Devoir maison N° 1

Exercice 1 (Questions indépendantes):

1)- Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right) & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est continue en zéro.

2)- Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants : $a = \sqrt{5}$; $b = \sqrt[3]{7}$; $c = \sqrt[4]{11}$.

3)- Soit g une fonction continue sur $[0,1]$ telle que : $g(1) = \sqrt{2}$.

Montrer que l'équation $\sqrt[3]{x}g(x) = 1$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]0,1[$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x - \sqrt{2x-1}$.

1)- Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Montrer que f est continue sur D_f .

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en $\dfrac{1}{2}$, puis interpréter le résultat graphiquement.

4)- Vérifier que : $\forall x \in \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$.

5)- Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^3 + x + 1$.

1)- Étudier les variations de f .

2)- a)- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

b)- Vérifier que : $-1 < \alpha < 0$

3)- Montrer que : $1+\alpha^2 = \dfrac{-1}{\alpha}$ et $\alpha + \sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1+\alpha}}} = 0$.

4)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

5)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 0, puis vérifier que : $\left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{3\alpha^2+1}$.

6)- Soit g la fonction numérique définie par : $\begin{cases} g(x) = x^2 & ; \ x \geq \alpha \\ g(x) = -1 - \dfrac{1}{x} & ; \ x < \alpha \end{cases}$.

Étudier la continuité de g en α .

Exercices de soutien

Exercice 1

1)- Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants : $a=\sqrt{2}$; $b=\sqrt[4]{5}$; $c=7^{\frac{4}{3}}$.

2)- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}-3=0$.

3)- Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{11-3\cos x}-2}{x^2}$.

4)- Simplifier le nombre suivant : $A=\dfrac{\sqrt[3]{32}\times\sqrt{8}\times\sqrt{\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[5]{\sqrt{32}}}$.

5)- Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x-a)}{x}\sin x \ ; \ x\neq 0 \\ f(0)=3 \end{cases}$, où a est un nombre réel.

a)- Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en zéro.

b)- Pour la valeur de a trouvée dans la question précédente, étudier la dérivabilité de f en zéro, puis interpréter le résultat graphiquement.

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x^5+8x^3-8$.

1)- Étudier les variations de f .

2)- a)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

b)- Vérifier que : $0<\alpha<1$

3)- Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

4)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

5)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 0, puis exprimer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ en fonction de α .

6)- Soit g la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} g(x)=\sqrt[3]{x^2+8} & ; \ x\leq\alpha \\ g(x)=\dfrac{2}{x} & ; \ x>\alpha \end{cases} .$$

a)- Montrer que g est continue en α .

b)- Étudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x}-2\sqrt{x+1}$.

1)- Déterminer D_f , puis calculer la limite de f en $+\infty$.

2)- Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en -1, puis interpréter le résultat graphiquement.

4)- a)- Calculer $f'(x)$, pour tout $x \in D_f - \{-1\}$.

b)- Déduire les variations de f.

5)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans $]0,+\infty[$, et que : $\frac{1}{4} < \alpha < 1$.

6)- Vérifier que : $\alpha^3 + \alpha^2 = \frac{1}{4}$.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x\left(\sqrt{x} - 2\right)^2$.

1)- Déterminer D_f , puis étudier la continuité de f sur D_f.

2)- Étudier la dérivabilité de f en zéro, puis interpréter le résultat graphiquement.

3)- Vérifier que : $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = 2\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)$.

4)- Dresser le tableau de variations de f.

5)- Soit g la restriction de f sur un l'intervalle $I = [1,4]$.

a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Dresser le tableau de variations de g^{-1}.

c)- Simplifier $g^{-1}(x)\left(\sqrt{g^{-1}(x)} - 2\right)^2$, pour tout $x \in J$.

Devoir surveillé N° 1

Exercice 1 (Questions indépendantes): 7 points

1)- Comparer $\sqrt{2}$ et $\sqrt[4]{5}$. **1pt**

2)- Résoudre dans $\mathbb{R}$ ce qui suit : $(x+1)^6 - 7 = 0$; $\sqrt[3]{3x-4} \leq 2$. **1pt + 1,5pt**

3)- Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 - \cos(x)$.

a)- Justifier pourquoi g est continue sur $\mathbb{R}$. **0,75pt**

b)- En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. **0,75pt**

4)- Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{ax}{5x - 2\sin x} \; ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$, où a est un nombre réel.

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en zéro. **2pts**

Problème : 13 ponits

Partie A :

Soit P la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

1)- Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3(x^2 - 1)$. **0,75pt**

2)- Dresser le tableau de variations de P (***Les limites ne sont pas demandées***). **0,75pt**

3)- En déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $P(x) \geq 0$. **0,5pt**

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 8\sqrt{x} - 5$.

1)- a)- Vérifier que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = (x-3)^2 + 8\sqrt{x} - 14$. **0,75pt**

b)- En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. **0,5pt**

2)- Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$. **1pt**

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter le résultat graphiquement. **1,5pt**

4)- a)- Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2P(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. **1,5pt**

b)- En utilisant la question **A.3**), déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. **1pt**

5)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. **1,5pt**

6)- Dresser le tableau de variations de f^{-1}. **1pt**

7)- a)- Calculer $f(4)$. **0,25pt**

b)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 3, puis calculer : $(f^{-1})'(3)$. **2pts**