Devoir Surveillé N : 3

Exercice : (4pts)

Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur l'intervalle I, dans chacun des cas suivants :

1)- $f(x)=(x+1)(x^2+2x+1)^4 ; I=\mathbb{R}$; 2)- $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} ; I=[1,+\infty[$ **(2pts)**

3)- $f(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)} ; I=]0,+\infty[$; 4)- $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} ; I=]-1,+\infty[$ **(2pts)**

Problème:(16pts)

Partie 1 :

Soit g la fonction numérique définie sur $I=]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2-x+1-\ln x$

1. a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} g(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. **(1pt)**

b) Montrer que $(\forall x\in I)$: $g'(x)=\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x}$ **(0,5pt)**

2. a) Dresser le tableau de variations de g sur I . **(0,5pt)**

b) En déduire que : $(\forall x\in I)$: $g(x)\rangle 0$. **(0,5pt)**

Partie 2 :

On considère la fonction numérique f définie sur $I=]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\dfrac{\ln x}{x}-\ln x$

Soit (Cf) la courbe représentative de f dans une repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} f(x)=-\infty$,puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu. **(1pt)**

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$. **(1pt)**

c) Montrer que la courbe (Cf) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation : $y=x$ **(0,5pt)**

2. a) Dresser le tableau de signe de $(1-x)\ln x$ sur $]0,+\infty[$. **(0,5pt)**

b) Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x de $]0,+\infty[$ et en déduire la position relative de la courbe (Cf) et la droite sur (D) l'intervalle $]0,+\infty[$. **(1pt)**

3.a) Montrer que $(\forall x \in I) : f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. **(1pt)**

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$. **(0,5pt)**

c) Montrer que la droite (D) est la tangente à la courbe (Cf) au point d'abscisse 1. **(1pt)**

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left]\dfrac{1}{2},1\right[$. **(1pt)**

e) Construire, dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (D) et la courbe (Cf) . **(1pt)**

- **Partie 3 :**

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. **(1pt)**
2. Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(f^{-1})'(1)$. **(1pt)**
3. Construire la courbe de (Cf^{-1}) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. **(0,5pt)**
4. Montrer que $f^{-1}\left(\dfrac{2022}{2023}\right) \langle 1$ **(0,5pt)**

- **Partie 4 :**

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = \dfrac{23}{22}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Montrer par récurrence que : $u_n \rangle 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. **(0,5pt)**

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question partie2-2)b)). **(0,5pt)**

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente puis déterminer sa limite. **(1pt)**

Pr : Younes LABROUFI

Bon courage