Correction : Devoir N°2 : B

Exercice1 : 8points

1pt +1pt +1pt+2pt+2pt+1pt

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $r = 2$

1) Calculer u_2 et u_n

2) Ecrire u_7 en fonction de n

3) Calculer : u_7

4) Calculer la somme suivante : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_7$

5) Déterminer n si on a : $u_n = 4047$

6)Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :$v_n = 2u_n - 3$

Calculer v_1 et v_2

Solution :1) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $r = 2$

a) $u_1 = u_0 + r = 3 + 2 = 5$

b) $u_2 = u_1 + r = 5 + 2 = 7$

2) Puisque $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $r = 2$

Donc : $u_n = u_0 + nr = 3 + 2n$

3) $u_n = 3 + 2n$ donc : $u_7 = 3 + 2\times 7 = 3 + 14 = 17$

4) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_7 = (7 - 1 + 1)\frac{5 + 17}{2}$$

$$S = 7\frac{5 + 17}{2} = 7\frac{22}{2} = 7\times 11 = 77$$

5) On a : $u_n = 4047$ donc : $3 + 2n = 4047$

Donc : $2n = 4047 - 3$

Donc : $n = \frac{4044}{2} = 2022$

6)On a : $v_n = 2u_n - 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $v_1 = 2u_1 - 3 = 2\times 5 - 3 = 10 - 3 = 7$

$v_2 = 2u_2 - 3 = 2\times 7 - 3 = 14 - 3 = 11$

Exercice2 : 7 points (2pt +2pt+1pt+2pt)

Soit $(u_n)_n$ une suite tel que :

$u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

1) Déterminer la nature de la suite $(u_n)_n$ et vérifier que sa raison est : 3

2) Calculer u_2 et u_n

3) Ecrire u_7 en fonction de n

4) Calculer en fonction de n la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

Solution :1) On a : $u_{n+1} = 3u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3 = q \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Par suite : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 4$ et sa raison $q = 3$

2) a) On a : $u_1 = q \times u_0$ donc $u_1 = 3 \times 4 = 12$

b) On a : $u_2 = q \times u_1$ donc $u_2 = 3 \times 12 = 36$

2) Ecriture de u_7 en fonction de n :

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 4$ et sa raison $q = 3$

On a donc : $u_n = u_0 \times q^n$ donc : $u_n = 4 \times 3^n$

3) Calcul en fonction de n la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 4$ et sa raison $q = 3$

Alors : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n-0+1}}{1-q}$

On a donc : $S = 4\frac{1-3^{n+1}}{1-3} = 4\frac{1-3^{n+1}}{-2} = -2\left(1-3^{n+1}\right)$

Exercice3 : 5 points (3pt +2pt)

Soient les fonctions f et g defines par :

$f(x) = \frac{3x^2 - 2}{2x - 10}$ et $g(x) = x^2 - 6x + 10$

1) Déterminer D_f et D_g 2) calculer : $g(3)$

3) Montrer que g est minorée par $g(3)$ sur $\mathbb{R}$

Solution :1) a)$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 10 \neq 0\}$

$2x - 10 = 0 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{2} \Leftrightarrow x = 5$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$

b) $g(x) = x^2 - 6x + 10$ g est une fonction polynôme

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) calcul de : $g(3)$

$g(2) = 3^2 - 6 \times 3 + 10 = 9 - 18 + 10 = 19 - 18 = 1$

3) Montrons que f est minorée par $g(3) = 1$ sur $\mathbb{R}$:

Il suffit de montrer que : $1 \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$?

$g(x) - 1 = x^2 - 6x + 10 - 1 = x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times 3x + 3^2 = (x-3)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $g(x) - 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Par suite : $1 \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Conclusion : g est minorée par $g(3) = 1$ sur $\mathbb{R}$