.

✍Application :

Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$U_n = 3 * \left(\frac{2}{5}\right)^n \quad \forall n \in N$.

1) Montrer que (U_n) est une suite géométrique puis déterminer sa raison et son premier terme .

2) terme générale d'une suite arithmétique :

Propriété

Si $(\mathrm{U_n})$ est une suite géométrique de raison non nul q et de premier terme $\mathrm{U_0}$ alors $\mathrm{U_n} = \mathrm{U_0} * q^n$.
Si $(\mathrm{U_n})$ est une suite géométrique de raison non nul q et de premier terme $\mathrm{U_1}$ alors $\mathrm{U_n} = \mathrm{U_0} * q^{n-1}$.

Résultat :

Si $(\mathrm{U_n})$ est une suite géométrique de raison non nul q alors pour tout $p \in N$ $\mathrm{U_n} = \mathrm{U}_p * q^{n-p}$.

3) La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

Propriété

Soit (U_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$;
on pose $\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{U_p} + \boldsymbol{U_{p+1}} + \boldsymbol{U_{p+2}} + \cdots + \boldsymbol{U_n}$ tel que $(\boldsymbol{p} < \boldsymbol{n})$ on a :
$\boldsymbol{S_n} = U_p * \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$.

Exemples :

Soit $(\boldsymbol{U_n})$ une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q} = \frac{1}{3}$ et son premier terme $\boldsymbol{U_0} = 81$.

1) Exprimer $\boldsymbol{U_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.
2) Calculer $\boldsymbol{U_1}$ et $\boldsymbol{U_2}$ et $\boldsymbol{U_3}$.
3) Calculer la somme $S = \boldsymbol{U_1} + \boldsymbol{U_2} + \boldsymbol{U_3} + \cdots + \boldsymbol{U_{10}}$.

Exercice 1:

On considère la suite (U_n) définie par : $U_{n+1} = 3U_n$ et $U_0 = 2$ $\forall n \in N$.

1) Vérifier que (U_n) est une suite géométrique .
2) Exprimer U_n en fonction de n .
3) Calculer $\boldsymbol{U_1}$ et $\boldsymbol{U_2}$ et $\boldsymbol{U_5}$.
4) Calculer la somme $S = \boldsymbol{U_1} + \boldsymbol{U_2} + \boldsymbol{U_3} + \cdots + \boldsymbol{U_5}$.

III. Les suites de la forme $U_{n+1} = aU_n + b$

Exemples :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n + 3 \\ U_0 = 1 \end{cases}$ $\forall n \in N$

1) Calculer $\boldsymbol{U_1}$ et $\boldsymbol{U_2}$ et $\boldsymbol{U_3}$.

Définition :

Soit a et b deux réels.
La suite définie par son premier terme U_0 et la relation $U_{n+1} = aU_n + b$ pour tout $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$ est appelée une suite récurrente .

Exemples :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n + 2 \\ U_0 = 2 \end{cases}$ $\forall n \in N$

1) Calculer $\boldsymbol{U_1}$ et $\boldsymbol{U_2}$ et $\boldsymbol{U_3}$.
2) On pose $V_n = U_n + 2$ $\forall n \in N$.
   a) Calculer V_1 et V_2 et V_3 .
   b) Calculer $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ puis déduire la nature de la suite (V_n).
   c) Exprimer (V_n) en fonction de n.
   d) En déduire l'expression (U_n) en fonction de n .
3) Calculer les sommes suivantes :
   $S_1 = \boldsymbol{V_1} + \boldsymbol{V_2} + \boldsymbol{V_3} + \cdots + \boldsymbol{V_5}$ et $S_2 = \boldsymbol{U_1} + \boldsymbol{U_2} + \boldsymbol{U_3} + \cdots + \boldsymbol{U_5}$

Exercice :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1 \\ U_0 = 10 \end{cases}$ $\forall n \in N$

et la suite $V_n = U_n - 3$ $\forall n \in N$.

1) Calculer $\boldsymbol{U_1}$ et $\boldsymbol{U_2}$ et $\boldsymbol{V_0}$ et $\boldsymbol{V_1}$.
2) Montrer que $(\boldsymbol{V_n})$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.
3) Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de $\boldsymbol{n}$.
4) Calculer les sommes suivantes :
   $S_1 = \boldsymbol{V_1} + \boldsymbol{V_2} + \boldsymbol{V_3} + \cdots + \boldsymbol{V_5}$ et $S_2 = \boldsymbol{U_1} + \boldsymbol{U_2} + \boldsymbol{U_3} + \cdots + \boldsymbol{U_5}$