

Exercice 1 : (10 points)

1pt | 1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = \sqrt{3} + i$, $b = 1 + i$ et $c = 1 - \sqrt{3}i$.

1.5pt 2. Donner la forme trigonométrique de a, b et c.

1pt	3. Montrer que : $a^{24} + b^{24}$ est un nombre réel.
-----	--

1.5pt 4. Donner la forme trigonométrique de $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$ et en déduire que le triangle OAC est rectangle et isocèle en O.

5. Soit T la transition de vecteur \overrightarrow{CO} et D l'image de A par la translation T et d l'affixe de D

1 pt **a.** Montrer que $d = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$.

1pt	b. Vérifier que $d = ab$
-----	---------------------------------

1pt **c.** En déduire : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

1pt 6. Soit $M'(z')$ image de point $M(z)$ par la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer c' l'affixe de C' l'image de C par la rotation r .

1pt 7. Déterminer l'ensemble des points z d'affixe z satisfaisant la condition : $|z - 1 - i| = 6$

Exercice 2 : (10 points)

Partie 1 :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $\underline{f(x) = x^2 - 2(x - 1)e^{x-1}}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1.25pt 1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ **et** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, déduire la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$.

1.25pt 2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ **et** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, déduire la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

1pt **3. a-** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) , f'(x) = 2x(1 - e^{x-1})$.

1pt **b** – montrer que f est **strictement décroissante** sur $]-\infty; 0]$ et $[1; +\infty[$ et **strictement croissante** sur $[0; 1]$.

0.5 pt	c- dresser la table des variations de f sur \mathbb{R} .
--------	--

0.5pt 4. a-Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) - x = (x - 1) g(x)$ tel que $g(x) = x - 2e^{x-1}$.

1pt **b-** En étudiant les variations de $g(x)$ sur \mathbb{R} **montrer que** $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) < 0$.

0.5pt c- Montrer que $f(x) \geq x$ sur $]-\infty; 1]$ et $f(x) \leq x$ sur $[1; +\infty[$.

5. Soit H la fonction définie sur \mathbb{R} par : $H(x) = (x - 2)e^{x-1}$

0.5pt a. Vérifier que la fonction H est une primitive de h sur \mathbb{R} . **Tel que** $h(x) = (x - 1)e^{x-1}$.

0.75pt **b.** Déterminer les primitives de f sur \mathbb{R} .

Partie 2 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} = f(u_n)$

0.5pt 1. Montrer par récurrence $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n \leq 1$.

0.75pt 2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Dédurre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

0.5pt	3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
-------	--