Lycée Youssef Ibn Tachafine	**devoir surveillé N-2**	2BACSEF-PC
Année scolaire: 2023/2024	**- Durée:2h**	Pr: A.YOUNESS

Exercice 01

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x(x^2+1)}{x^2-1}$ *et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1 *Déterminer D_f , puis étudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f . Justifier les réponses .* $(\mathbf{1.5}pt)$

2 *Montrer que le point $I\,(0;0)$ est un centre de symétrie de (C_f) .* $(\mathbf{0.75}pt)$

3 *Etudier les limites de f aux bornes de D_f et en déduire les asymptotes éventuelles à (C_f) .* $(\mathbf{2.25}pt)$

4 *Montrer que* $(\forall x\in D_f):\ f'(x)=\dfrac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$. $(\mathbf{0.75}pt)$

5 *En exploitant le tableau de variation de la fonction f' , (On donne $\alpha\approx 2.058$) .*

x	$-\infty$	$-\alpha$	-1		0		1	α	$+\infty$
$f'(x)$	1 ↘	0 ↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	1

ⓐ *Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. .* $(\mathbf{0.75}pt)$

ⓑ *Déterminer les points d'extrémums de (C_f) .* $(\mathbf{0.5}pt)$

ⓒ *Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet unique solution β sur l'intervalle $]-1;1[$.* $(\mathbf{0.5}pt)$

ⓓ *Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0 .* $(\mathbf{0.5}pt)$

ⓔ *Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (T) .* $(\mathbf{0.5}pt)$

ⓕ *Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur D_f .* $(\mathbf{0.5}pt)$

ⓖ *Déduire la concavité de la courbe (C_f) en précisant l'abscisses de leur point d'inflexion .* $(\mathbf{0.75}pt)$

ⓗ *Montrer que $f(-\alpha)+f(\alpha)=2f(\beta)$.* $(\mathbf{0.5}pt)$

6 *Montrer qu'il existe un seul point M, d'abscisse $x_M>1$ dont la tangente (T_M) à (C_f) en M, soit parallele à la droite :* $y=-\dfrac{1}{9}x-\dfrac{32}{9}$. $(\mathbf{bonus})$

7 *Soit h la restriction de la fonction f sur $]-1;1[$*

ⓐ *Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.* $(\mathbf{0.5}pt)$

ⓑ *Montrer que :* $(h^{-1})'(0)=\dfrac{(\beta^2-1)^2}{\beta^4-4\beta^2-1}$. $(\mathbf{0.75}pt)$

ⓒ *Construire (C_f) , (T) et $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. $(\mathbf{1.75}pt)$

Exercice 02

Soit (U_n) *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{2U_n + 3} \end{cases}$. $\forall n \in \mathbb{N}$

1. *Calculer* U_1 *et* U_2. $(0.5pt)$
2. *Montrer que* $U_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $(0.75pt)$
3. *Vérifier que* $U_{n+1} - U_n = \dfrac{-2(U_n^2 - 1)}{2U_n + 3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $(0.5pt)$
4. *Montrer que* (U_n) *est décroissante et en déduire que* $1 < U_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $(0.75pt)$
5. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{5}(U_n - 1)$. $(0.75pt)$
6. *En déduire que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$. $(0.75pt)$
7. *On considère la suite* (V_n) *définie par :* $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$. $\forall n \in \mathbb{N}$

   a. *Montrer que* (V_n) *et géométrique de raison* $q = \dfrac{1}{5}$ *, puis calculer* V_0. $(1pt)$

   b. *Exprimer* (V_n) *puis* (U_n) *en fonction de* n. $(1.5pt)$

   c. *Montrer que* $S_n = V_0 + V_1 + ...V_{n-1} = \dfrac{5}{12} - \left(1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right)$. $\forall n \in \mathbb{N}$. $(0.75pt)$

   d. *En déduire* $T_n = \dfrac{2}{U_0 + 1} + \dfrac{2}{U_1 + 1} + \ldots + \dfrac{2}{U_{n-1} + 1}$ *en fonction de n.* $(Bonus)$

   Nb: $\forall k \in \mathbb{N} :\ V_k = 1 - \dfrac{2}{U_k + 1}$