Devoir Surveillé N : 3**Exercice : (4pts)**

● Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur l'intervalle I , dans chacun des cas suivants :

1)- $f(x) = (x+1)(x^2 + 2x + 1)^4$; $I = \mathbb{R}$; 2)- $f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$; $I = [1, +\infty[$ (2pts)

3)- $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$; $I =]0, +\infty[$; 4)- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$; $I =]-1, +\infty[$ (2pts)

Problème:(16pts)◆ Partie 1 :

Soit g la fonction numérique définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - x + 1 - \ln x$

1. a) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. (1pt)

b) Montrer que $(\forall x \in I) : g'(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{x}$ (0,5pt)

2. a) Dresser le tableau de variations de g sur I . (0,5pt)

b) En déduire que : $(\forall x \in I) : g(x) > 0$. (0,5pt)

◆ Partie 2 :

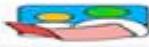
On considère la fonction numérique f définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{\ln x}{x} - \ln x$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu. (1pt)

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. (1pt)

c) Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation : $y = x$ (0,5pt)



2. a) Dresser le tableau de signe de $(1-x)\ln x$ sur $]0, +\infty[$. (0,5pt)

b) Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x de $]0, +\infty[$ et en déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite sur (D) l'intervalle $]0, +\infty[$. (1pt)

3.a) Montrer que $(\forall x \in I) : f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. (1pt)

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$. (0,5pt)

c) Montrer que la droite (D) est la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1. (1pt)

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. (1pt)

e) Construire, dans le même repère $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C_f) . (1pt)

◆ Partie 3 :

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. (1pt)
2. Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(f^{-1})'(1)$. (1pt)
3. Construire la courbe de (C_f^{-1}) dans le même repère $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$. (0,5pt)
4. Montrer que $f^{-1}\left(\frac{2022}{2023}\right) < 1$ (0,5pt)

◆ Partie 4 :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = \frac{23}{22}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

- a) Montrer par récurrence que : $u_n > 1$ pour tout n de \mathbb{N} . (0,5pt)
- b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question partie2-2b)). (0,5pt)
- c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente puis déterminer sa limite. (1pt)

Pr : Younes LABROUFI

Bon courage

بسم الله الرحمن الرحيم

Groupe Scolaire El Azhari
Lycée Les Champions



مجموعة مدارس الأزهرى
ثانوية الأبطال التأهيلية