Lycée Mohmed V
Date:17/01/2024
Durée: *2 heures*

✾ Devoir surveillé ✍

Semestre I

Prof: H.MEKOUAR
Niveau: $2^{\text{ème}}$ Bac PC
Année Scolaire: 2023/2024

Exercice 1 (6points)

On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) = x^5 + x^3 - 1$

1. Donner le tableau de variations de la fonction h
2. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
3. En utilisant La méthode de dichotomie, Donner un encadrement de α d'amplitude 0.25 .
4. Vérifier que : $\alpha = \sqrt[5]{1 - \alpha^3}$ et que : $\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{1+\alpha^2}}$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $\frac{x-1}{h(x)} < 0$

Exercice 2 (2points)

On considère la fonction numérique F définie par:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+7}+\sqrt{x+3}-4}{x-1}, & \text{si } x \geq -1 \\ a & \text{, sinon.} \end{cases}$$

Donner la valeur de a pour que F soit continue en 1. (on donne : $t - 1 = (\sqrt[3]{t} - 1)(\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{t} + 1)$

Exercice 3 (12points)

Soit f la fonction définie par: $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Montrer que f est définie sur : $D_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
4. Montrer que f est continue sur $[1; +\infty[$.
5. Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 puis interpreter le résutat obtenu.
6. a) Montrer que $f'(x) = \frac{2x\left(x^2 - 2\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1}+1\right)}$ pour tout $x \in]1; +\infty[$
   b) Dresser le tableau de variations de f sur D_f .
7. Etudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$.
8. Tracer la courbe (C_f) .
9. Soit g la restriction de f sur $[\sqrt{2}; +\infty[$
   a) Montrer que g admet une réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J à déterminer.
   b) montrer que $\forall x \in \left[\sqrt{2}; +\infty\right[\; ; \quad g(x) = \left(\sqrt{x^2-1} - 1\right)^2$
   c) Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1}.
   d) En déduire $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.
   e) Calculer $(g^{-1})'(4 - 2\sqrt{3})$