Lycée qualifiant EL JAHID P : Akaddar Driss
NIVEAU : 1BACLSHF 2022/2023

La dérivée d'une fonction Numérique

I. Le dérivé d'une fonction en un point

Activité

On considérant la fonction f tel que $f(x) = x^2 - 1$

1) Calculer les limites suivantes $d_1 = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ Et $d_2 = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ Et $d = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $et\ a \in R$

2) Construire dans un repère orthonormé la courbe de f et les droites (D) et (D') d'équations respectivement $y = d_1(x-1) + f(1)$; $y = d_2(x-2) + f(2)$; Quesque remarque ?

1) Le nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouverte I et x_0 est un élément de I

- On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un nombre réel d tel que $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = d$
- Le nombre d s'appelle le nombre dérivé de la fonction f en x_0 se note $f'(x_0)$ et on écrit $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Remarque

- Si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ on dit que f n'est pas dérivable en x_0

2) Equation de la tangente

Définition

Soit f une fonction et x_0 un element inclus à D_f

- Si f dérivable en x_0 alors la courbe de f admet une droite tangent (D) au point d'abscisse x_0 son équation s'écrit $y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$

Application

Soient $f\ et\ g$ les fonctions définie par $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$

1) Déterminer $D_f\ et\ D_g$respectivement $f\ et\ g$
2) Montrer que f dérivé en 2 et donner l'équation de la tangent de C_f au point d'abscisse 2
3) Montrer que g dérivé en 3 et donner l'équation de la tangent de C_g au point d'abscisse 3

II. La fonction dérivée

1) La fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

La fonction que lie chaque nombre $x \in I$ par le nombre $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivé et notée f'

Exemple

On considéré la fonction f tel que $f(x) = x^2$; On Etudier la dérivabilité de f en ; Soit $x_0 \in R$

On a $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$

Donc f dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 2x_0$

Donc f dérivable en R et $f'(x) = 2x$

2) La fonction dérivée des fonctions usuelles

fonction f	Domaine de définition de f	fonction f'	Domaine de définition de f'
a ($avec$ $a \in R$)	R	0	R
x	R	1	R
x^n ; $n \in N^*$	R	nx^{n-1}	R
$\frac{1}{x^n}$ $avec$ $n \in N^*$	R^*	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	R^*
$\sqrt{x}$	R^+	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	R	$\cos x$	R
$\cos x$	R	$-\sin x$	R
$\tan x$	$R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in Z\right\}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in Z\right\}$

3) Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété

Soient f et g deux fonction dérivable sur intervalle I et $\lambda \in R$

- La fonction $f + g$ dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$
- La fonction λf dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$
- La fonction $f \times g$ dérivable sur I et $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$
- La fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable pour tout x de I tel que $f(x) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$
- La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable pour tout x de I tel que $g(x) \neq 0$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$

Exemple

Soit f une fonction définie sur R par $f(x) = 3x^5 - 4x^2$

On a $f'(x) = (3x^5)' - (4x^2)' = 15x^4 - 8x$

Donc $f'(x) = 15x^4 - 8x$

Résultât

- Les fonction polynômes son dérivables sur R
- Les fonctions rationnelles dérivables sur son domaine de définition

Application

Etudier et donné la fonction dérivé de f dans chaque cas :

1) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 9$	4) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$
2) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$	5) $f(x) = 3x^5 - 7x^4 + 10x - 99$
3) $f(x) = \sqrt{3x + 6}$	6) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x}$

IV. Application de la dérivation

1) Variation d'une fonction dérivable

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- **On dit que f strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I; f'(x) > 0$**
- **On dit que f strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I; f'(x) < 0$**
- **On dit que f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I; f'(x) = 0$**

2) Les extrémités d'une fonction numérique

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouverte I et $x_0 \in I$

- **Si f dérivable en x_0 et admet une extrémité en x_0 alors $f'(x_0) = 0$**
- **Si $f'(x_0) = 0$ et $f'(x)$ changeant le signe en x_0 alors $f(x_0)$ est une extrémité de f**

Remarque

Si $f'(x_0) = 0$ ne signifie pas que $f(x_0)$ est une extrémité de f