Lycée qualifiant EL JAHID D : Akaddar Driss
NIVEAU : 1BACSHF

DENOMBREMENT

I. Vocabulaire des Dénombrement

- **Experience Aléatoire** : Est une expérience dont on cannait tous les resultats possibles mais dont on ne peut pas prévoir le resultat qui se produira effectivement .
- **Univers des possibilités** : l'enssemble de tous possibilité d'une experience aléatoire s'appelle univers des possibilité , on notée Ω .
- Tout element d'une ensemble Ω s'appelle Issue ou éventualité
- **Un événement** : On appelle événement toute partie de l'univers Ω. Les événements sont notés par des lettres majuscules : A, B, C. . .
- **Un événement est certain** : lorsqu'on est sûr qu'il va se produire.
  L'événement certain contient toutes les issues possibles.
- **Un événement est impossible** : lorsque l'on est sûr qu'il ne peut pas se réaliser.
- Soit A et B deux évènements élémentaires d'un univers Ω :
  - L'évènement $A \cup B$ est l'événement A ou B qui est l'union de A et B
  - L'évènement $A \cap B$ est l'évènement (A et B) qui est l'intersection de A et B
  - Deux événements A et B sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas se produire en même temps on écrit : $A \text{ et } B \text{ sont incompatibles} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
  - L'événement Opposé de A est notée $\overline{A}$ tel $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$

II. Principe fondamentale du dénombrement

1) Cardinal d'un ensemble

Définition

- un ensemble Fini : est Un ensemble qui possède un nombre fini des éléments c'est-à-dire il est possible de compter ses élément
- Soit E un ensemble Fini
- Le cardinal de E est le nombre d'élément de E,On le note $Card\ E$
- Soit A et B deux parties d'un ensemble fini, on a :$Card(A \cup B) = Card\ A + Card\ B - Card(A \cap B)$
- On dit que A et B sont deux partition de l'ensemble E si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$
- L'ensemble vide : c'est l'ensemble qui ne contient aucun élément on écrit : $Card\ \emptyset = 0$

Exemple

Soit E l'ensemble définie par $E = \{1; 3; a; d; s; B; 8; 27\}$, On a $Card\ E = 8$

Application

Soient $A; B$ et C trois ensembles finis tel que $A = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24\}$;
$B = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$ et $C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$

a) Calculer $Card\ A$; $Card\ B$ et $Card\ C$
b) Déterminer $A \cap B$; $A \cap C$ et $B \cap C$ Et Calculer $Card(A \cap B)$; $Card(A \cap C)$ et $Card(B \cap C)$
c) Calculer $Card(A \cup B)$; $Card(A \cup C)$ et $Card(B \cup C)$

2) Principe d'addition

Propriété

Soit E un ensemble fini et $A_1; A_2; A_3$ des partitions de E
On a $Card(E) = Card(A_1) + Card(A_2) + Card(A_3)$

3) Principe fondamental du dénombrement (Principe de la multiplication)

Activité

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite et on note la face obtenu $pile(P)$ ou Face (F)

a) Quelles sont les Résultats possibles ?

b) Déterminer le nombre de Résultats possibles ?

Principe

Dans une expérience réaliser de k choix

Si le premier choix peut être réalisé en n_1 formes différents et la Deuxième en n_2 forme diffèrent et ...... et le choix k en n_k forme différents, Alors le nombre de Résultat possible est le produit $n_1 \times n_2 \times \dots\dots\dots \times n_k$

Remarque

Un Arbre est un diagramme pour Décrire et Dénombrer les Résultats possibles d'une suite finie D'Operations Ainsi, si un arbre comporte n_1 Branche et que celles-ci comporte chacune n_2 Sous Branche Alors cet Arbre comprend $n_1 \times n_2$ Sous Branche

III. Arrangement sans remise - Arrangement avec remise - permutation

Soit E un ensemble de n éléments, on veut constituer un ensemble à p éléments distincts dans un ordre déterminé avec $p \leq n$.

Chaque ensemble ainsi constitué $(p - liste)$ est appelé arrangement de p éléments.

Définition

Soient p *et* n deux entiers naturels avec $1 \leq p \leq n$, et E un ensemble fini de n éléments

- Tout choix ou tirage successif et sans remis de p éléments parmi n élément est appelé arrangement sans remis à p élément parmi n et se note A_n^p et on écrit
$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \dots\dots \times (n-p+1)$$
- Tout choix ou tirage successif et Avec remis de p éléments parmi n élément est appelé arrangement Avec remis à p élément parmi n et se note n^p
- Tout arrangement à n élément est appelé permutation à n éléments il se note $n!$ Et se li $factoriel\ n$

  tel que $n! = A_n^n = n \times (n-1) \times \dots\dots \times 2 \times 1$

IV. Combinaison

Définition

Soient $n \in N^*$ et E un ensemble finie de n éléments et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$.

On appelle combinaison de p éléments de E toute partie (ou tout sous-ensemble) de E possédant p élément.

Nombre de combinaison de p element Parmi n Il se note C_n^p tel que $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$

V. Les nombres $n!$; n^p; A_n^p et C_n^p

Propriété

Soients n *et* p deux entiers Naturels tels que $\geq p$, on a :

• $n! = n \times (n-1) \dots\dots \times 3 \times 2 \times 1$ • $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n \times (n-1) \dots\dots \times (n-p+1)}_{\text{p Facture}}$ • $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$	• $0! = 1$; $1! = 1$ • $A_n^n = n!$ • $C_n^n = 1$ • $C_n^1 = n$; $C_n^0 = A_n^0 = 1$ • $C_n^{n-1} = n$

Application

Calculer les nombres suivants : $4!$; $6!$; A_5^0; A_{20}^1; A_{15}^3; A_8^4; C_{100}^0; C_{2002}^1 ; C_{551}^{550}; C_{33}^{33} *et* C_{12}^3

VI. Types de tirages

Si on tire p objet parmi n objets

Type de tirage	Nombre de tirage possible	L'ordre
Simultanément	C_n^p *avec* $n \geq p$	N'a pas importance
Successif sans Remise	n^p	Est importance
Successif Avec Remise	A_n^p *avec* $n \geq p$	Est importance

Remarque (Coefficient multinomial)

Le nombre de permutation de n élément avec $n_1; n_2; \dots \dots; n_k$ répétition est égale à $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \dots \times n_k!}$; est connu sous le nom de Coefficient multinomial

Application corrigé

Exercice 1

Un sac contient des boules identiques et indiscernables au toucher dont 5 sont rouges, 3 sont vertes et 3 est noire. On tire simultanément 3 boules de ce sac.

1) Quel est le nombre de tirages possibles ?
2) Quel est le nombre de tirages contenant 3 boules rouges ?
3) Quel est le nombre de tirages contenant 3 boules de même couleur ?
4) Quel est le nombre de tirages contenant au moins une boule verte ?
5) Quel est le nombre de tirages contenant au plus deux boule noire ?

Répons

1) Le nombre de tirage possibles est : $C_9^3 = \frac{A_8^3}{3!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$
   - Donc Le nombre de tirage possibles est 56 tirages
2) le nombre de tirages possibles contenant 3 boules rouges est $C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 4$
   - Donc le nombre de tirages possibles contenant 3 boules rouges est 4 tirages
3) le nombre de tirages possibles contenant 3 boules de même est $C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 = 5$
   - Donc le nombre de tirages possibles contenant 3 boules de même est 5 tirages
4) le nombre de tirages contenant au moins une boule verte est

$$C_3^1 \times C_5^2 + C_3^2 \times C_5^1 + C_3^3 = 3 \times \frac{A_5^2}{2\,!} + \frac{A_3^2}{2\,!} \times 5 + 1 = 3 \times 10 + 3 \times 5 + 1 = 30 + 15 + 1 = 46$$

   - Donc le nombre de tirages contenant au moins une boule verte est 46 tirages
5) le nombre de tirages contenant exactement une boule noire $C_1^1 \times C_7^2 = 1 \times \frac{A_7^2}{2!} = 21$
   - Donc le nombre de tirages contenant exactement une boule noire est 21 tirages

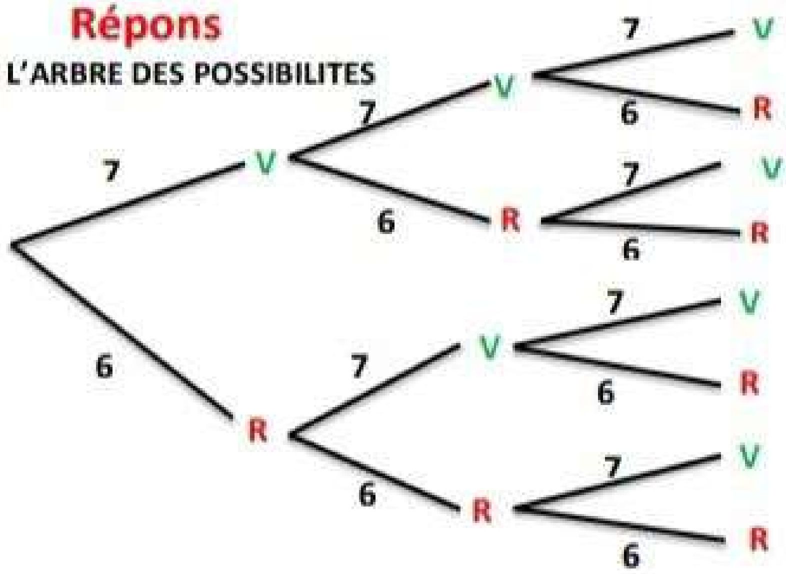
Exercice 2

Un sac contient 7 boules vertes et 6 boules rouges. On suppose que toutes les boules sont identiques. On tire successivement et avec remise 3 boules de ce sac.

1) Construire l'arbre des possibilité
2) Quel est le nombre de tirages possibles ?
3) Quel est le nombre de tirages contenant 3 boules de même couleur ?
4) Quel est le nombre de tirages contenant exactement une boule rouge?
5) Quel est le nombre de tirages contenant au moins une boule rouge ?

Répons

1. L'ARBRE DES POSSIBILITES



2. le nombre de tirages possibles est $13^3 = 2197$
   - Donc le nombre de tirages possibles est 2197
3. le nombre de tirages contenant 3 boules de même couleur est
   $7^3 + 6^3 = 343 + 216 = 559$
   - Donc le nombre de tirages contenant 3 boules de même couleur est 559
4. le nombre de tirages contenant exactement une boule rouge est : $3 \times 6^1 \times 7^2 = 882$
   - Donc le nombre de tirages contenant exactement une boule rouge est 882
5. le nombre de tirages contenant au moins une boule rouge est
   $$3 \times 6^1 \times 7^2 + 3 \times 6^2 \times 7^1 + 6^3 = 882 + 756 + 216 = 1854$$
   - Donc le nombre de tirages contenant au moins une boule rouge est 1854

Exercice 3

Un sac contient 4 boules rouges, 6 boules blues. On suppose que toutes les boules sont identiques. On tire successivement et sans remise 3 boules de ce sac.

1. Déterminer nombre de tirages possibles ?
2. Déterminer nombre de tirages contenant 3 boules de même couleur ?
3. Déterminer nombre de tirages contenant exactement une boule rouge?
4. Déterminer nombre de tirages contenant au moins une boule rouge ?

Répons

1. Le nombre de tirages possibles est $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$
   - Donc Le nombre de tirages possibles est 720
2. Le nombre de tirages contenant 3 boules de même couleur : $A_4^3 + A_6^3 = 4 \times 3 \times 2 + 6 \times 5 \times 4 = 144$
   - Donc Le nombre de tirages contenant 3 boules de même couleur 144
3. Le nombre de tirages contenant exactement une boule rouge est
   $3A_4^1 \times A_6^2 = 3 \times 4 \times 6 \times 5 = 360$
   - Donc Le nombre de tirages contenant exactement une boule rouge 360
4. le nombre de tirages contenant au moins une boule rouge est
   $$3 \times A_4^1 \times A_6^2 + 3A_4^2 \times A_6^1 + A_4^3 = 3 \times 4 \times 6 \times 5 + 3 \times 4 \times 3 \times 6 + 4 \times 3 \times 2$$
   $$= 360 + 216 + 24 = 600$$
   - Donc le nombre de tirages contenant au moins une boule rouge 600