DEVOIR SURVEILLÉ N°1 DEUXIÈME SEMESTRE

Prof: **Ahmed KADDI**
Lycée: Medhi Ben Barka

Niveau : 2.BAC PC et SVT
Année scolaire : 2021/2022

Exercice 1

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}\left(2-e^{2x}\right) - x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$ (Unité : 2 cm)

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
2. a. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
   b. Résoudre l'équation $2 - e^{2x} = 0$, puis montrer que la courbe (C) est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty, \frac{\ln 2}{2}]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[\frac{\ln 2}{2}, +\infty[$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.
4. a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -\left(2e^{2x}-1\right)^2$
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Montrer que $A(-\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{4})$ est un point d'inflexion de (C).
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0 < \alpha < \frac{\ln 2}{2}$
7. Construire (Δ) et (C) dans le repère $(O,\vec{i};\vec{j})$ ci-dessus (On prendra $-\frac{\ln 2}{2} \approx -0,35$ et $\frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2} \approx 1,1$)
8. a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
   b. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} (Remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice $y = x$)
   c. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$ (Remarquer que $f^{-1}(1) = 0$)

Exercice 2

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$
2. On pose $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
   a. Écrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2022} est un nombre réel
   b. Soit le nombre complexe $b = \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$. Prouver que $-ib^2 = a$
3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que $c = i$.
   La rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z'.

- **a** Vérifier que $z' = e^{i\frac{\pi}{8}}z$
- **b** Déterminer l'image de A par la rotation R et montrer que C est l'image de B par R.

4
- **a** Montrer que $|a-b| = |b-c|$ et en déduire la nature du triangle ABC
- **b** Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}$

5 Soit T la translation de vecteur $\vec{v}$ et D l'image de A par T.
- **a** Vérifier que l'affixe de D est $i - ib^2$
- **b** Montrer que $\frac{b}{i-ib^2} = b + \bar{b}$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés.

Exercice 3

1 Soit (E) l'équation différentielle $2y' - 2y = 1$.
- **a** Résoudre l'équation (E).
- **b** Déterminer la solution f de l'équation(E) qui vérifie $f(0) = 1$.

2 Soit (F) l'équation différentielle $y'' - 6y' + 9y = 0$.
- **a** Résoudre l'équation (F).
- **b** Déterminer la solution g de l'équation (F) qui vérifie $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.