Lycée : Omar Alkhayam	Devoir surveillé 3	Niveau : 2PC
Année scolaire : 2023/2024	Durée: 2H	Prof : ASERRAR

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right)$

1. Montrer que $D_f = \mathbb{R}$.
2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Montrer que la droite $(\Delta) : y = 2x$ est une asymptote oblique de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.
   c) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ).
3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le resultat obtenu.
4. a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b) Etudier le signe de f', puis dresser le tableau de variations de f.
5. Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.
6. Discuter suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation : $e^{2x} - e^{x} + 1 - e^{m} = 0$

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{1+15u_n}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > \dfrac{1}{3}$.
2. Soit la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$.
   a) Monter que (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$, puis écrire v_n en fonction de n.
   b) Déduire u_n en fonction de n, puis déterminer la limite de (u_n).
3. Déterminer en justifiant votre réponse la limite de la suite : $w_n = \ln(u_n) + \ln(72)$.

Exercice 3

1. Calculer les intégrales suivantes:

$$I = \int_{-2}^{0} (x+1)\sqrt{x^2+2x+3}\,dx, \quad J = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx \quad \text{et} \quad K = \int_{0}^{4} \mid x^2 - 2x - 3 \mid \,dx$$

2. En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $L = \displaystyle\int_{0}^{\pi} e^{x}\sin(x)\,dx$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'intégrale $M_n = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x^{n}\sin(x)\,dx$. Montrer que $0 \le M_n \le \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.