SIMILI DE MATHEMATIQUE

Classe : 2éme ECO. **2021/2022** **Durée :2H**

Exercice 1 :(5pts)

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{3}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Calculer u_1 et u_2 **(0.5)**

2. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n \prec \frac{3}{4}$ **(0.5)**

3.a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=-\frac{4}{5}\left(u_n-\frac{3}{4}\right)$ **(0.5)**

3.b. En déduire que $(u_n)_n$ est une suite croissante. **(0.5)**

4. Déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente. **(0.5)**

5. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n=u_n-\frac{3}{4}$

5.a. Calculer v_0 . **(0.25)**

5.b. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. **(0.75)**

5.c. Donner v_n en fonction de n . **(0.5)**

5.d. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$; $u_n=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{3}{4}$ **(0.5)**

6. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **(0.5)**

Exercice 2 : (5pts)

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher : quatre boules blanches, deux boules noires et une boule rouge.

On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne, et on considére les évènements suivants :

A : les boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux.

B : Parmi les boules tirées il y a une boule rouge.

C : Obtenir au moins une boule blanche.

1.Calculer la probabilité des évènements A, B et C . **(1)**

2.a. Montrer que : **p (B $\cap$ C) =** $\frac{14}{35}$ **.** **(1)**

2.b. Les deux événements B et C sont – ils indépendants ? **(0.5)**

2.c. Sachant que l'évènement B est réalisé calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche. **(0.5)**

3.Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs de boules tirées.

3.a. Vérifier que les valeurs prises par X sont 1,2 et 3. **(0.25)**

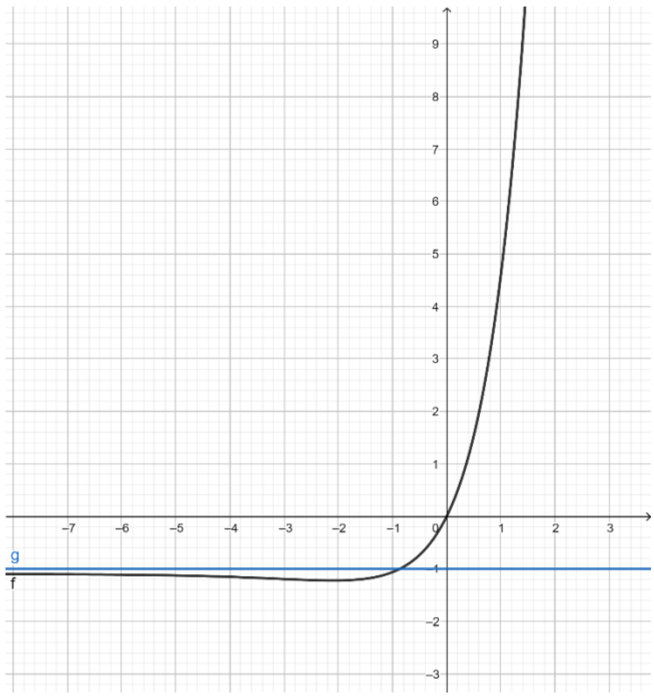
3.b. Montrer que : **p(X= 2) =** $\frac{23}{35}$ **,puis on déduire la loi de probabilité de X .** **(1.5)**

3.c. Calculer l'espérance mathématique de X . **(0.25)**

Exercice 3 :(10pts)

Partie1 :

On considére la fonction g **définie sur** $\mathbb{R}$ **par sa courbe** (C_g) **représentative ci-dessous dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i};\vec{j})$ **.**



1.Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$, **(0.75)**

2. Dresser le tableau de variations de g **.** **(0.75)**

3. Déduire que $g(x)\geq 0$ **pour tout** x **de** $[0;+\infty[$ **et**

$g(x)\leq 0$ **pour tout** x **de** $]-\infty;0]$**.** **(0.75)**

4. On suppose que dans la suite de l'exercice $g(x)=(x+1)e^x-1$

Partie 2 :

On considére la fonction f **définie sur** $\mathbb{R}$ **par :** $f(x)=x(e^x-1)+1$

Soit (Cf) **la courbe représentative de la fonction** f **dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i};\vec{j})$

1.a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **et montrer que la droite** (Δ) **d'équation** $y=-x+1$ **est une asymptote à la courbe** (C_f)**.** **(0.75)**

1.b. Etudier les positions relatives de la courbe (C_f) **et la droite** (Δ)**.** **(0.75)**

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement ce résultat. (0,75)

3. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ (1)

et dresser le tableau de variations de f . (0,75)

4.Déterminer l'équation de la tangente (T) la courbe (C_f) au point d'abscisse 0. (0.5)

5.Construire la courbe (C_f) . (1)

6.a. En utilisant une intégration par partie, montrer que $\int_0^1 xe^x dx = 1$ (1)

6.b.Montrer que l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f) et les droites d' équations $x = 0$ et $x = 1$ est $\dfrac{3}{2}$ ua (1.25)