Etablissement : LYCEE SIDI HAJJAJ

Devoir Libre N° 2
1er Semestre

Pr : Y. Achab

Niveau : 2Bac.PC

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x-1} & ;\ x<0 \\ f(x)=\sqrt{x^2+2x}+x & ;x\geq 0 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2. Étudier la continuité de f en 0.

3. Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter les résultats géométriquement.

4. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.

5. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

6. Montrer que la droite (Δ) de l'équation $y=2x+1$ est une asymptote oblique de la courbe (C_f) au voisinage $+\infty$

7. Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) sur $[0;+\infty[$

8. Montrer que $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2} & ;\ x<0 \\ f'(x)=1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} & ;x>0 \end{cases}$

9. Dresser le tableau de variations de la fonction f

10. Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)\geq 0$

11. Etudier la concavité de (C_f)

12. Tracer (C_f) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

13. Soit g la fonction définie sur $I=\mathbb{R}^+$ par : $g(x)=f(x)$

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b. Montrer que l'équation $g(x)=x+1$ admet une solution unique β tels que $\beta\in]0;1[$

c. Montrer que $\lim\limits_{x\to\beta+1}\dfrac{g^{-1}(x)-g^{-1}(\beta+1)}{x-\beta-1}=\dfrac{1}{2+\beta}$

d. Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans la même repère de (C_f)

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

a. $u_n=\dfrac{n^{\frac{3}{5}}+n^{\frac{6}{7}}}{n^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{4}{9}}}$

b. $u_n=\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+......+\dfrac{1}{n^2+2n+1}$

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=1-\dfrac{9}{u_n+5} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $-2<u_n$

2. a- Montrer que (u_n) strictement décroissant.

b- Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3. Soit la suite (v_n) définie par : $(\forall n\in\mathbb{N});v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$

a- Montrer que (v_n) est arithmétique de raison $r=\dfrac{1}{3}$

b- Ecrire (v_n) en fonction de n

c-Calculer la limite de (u_n)

4. Montrer que : $u_0v_0+u_1v_1+......+u_nv_n=\dfrac{1-n^2}{3}$

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ et soit la fonction f définie par : $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}-1$

1. a - Montrer que : $f(]-1;0[)\subset]-1;0[$

b – En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N});-1<u_n<0$

2. a- Montrer que (u_n) strictement décroissant.

b- Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3. a – résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=x$

b- Montrer que : $\lim u_n\leq-\dfrac{1}{2}$

c-En déduire la limite de (u_n)

S