Lycée Anisse | DSN°4 | 2BAC:SP

Exercice N°1 : «4points »

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. On pose: $z=2+2i\sqrt{3},\ z'=-1+i$

1) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe zz' **«1pt»**

2) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes z et z' **«2pts»**

3) Déduire alors que: $Arg\left(zz'\right)\equiv\dfrac{-11\pi}{12}\left[2\pi\right]$, puis montrer que $\tan\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=-2+\sqrt{3}$ **«1pt»**

Exercice N°2: «4points »

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. Considérons les points A, B et C d'affixes respectives: $a=1+i, b=1-i$ et $c=-1+i$.

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation $\left(E\right): z^2+2z+2=0$ **«1pt»**

2) Montrer que l'affixe du point D, l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ est $d=-1-i$ **«1pt»**

3) Montrer que: $BC=AD$ et $\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$ **«1pt»**

4) Déduire alors la nature du quadrilatère $ABDC$ **«1pt»**

Exercice N°3 : « 12 points »

A. Soit la fonction numérique f définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right)=e^{2x}-e^{x}+x$

$\left(C\right)$: Sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) Montrer que: $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-\infty$ **«0,75pt»**

2) Soit $\left(\Delta\right)$ la droite d'équation $y=x$

a) Montrer que la droite $\left(\Delta\right)$ est une asymptote oblique à la courbe $\left(C\right)$ au voisinage de $-\infty$ **«0,75pt»**

b) Etudier la position relative de la courbe $\left(C\right)$ et la droite $\left(\Delta\right)$ **«0,75pt»**

3) a) Vérifier que: $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right),\ f\left(x\right)=e^{x}\left(e^{x}-1\right)+x$ **«0,25pt»**

b) Déduire alors que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=+\infty$, puis interpréter graphiquement **«0,75pt»**

4) Montrer que: $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right),\ f'\left(x\right)=2\left(e^{x}-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}$ **«1pt»**

5) Déduire alors que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ **«0,5pt»**

6) a) Montrer que: $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right),\ f''\left(x\right)=e^{x}\left(4e^{x}-1\right)$ **«0,75pt»**

b) Etudier la concavité de la courbe $\left(C\right)$ **«0,75pt»**

7) Donner l'équation de la tangente $\left(T\right)$ à la courbe $\left(C\right)$ au point d'abscisse 0 **«0,75pt»**

8) Tracer dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, les droites $\left(\Delta\right),\left(T\right)$ et la courbe $\left(C\right)$ **«1pt»**

9) Discuter suivant les valeurs du paramètre k, le nombre de solutions de l'équation, $f\left(x^2\right)=k$ **«0,5pt»**

10) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ **«0,75pt»**

11) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0, puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ **«1pt»**

12) Tracer dans le même $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe représentative de la fonction f^{-1} **«0,5pt»**

B. Soit la suite numérique (u_n) définie par: $u_0=-\dfrac{1}{2}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$

1) Montrer que: $(\forall n\in\mathbb{N}), u_n\leq 0$ **«0,25pt»**

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante **«0,25pt»**

3) Déduire alors que la suite (u_n) est convergente, puis calculer sa limite **«0,75pt»**