DEVOIR À DOMICILE N°1 SEMESTRE II

Prof: **Ahmed KADDI**
Lycée: Medhi Ben Barka

Niveau : 2.BAC PC et SVT
Année scolaire : 2021/2022

Exercice 1

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (Unité : 2 cm)

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
2. a. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
   b. Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$, puis montrer que la courbe (C) est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty, 2 + \ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2 + \ln 4, +\infty[$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.
4. a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -\left(e^{x-2} - 1\right)^2$
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis montrer que $A(2, 2)$ est un point d'inflexion de (C).
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$
7. Construire (Δ) et (C) dans le repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$ ci-dessous (prenons $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$)
8. a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
   b. Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} (Remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice $y = x$)
   c. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(2 - \ln 3)$ (Remarquer que $f^{-1}(2 - \ln 3) = 2 + \ln 3$)

Exercice 2

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$
2. On pose $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
   a. Écrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2020} est un nombre réel
   b. Soit le nombre complexe $b = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$. Prouver que $b^2 = a$
3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que $c = 1$.
   La rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z'.
   a. Vérifier que $z' = bz$

- **b** Déterminer l'image de C par la rotation R et montrer que A est l'image de B par R.

4
- **a** Montrer que $|a-b| = |b-c|$ et en déduire la nature du triangle ABC
- **b** Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$

5 Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ et D l'image de A par T.
- **a** Vérifier que l'affixe de D est b^2+1
- **b** Montrer que $\frac{b^2+1}{b} = b + \bar{b}$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés.

Exercice 3

1 Soit (E) l'équation différentielle $2y' + y = 2$.
- **a** Résoudre l'équation (E).
- **b** Déterminer la solution f de l'équation(E) qui vérifie $f(0) = 1$.

2 Soit (F) l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$.
- **a** Résoudre l'équation (F).
- **b** Déterminer la solution g de l'équation (F) qui vérifie $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$.