Lycée Anisse | DSN°3 | 2BAC : SP

Exercice N°1: «2 points»

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+3n}{4n}$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2+n+2^n}$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n-1}{3^n}$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n}+1}{\sqrt[3]{n}}$

Exercice N°2: «1,5 points»

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes

$f(x)=2x-\ln(1+x)$	$g(x)=\ln\left((x-2)^2\right)$	$h(x)=\sqrt{x-1}+\ln(2-x)$

Exercice N°3: «2,5 points»

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur l'intervalle I indiqué, puis déterminer leurs fonctions dérivées.

$f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right);I=\mathbb{R}$	$g(x)=(x+1)\ln(x+1);I=\left]-1,+\infty\right[$	$h(x)=\dfrac{2+\ln x}{2-\ln x};I=\left]e^2,+\infty\right[$

Exercice N°4: «3 points»

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$, les équations et les inéquations suivantes

$\ln(1-2x)-\ln(x)=0$	$\ln^2(x)+4\ln(x)+3=0$	$\ln(x)\leq 1$	$\lvert 1-\ln(x)\rvert \succ 1$

Exercice N°5: «5 points»

Soit la suite numérique (u_n) définie par: $u_0=0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n-2}{2u_n+5}$

1) Calculer les termes u_1 et u_2 «0,5pt»

2) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $1+u_n\succ 0$ «1pt»

3) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=-2\dfrac{(1+u_n)^2}{2(1+u_n)+3}$ «0,5pt»

4) Déduire alors que la suite (u_n) est décroissante «0,25pt»

5) Montrer que la suite (u_n) est convergente «0,25pt»

6) Soit (v_n) la suite numérique définie par: $(\forall n\in\mathbb{N}),v_n=\dfrac{3}{1+u_n}$

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 «1pt»

b) Déduire alors que: $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \dfrac{-2n}{3+2n}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **«1pt»**

c) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $1+u_n \prec 10^{-3}$ **«0,5pt»**

<u>Exercice N°6:</u> «6 points»

Soit la suite numérique (u_n) définie par: $u_0 = 0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 4}{u_n + 2}$

1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4$ **«1pt»**

2) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{1+u_n}{2+u_n}\right)(4-u_n)$ puis déterminer la monotonie de (u_n) **«1pt»**

3) Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite (u_n) ? **«0,5pt»**

4) Soit (v_n) la suite numérique définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}), v_n = \dfrac{-4+u_n}{1+u_n}$

a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}), 6v_{n+1} = v_n$ puis déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{-4}{6^n}$ **«1pt»**

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \dfrac{4+v_n}{1-v_n}$ puis calculer la limite de la suite (u_n) **«1pt»**

5) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}), 4 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4-u_n)$ **«0,5pt»**

6) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}), 4 - u_n \leq \dfrac{1}{2^{n-2}}$ puis retrouver à nouveau la limite de la suite (u_n) **«1pt»**