



INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
 - ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
 - ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis Suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	5 points
Exercice 2	Calcul de probabilités	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique et calcul intégral	12 points

Exercice 1 : (5 points)

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $u_0 = -\sqrt{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \sqrt{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

0.5 1) Calculer u_1 et u_2 .

1 2) Montrer par récurrence que : ($\forall n \in \mathbb{N}$); $u_n > -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

0.5 3)a- Montrer que ($\forall n \in \mathbb{N}$) : $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}\left(u_n + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

0.75 b- En déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

0.75 4) On pose $v_n = u_n + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0.75 a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

0.75 b- Calculer v_0 puis exprimer v_n en fonction de n

0.5 c- En déduire que ($\forall n \in \mathbb{N}$); $u_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \right]$.

0.25 d- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2 : (3 points)

Un sac contient six boules vertes numérotées : 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 et deux boules rouges numérotées : 1 ; 2.

On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A "Les deux boules tirées sont de même couleur"

B "Les deux boules tirées portent des nombres pairs "

1 1) Calculer $P(A)$ et $P(B)$

1.25 2) Montrer que : $P(A \cap B) = \frac{3}{14}$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

0.75 3) Montrer que la probabilité de « Les deux boules tirées sont de même couleur ou bien elles portent des nombres pairs » est : $\frac{23}{28}$

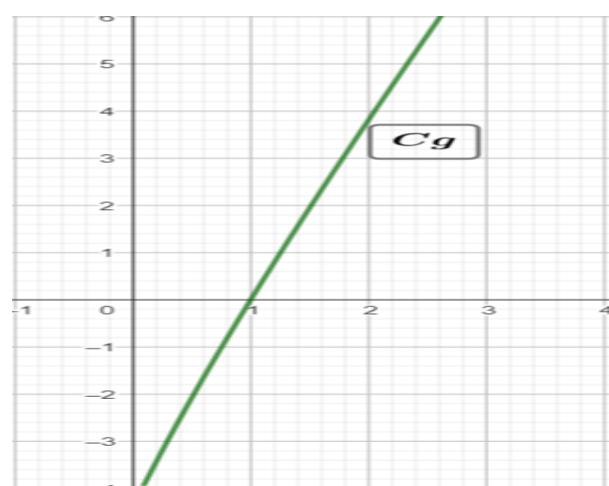
Problème : (12 points)

I- Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

0.5 $g(x) = 2x - 4 + \sqrt{x}(2 + \ln x)$, et soit (C_g) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0.75 1) Calculer $g(1)$.

0.75 2) à partir de la courbe ci-contre, déterminer Le signe de $g(x)$.



II-Soit f la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + (\sqrt{x} - 2) \ln x$, et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0.75 1) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ (on admet que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$) puis interpréter le résultat obtenu géométriquement.

0.5 2)a- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

0.5 b- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x} - 2) \ln x}{x} = 0$ (on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$)

1.5 c- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ puis interpréter le résultat obtenu géométriquement

0.75 3)a- Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x}$.

1 b- En déduire que f est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

0.75 c- Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.

0.75 4)a- Dresser le tableau de signe de $(\sqrt{x} - 2) \ln x$ sur $]0; +\infty[$

0.75 b- En déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) : $y = x$ sur $]0; +\infty[$.

5) Soit h la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$

0.5 a- Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

0.75 b- Montrer que h^{-1} est dérivable en 4 puis calculer $(h^{-1})'(4)$.

1 6)a- Montrer que la fonction $H : x \mapsto -\frac{4}{9}x\sqrt{x} + 2x + \frac{2}{3}(\sqrt{x} - 3) \ln x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto (\sqrt{x} - 2) \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

0.5 b- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_1^4 (\sqrt{x} - 2) \ln x dx$.

7) Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0.75 Calculer l'aire de la partie hachurée dans la figure

