Exercice 1 : (3×1 points)

1. Dans le plan complexe, l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant : $|z-2| = |z-i|$ est la droite d'équation :

   a) $-4x + 2y + 3 = 0$ c) $y = 2x + 1$ e) $y = 2x - \dfrac{3}{2}$

   b) $y = -2x + 3$ d) $y = -2x - 1$

2. On considère les nombres complexes suivants : $a = 2, b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$

   a) $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{c-a}{b-a} = \cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}$

   b) $\dfrac{c-a}{b-a} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ d) $\dfrac{c-a}{b-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3. On pose : $A = 1+\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)+\cdots+\cos\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)$, $B = \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)+\cdots+\sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)$ et on considère le nombre complexe $z = A + iB$. z est égal à :

   a) $z = 0$ b) $z = -2i$ c) $z = \dfrac{1}{2}$ d) $z = 2i$

   e) Toutes les réponses proposées sont fausses

Exercice 2 : (7 points)

On considère dans le plan complexe $(\mathscr{P})$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{2}, \quad z_B = 1 + i, \quad z_C = 1 - i \quad \text{et} \quad z_D = 2 + \sqrt{2}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$. **(1 pt)**

2. a) Montrer que : $z_B - z_A = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(z_C - z_A)$. **(0,5 pt)**

   b) Écrire $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sous forme exponentielle.. **(0,5 pt)**

   c) Montrer que : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ et calculer $\dfrac{AB}{AC}$. **(0,75 pt)**

   d) En déduire que B est l'image de C par la rotation R de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. **(1 pt)**

3. a) Montrer que $ACDB$ est un losange. **(0,25 pt)**

   b) Montrer que : $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(1 + \sqrt{2} + i)[2\pi]$. **(0,5 pt)**

   c) En déduire que : $\arg(1 + \sqrt{2} + i) \equiv \dfrac{\pi}{8}[2\pi]$. **(0,5 pt)**

   d) Écrire $1 + \sqrt{2} + i$ sous forme trigonométrique. **(0,5 pt)**

4. Soit (Δ) l'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ vérifiant : $|z - 1 - i| = |z - 1 + i|$

   a) Interpréter géométriquement l'égalité précédente. **(1 pt)**

   b) Montrer que (Δ) est la droite (OA). **(0,5 pt)**

Exercice 3 : (10 points)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{1+e^{-x}} - x$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**

2.
   a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. **(1 pt)**
   b. En déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique au voisinage $-\infty$ dont on précisera la direction. **(0,5 pt)**

3.
   a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que la droite (D) d'équation $y = -x+1$, est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage $+\infty$. **(1 pt)**
   b. Étudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport la droite (D). **(1 pt)**

4.
   a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = -\left(1 + \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}}\right)$. **(1 pt)**
   b. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**
   c. Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. **(0,25 pt)**
   d. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α tel que $1 < \alpha < \ln(4)$. **(1 pt)**
   e. Construire la courbe (C_f) et la droite (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **(1,25 pt)**

5.
   a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer. **(0,5 pt)**
   b. Déterminer le sens de variations de f^{-1} sur J. **(0,25 pt)**
   c. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ et que $\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2}) = -\dfrac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{8}}$. **(0,75 pt)**
   (Remarque que $f(0) = \sqrt{2}$)
   d. Tracer, dans le même repère, la courbe représentative de f^{-1}. **(0,5 pt)**

.... Fin de devoir et bon courage ....