

Noter bien : Les réponses non justifiées ne seront pas prise en compte

Problème(11pts)

Partie I : Soient g la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $g(x) = 1 + e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2}{x} - 1 \right)$ Et le tableau de variations de la fonction g ci-contre

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$g(x)$	0	$g(-2)$	1	$+\infty$

1.

- a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α tel que : $-2 < \alpha < 0$. (0, 5)
- b. Vérifier que : $e^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha-2}$. (0, 25)
2. En déduire que : $(\forall x \in]-\infty; \alpha])$, $g(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [\alpha; 0[\cup]0; +\infty])$, $g(x) \geq 0$. (0, 5)

Partie II: On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right)^2 & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1. Vérifier que $D_f = \mathbb{R}$. (0, 5)
2. Montrer que la fonction f est continue à gauche en 0. (0, 5)
3. a. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $f(x) = x + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 2)$. (0, 5)
- b. Déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, puis interpréter le résultat géométriquement. (0, 5)
4. a. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right)^2$. (0, 5)
- b. Déduire que (C) admet une asymptote horizontale à déterminer, au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. (0, 5)
5. a. Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 1$. (0, 5)
- b. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) à gauche au point d'abscisse 0. (0, 5)
6. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $f'(x) = \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right) g(x)$. (0, 75)
- b. Vérifier que $f'(\alpha) = 0$, puis interpréter le résultat géométriquement. (0, 5)
7. a. Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[)$, $1 - e^{\frac{1}{x}} < 0$. (0, 5)
- b. Vérifier que $f(\alpha) = \frac{4\alpha}{(\alpha-2)^2}$. (0, 25)
- c. Dresser le tableau de variations de f . (0, 5)
8. On admet que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $f''(x) = \frac{2}{x^3} \left(2e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) e^{\frac{1}{x}}$ (Page: 2/2)

a. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $2e^{\frac{1}{x}} - 1 \leq 0$. (0,5)

b. En déduire que (C) , la courbe de la fonction f , admet un point d'inflexion à déterminer. (0,5)

9.

La courbe **ci-contre** est la courbe représentative de la fonction h définie par :

$$h(x) = x \left(2 - e^{\frac{1}{x}} \right)$$

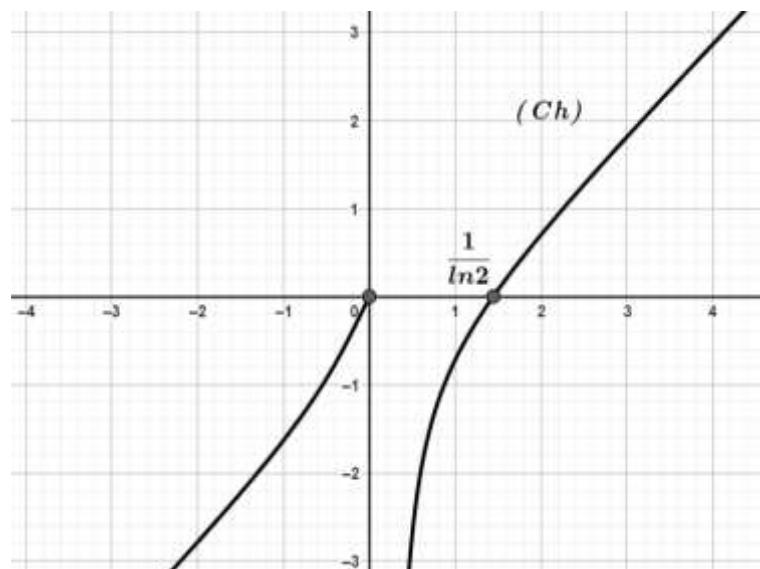
a. Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*), x - f(x) = h(x) e^{\frac{1}{x}}. \quad (0,5)$$

b. En déduire la position relative de (C)

et la droite (T) d'équation $y = x$ sur \mathbb{R} ,

puis déduire que $f(\alpha) > \alpha$. (0,75)



10. Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe (C) et la droite (T) . (1)

(On prend $\ln 2 \approx 1,1$; $\alpha \approx -0,8$; $f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = -\frac{1}{4\ln 2}$ et $f(\alpha) \approx -0,41$)

Exercice Les nombres complexes(9pts)

1. a. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} , des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$ (1)

b. Ecrire les solutions z_1 et z_2 de cet équation sous la forme trigonométrique. (1)

c. Montrer que $z_1^{2024} + z_2^{2024} = 2^{1013}$. (0,75)

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points

A, B, C, et D d'affixes **respectives** : $a = -\sqrt{2}$, $b = 1 + i$, $c = \bar{b}$, et $d = 2 + \sqrt{2}$

a. Montrer que $\frac{b-a}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{4}}$. (1)

b. En déduire que **B** est l'image de **C** par la rotation **R** de centre **A** et d'angle $\frac{\pi}{4}$. (0,5)

c. Montrer que $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et calculer $\frac{AB}{AC}$. (1)

d. Montrer que le quadrilatère **ACDB** est un **losange**. (1)

3. Soit **P** le point du plan complexe d'affixe $p = 1 + \sqrt{2} + i$.

a. Vérifier que : $|p| = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ et $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(p) [2\pi]$. (1)

b. En utilisant la question (2.d), déduire que $\arg(p) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$. (0,5)

c. Déduire **p** sous la forme trigonométrique. (0,5)

d. Montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$. (0,75)

Bonus

4. Soit (Δ) l'ensemble des points **M(z)** tel que $|z - b| = |z - c|$.

a. Déterminer l'ensemble (Δ) , puis vérifier que l'ensemble (Δ) est l'**axe imaginaire**

b. Soit **M(z)** un point du plan tel que $M \in (AC)$.

Prouver que : $\bar{p} \cdot \bar{z} - p \cdot z = \sqrt{2} \cdot (p - \bar{p})$ (remarquer que les points **M**, **A** et **C** sont alignés)

c. Montrer que **l'unique** point d'intersection des deux droites (Δ) et (AC) est le point d'affixe $i(2 - \sqrt{2})$.

“BON COURAGE”

Page: 2/2