Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1 \; et \; u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer $u_1 \; et \; u_2$.

2) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 3$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1+u_n)(3-u_n)}{2+u_n}$.

c) En déduire que la suite (u_n) est croissante.

d) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1+u_n}{3-u_n}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{4}{3-u_n} - 1$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 < v_n < \dfrac{-2}{3}$.

c) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5.

d) Exprimer v_n en fonction de n.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{3v_n - 1}{v_n + 1}$

b) Exprimer u_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 2

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher telles que :

- U_1 contient 2 boules rouges et une boule verte
- U_2 contient 3 boules rouges et 5 boules vertes

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On lance un dé équilibré (non truqué) dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

- Si on obtient un nombre pair on tire une boule de l'urne U_1
- Si on obtient un nombre impair on tire une boule de l'urne U_2

Soient $I \; et \; R$ les événements suivants :

I : « Le nombre obtenu est impair »

R : « La boule tirée est rouge »

1) Construire un arbre pondéré modélisant l'expérience aléatoire.

2) Montrer que $p(R) = \dfrac{25}{48} \; et \; p(I \cap R) = \dfrac{3}{16}$.

3) Les événements $I \; et \; R$ sont-ils indépendants ? justifier la réponse.

4) Déterminer $p_I(R)$ et montrer que $p_R(I) = \dfrac{9}{25}$.

Exercice 3

Une urne contient 9 jetons : 4 jetons blancs, 3 jetons rouges et 2 jetons verts. Les jetons sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément 3 jetons de l'urne.

On note A l'événement « aucun jeton blanc n'est tiré »

1) Calculer p(A)

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de jetons blancs restés dans l'urne.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Montrer que $p(X=3)=\frac{10}{21}$.

c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

d) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2+x+x\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter ce résultat graphiquement.

b) Vérifier que $f(x)=\dfrac{2}{x}+1+\ln x$ pour tout $x>0$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=\dfrac{x-2}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

c) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0=1$.

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]0,2]$.

a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}, la fonction réciproque de g.

c) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(3)$.

4) Construire dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les courbes (C) et (C') et la droite (T) où (C') est la courbe représentative de g^{-1}.

5) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $h(x)=f(x)-x$

a) Dresser le tableau de variation de h.

b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$ et que $2<\alpha<3$.

c) Vérifier que $f(\alpha)=\alpha$ et montrer que $\forall x\geq\alpha$, $f(x)\leq x$.

6) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=f(u_n),\ \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \alpha$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

7) a) En utilisant une intégration par partie calculer l'intégrale $K = \int_1^e \ln x \, dx$.

b) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1 \ et \ x = e$.