Exercice 1

1) a) Déterminer une fonction primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x^3$.

b) Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 x^3\, dx$.

2) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $J = \int_1^2 x^3 \ln(x) dx$.

Exercice 2

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[1,e]$ par :

$h(x) = x - \ln x$.

1) Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur $[1,e]$, puis déduire que h est croissante sur $[1,e]$.

2) Dresser le tableau de variation de h sur $[1,e]$ et montrer que $h([1,e]) \subset [1,e]$.

3) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = e \text{ et } u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \le u_n \le e$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) Déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 3

Une urne contient six boules rouges, quatre d'entre elles portent le numéro 1 et deux portent le numéro 2.

Elle contient également huit boules vertes, cinq d'entre elles portent le numéro 1 et trois portent le numéro 2.

On tire au hasard simultanément deux boules de l'urne, on suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) Quel est le nombre des tirages possibles ?

2) On considère les événements suivants :

- A : « Les deux boules tirées sont de même couleur »
- B : « Les deux boules tirées portent le même numéro »

a) Montrer que $p(A) = \dfrac{43}{91}$

b) Calculer $p(B)$

c) Sachant que les deux boules tirées sont de la même couleur, quelle est la probabilité qu'elles portent le même numéro ?

d) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3) On considère la variable aléatoire X qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges tirées.

a) Déterminer les valeurs prises par X

b) Déterminer la loi de probabilité de X

c) Déterminer l'espérance mathématique de X

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2xe^x + 2e^x$, et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Vérifier que $f(x) = x^2\left(1 + 2(1-x)\dfrac{e^x}{x^2}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que $f'(x) = -2x(e^x - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) La courbe ci-dessous est la courbe (C) de la fonction f

a) En utilisant une intégration par partie, montrer que $\int_0^1 x e^x dx = 1$.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie colorée