Etablissement : LYCEE SIDI HAJJAJ	**Devoir Libre N° 1** **1er Semestre**	Pr : Y. Achab
		Niveau : 2Bac.PC

Exercice 1

1. Comparer les deux nombres suivants :

$a=\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{7}$; $b=\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{8}$

2. Montre que : $\sqrt[3]{3\sqrt{21}+8}-\sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}\in\mathbb{N}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$(E_1):\sqrt[3]{1+2x}+\sqrt[3]{1-2x}=2^{\frac{1}{5}};(E_2):\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$

$(E_3):\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-2}>1$;$(E_4):\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-12>0$

4. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}} \quad ; \quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{1-\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \quad ; \quad \lim_{x\to8^-}\frac{\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}}{x-8}$$

5. Montrer que : $\left(\exists c\in\left]\frac{1}{2};1\right[\right)/\sqrt{1+\frac{1}{c}}-\sqrt{c^2+2c}=c$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2+\cos x}-\sqrt{3}}{x^2} & ;x\neq0 \\ f(0)=-\dfrac{\sqrt{3}}{12} & ;x=0 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

3. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ on a : $|f(x)|\leq\frac{2\sqrt{3}}{x^2}$

4. Calculer $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2-x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $f(x)=\sqrt[3]{2x}$

3. Calculer $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

4. La fonction f est-elle dérivable en 0 et en 2 ?

5. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x)=-2x\sqrt{x}+\frac{1}{x}-5x+10$

1. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}_+^*$

2. vérifier que : $1,4<\alpha<1,5$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation suivante :

$(E):2x^3\sqrt{x}-x^2+5x^3-10x^2<0$

Problème

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x-1-\sqrt{\frac{x}{x-1}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2. Calculer les limites aux bornes de D_f

3. Étudier la continuité de f sur D_f .

4. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0.puis interpréter le résultat géométriquement.

5. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f-\{0\}$

6. Dresser le tableau de variations de la fonction f

7. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisses 2.

8. Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en unique point et dont l'abscisse β tels que $\beta\in\left]2;\frac{5}{2}\right[$

9. Montrer que : $\beta-\sqrt[3]{\beta}=1$.

10. Soit g la fonction définie sur $I=]1;+\infty[$ par :

$g(x)=f(x)$

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b. Montrer que g^{-1} sur dérivable J

c. Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1}

d. Montrer que : $\left(g^{-1}\right)'(0)=\frac{2(\beta-1)^3}{1+2(\beta-1)^3}$

S