المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

RESUME DE MATHEMATIQUES

2 BAC PC/SVT BIOF

Version / 17 septembre 2022

TABLE DES MATIÈRES

1 Limites et continuité **5**

1.1 Continuité d'une fonction en un point . . . 5
1.2 Continuité d'une fonction sur un intervalle . . . 5
1.3 Opérations sur les fonctions continues . . . 6
1.4 Image d'un intervalle par une fonction continue . . . 6
1.5 Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone . . . 7
1.6 Fonction racine n-ième . . . 8
1.7 Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif . . . 9

2 Dérivabilité - étude de fonctions **11**

2.1 Dérivabilité d'une fonction en un point - dérivabilité sur un intervalle . . . 11
2.2 Opérations sur les fonctions dérivées . . . 12
2.3 Primitives d'une fonction . . . 13
2.4 Branches infinies . . . 15
2.5 Concavité . . . 17
2.6 Parité - symétrie - périodicité . . . 17

3 suites numériques **19**

3.1 Suite minorée - suite majorée - suite bornée . . . 19
3.2 Suite monotone . . . 19
3.3 Suite arithmétique - Suite géométrique . . . 19
3.4 Limite d'une suite . . . 20
3.5 Critères de convergence . . . 21
3.6 Suites particulières . . . 21

4 Fonctions logarithmiques **23**

4.1 Fonction Logarithme népérien . . . 23
4.2 Dérivée logarithmique d'une fonction . . . 24
4.3 Logarithme à base a ($a > 0$ et $a \neq 1$) . . . 25

5 Nombres complexes **27**

5.1 Ensemble des nombres complexes . . . 27
5.2 Conjugué d'un nombre complexe - module d'un nombre complexe . . . 28
5.3 Argument d'un nombre complexe - forme trigonométrique d'un nombre complexe . . . 29
5.4 Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul . . . 30

6 Fonctions exponentielles 33
6.1 Fonction exponentielle népérienne . . . 33
6.2 Exponentielle à base a ($a > 0$ et $a \neq 1$) . . . 34

7 Equations différentielles 37
7.1 L'équation $y' = ay + b$ . . . 37
7.2 L'équation $y'' + ay' + by = 0$ . . . 37

8 Calcul intégral 39
8.1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment . . . 39
8.2 Relation de Chasles - linéarité de l'intégrale . . . 39
8.3 Intégrale et ordre . . . 40
8.4 Valeur moyenne . . . 40
8.5 Techniques de calcul intégral . . . 40
8.6 Calcul des aires et volumes . . . 41

9 Probabilités 43
9.1 Vocabulaire . . . 43
9.2 Espaces probalisés finis . . . 43
9.3 Indépendance de deux épreuves. . . . 45
9.4 Variables aléatoires - Loi de probabilité d'une variable aléatoire . . . 46
9.5 Espérence mathématique - variance - écart type d'une variable aléatoire. . . . 47
9.6 Loi binomiale . . . 47

10 produit scalaire dans l'espace et ses applications 49
10.1 Produit scalaire dans l'espace et ses propriétés . . . 49
10.2 Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé . . . 50
10.3 Etude analytique de l'ensemble des points M de l'espace tels que . . . 50
10.4 Plan défini par un point et un vecteur normal . . . 51
10.5 Etude analytique de la sphère . . . 52
10.6 Intersection d'une sphère et d'une droite . . . 52
10.7 Intersection d'une sphère et d'un plan . . . 54
10.8 Equation cartésienne d'un plan tangent à une sphère en un point donné . . . 55

11 produit vectoriel 57
11.1 Trièdre - orientation de l'espace - base et repère orientés . . . 57
11.2 Définition géométrique du produit vectoriel . . . 58
11.3 Antisymétrie - bilinéarité . . . 58
11.4 Coordonnées du produit vectoriel dans un repère orthonormé direct . . . 59
11.5 Distance d'un point à une droite . . . 59

CHAPITRE 1

LIMITES ET CONTINUITÉ

1.1 Continuité d'une fonction en un point

Définition 1.1

soient f une fonction numérique définie sur un intervelle ouvert I et $a \in I$.
On dit f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition 1.2

soit f une fonction numérique définie sur un intervelle de type $[a, b]$.
$\star$ On dit que f est continue à droite en a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
$\star$ On dit que f est continue à gauche en b si $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Propriété 1.3

f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en a

Remarque :
la partie entière n'est pas continue en tout n de $\mathbb{Z}$.

1.2 Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition 1.4

$\star$ On dit que f est une fonction continue sur un intervelle ouvert I s'elle est continue en tout point de I.
$\star$ On dit que f est une fonction sur un intervelle $[a, b]$ s'elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Remarques :
$\star$ la partie entière est continue sur l'intervalle $[n, n+1[$ pour tout n de $\mathbb{Z}$.
$\star$ si f est continue sur un intervalle I alors elle est continue sur tout intervalle $J \subset I$.

Propriété 1.5

Les fonctions polynômiales, les fonctions rationnelles, les fonctions : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur leurs domaines de définition.

1.3 Opérations sur les fonctions continues

Propriété 1.6

soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\star$ les fonctions $f+g$, λf et $f \times g$ sont continues sur I .
$\star$ si de plus g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .

Propriété 1.7

$\star$ si f et g sont deux fonctions continues sur I et J respectivement avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.
$\star$ soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une fonction définie sur I avec $\lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et g est une fonction continue sur J avec $f(I) \subset J$ alors $\lim_{x \to a}(g \circ f)(x) = g(l)$.

1.4 Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété 1.8

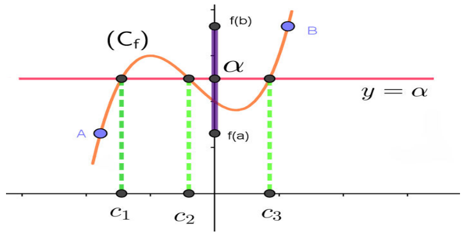
$\star$ l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
$\star$ l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

I	$f(I)$ si f est continue et str. croissante	$f(I)$ si f est continue et str. décroissante
$[a,b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a,b]$	$]\lim_{x \to a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \to a^+} f(x)[$
$[a,b[$	$[f(a), \lim_{x \to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \to b^-} f(x), f(a)]$
$]a,b[$	$]\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \to b^-} f(x), \lim_{x \to a^+} f(x)[$
$[a,+\infty[$	$[f(a), \lim_{x \to +\infty} f(x)[$	$]\lim_{x \to +\infty} f(x), f(a)]$
$]a,+\infty[$	$]\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)[$	$]\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to a^+} f(x)[$
$]-\infty,b]$	$]\lim_{x \to -\infty} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \to -\infty} f(x)[$
$]-\infty,b[$	$]\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \to b^-} f(x), \lim_{x \to -\infty} f(x)[$
$]-\infty,+\infty[$	$]\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)[$	$]\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to -\infty} f(x)[$

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.9

soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.
Pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un c compris entre a et b tel que $f(c) = \alpha$.
(autrement l'équation $f(x) = \alpha$ admet au moins une solution)



Conséquence :
soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.
Pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \alpha$.
(autrement l'équation $f(x) = \alpha$ admet une unique solution sur $[a, b]$)

Conséquence :
soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$. Alors :
$\star$ l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]a, b[$.
$\star$ si de plus f est strictement monotone, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]a, b[$.

La méthode de dichotomie :

Le but de cette méthode est d'approcher la solution d'une équation de type $f(x) = 0$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$, alors $\exists! \alpha \in]a, b[/ f(\alpha) = 0$.
On a deux cas :

$\star$ si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \times f(b) < 0$ alors $\alpha \in \left]\dfrac{a+b}{2}, b\right[$.

$\star$ si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \times f(a) < 0$ alors $\alpha \in \left]a, \dfrac{a+b}{2}\right[$.

On continue de cette manière jusqu'à l'encadrement demandé de α.

1.5 Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Définition 1.10

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $J = f(I)$.
La fonction qui lie chaque élèment y de J avec l'unique élèment x de I tel que $f(x) = y$ s'appelle la fonction réciproque de f notée f^{-1}.

Conséquences :
soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} sa réciproque. On a :

$\star \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$.

$\star$ $(\forall x \in I) : (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

$\star$ $(\forall x \in f(I)) : (f \circ f^{-1})(x) = x$.

Propriété 1.11

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} sa réciproque. On a :
⋆ f^{-1} est continue sur $f(I)$.
⋆ f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ avec f et f^{-1} ont la même monotonie.
⋆ $(C_{f^{-1}})$ est symetrique à (C_f) par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

1.6 Fonction racine n-ième

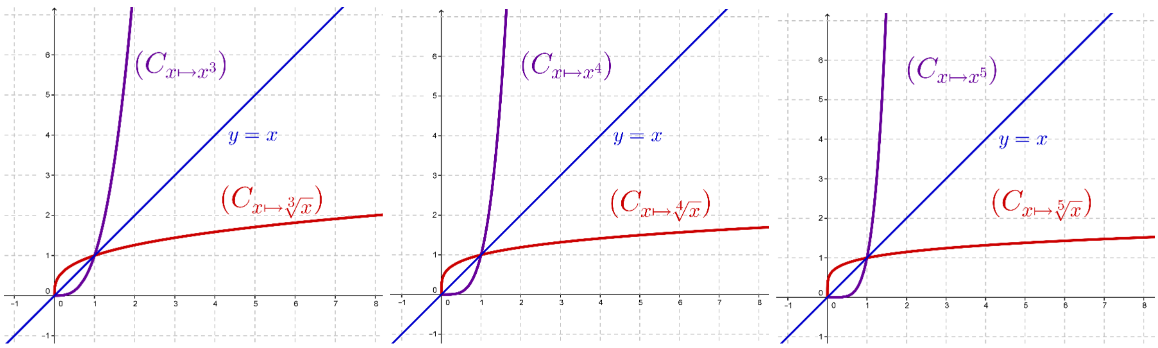
Propriété 1.12

soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Alors elle admet une fonction réciproque sera noté $\sqrt[n]{\ }$ définie sur $[0, +\infty[$.
⋆ L'image d'un réel positif x par cette fonction est notée : $\sqrt[n]{x}$.
⋆ Le nombre $\sqrt[n]{x}$ est appelé la racine n-ième du nombre x.

Propriétés 1.13

⋆ La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

⋆ Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction racine n-ième ($x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est symétrique à celle de la fonction $x \mapsto x^n$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ (1ère bissectrice).



Conséquences :

⋆ $(\forall x, y \in [0, +\infty[)$: $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

⋆ $(\forall x, y \in [0, +\infty[)$: $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$.

⋆ $(\forall x \in [0, +\infty[)$: $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$

Propriété 1.14 (opérations les racines n-ième)

Soient $x, y \in [0; +\infty[$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$. On a :
⋆ $\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.

⋆ $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ et $\sqrt[n]{\dfrac{1}{y}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{y}}$ (si $y \neq 0$).

⋆ $\sqrt[nm]{x^m} = \sqrt[n]{x}$ et $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$.

⋆ $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \dfrac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$ et $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \dfrac{x - y}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{y^2})}$

1.7 Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif

Définition 1.15

Si $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \ : \ x^r = \sqrt[q]{x^p}.$$

Propriétés 1.16

⋆ La fonction $x \mapsto x^r$ est continue sur $]0, +\infty[$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
⋆ pour tout $r, r' \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x, y \in]0, +\infty[$ on a :

$$x^r > 0 \quad ; \quad x^{r+r'} = x^r \times x^{r'} \quad ; \quad x^{rr'} = (x^r)^{r'} \quad ; \quad \frac{1}{x^r} = x^{-r}$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad ; \quad (xy)^r = x^r y^r \quad ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r} \quad ;$$

CHAPITRE 2

DÉRIVABILITÉ - ÉTUDE DE FONCTIONS

2.1 Dérivabilité d'une fonction en un point - dérivabilité sur un intervalle

Définitions 2.1

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $a, b \in I$ tels que $a < b$.

(i) On dit que f est dérivable (resp. dérivable à droite, dérivable à gauche) au point a s'il existe un réel l tel que

$$\lim_{x \to a \text{ (resp. } a^+, a^-)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

l s'appelle le nombre dérivé (resp. nombre dérivé à droite, nombre dérivé à gauche) de f au point a et sera noté $f'(a)$ (resp. $f'_d(a)$, $f'_g(a)$). On écrit :

$$\lim_{x \to a \text{ (resp. } a^+, a^-)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \ \left(\text{resp. } f'_d(a),\ f'_g(a) \right).$$

(ii) On dit que f est dérivable sur I s'elle est dérivable en tout point de I.

(iii) On dit que f est dérivable sur $[a, b]$ s'elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite de a et dérivable à gauche de b.

Propriété 2.2

$$f \text{est dérivable au point } a \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } a, \\ f \ \text{ est dérivable à gauche en } a, \\ f'_d(a) = f'_g(a). \end{cases}$$

Conséquences :

(1) Si f est dérivable au point a alors (C_f) admet une tangente d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

au point $(a, f(a))$.

(2) Si f est dérivable à droite au point a alors (C_f) admet une demi-tangente d'équation

$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geqslant a \end{cases}$$

au point $(a, f(a))$.

(3) Si f est dérivable à gauche au point a alors (C_f) admet une demi-tangente d'équation

$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x \leqslant a \end{cases}$$

au point $(a, f(a))$.

(4) Si f est dérivable au point a, la fonction g définie par $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée la fonction affine tangente à f (une approximation affine de f) au voisinage de a et on a :

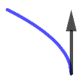
$$x \simeq a \Longrightarrow f(x) \simeq g(x).$$

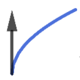
Exemple :

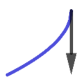
$$f(x) = \sqrt{x},\ a = 1 \Longrightarrow g(x) = \frac{x+1}{2}$$
$$1,01 \simeq 1 \Longrightarrow f(1,01) \simeq g(1,01) \Longrightarrow \sqrt{1,01} \simeq 1,005$$

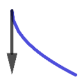
Propriété 2.3

Si $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors (C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x = a$.

$\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ 

 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ 

 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$

Propriété 2.4

f est dérivable en $a \Rightarrow f$ est continue en a.

2.2 Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 2.5

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :

(i) $f+g$ est dérivable sur I et on a : $(f+g)' = f' + g'$.

(ii) $f \times g$ est dérivable sur I et on a : $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

(iii) αf est dérivable sur I et on a : $(\alpha f)' = \alpha f'$.

(iv) Si de plus $g \neq 0$ sur I alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.

(v) Si de plus $g \neq 0$ sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = -\dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

Propriété 2.6

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et J respectivement telles que $f(I) \subset J$, alors $f \circ g$ est dérivable et on a : $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.

Conséquences :

(i) Si f est dérivable sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, alors f^n est dérivable sur I et on a :

$$(f^n)' = nf'f^{n-1}.$$

(ii) Si f est dérivable sur un intervalle I et $f > 0$ sur I, alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}.$$

Propriété 2.7

Soit f une fonction dérivable (donc continue) et strictement monotone sur I telle que $f(I) = J$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$(\forall x \in J) \ : \ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Conséquences :

(1) La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on a :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) : \ (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

(2) Si $f > 0$ et dérivable sur I alors $\sqrt[n]{f}$ est dérivable sur I avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on a :

$$\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}.$$

2.3 Primitives d'une fonction

Définition 2.8

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle fonction primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que

$$(\forall x \in I) : F'(x) = f(x).$$

Propriété 2.9

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Les fonctions primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto F(X) + C$ où C est une constante réelle.

Propriété 2.10

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Si f admet une fonction primitive sur I alors il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Propriété 2.11

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$.
Si F et G sont deux fonctions primitives de f et g respectivement sur I, alors $F+kG$ est une primitive de $f + kg$ sur I.

Tableau des primitives des fonctions usuelles

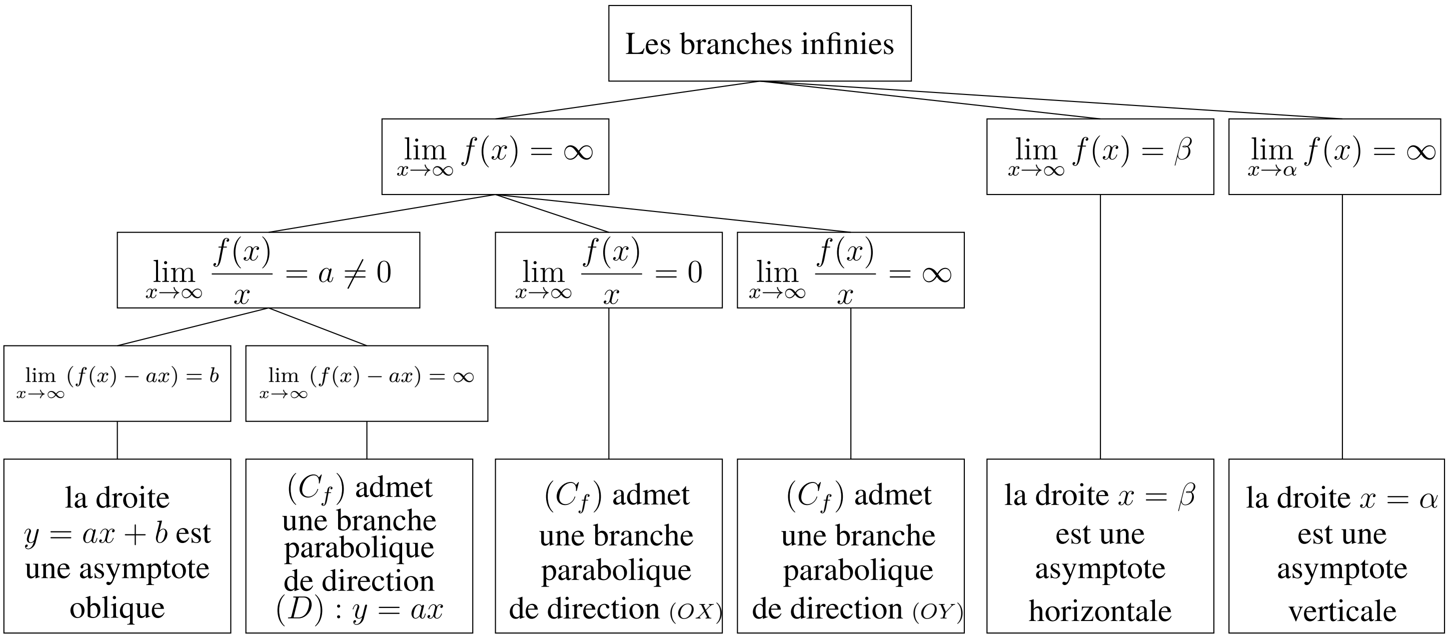
la fonction f	les primitives de f	intervalle
$x \mapsto k,\ k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{n-1}.\dfrac{1}{x^{n-1}} + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto x^r,\ r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

Tableau des primitives et les opérations .

la fonction f définie sur I	une primitive de f sur I	conditions
$u' + v'$	$u + v$	
$u'v + v'u$	uv	
$\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	$\dfrac{u}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$u'u^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u \neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I

$\dfrac{u'}{(\sqrt[n]{u})^{n-1}},\ n \in \mathbb{N}^*$	$n\sqrt[n]{u}$	$u > 0$ sur I
$u'u^r,\ r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$u > 0$ sur I
$x \mapsto u'(ax+b),\ a \in \mathbb{R}^*\ et\ a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}u(ax+b)$	$]0, +\infty[$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	
$\dfrac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)$	$u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; \forall k \in \mathbb{Z}$

2.4 Branches infinies

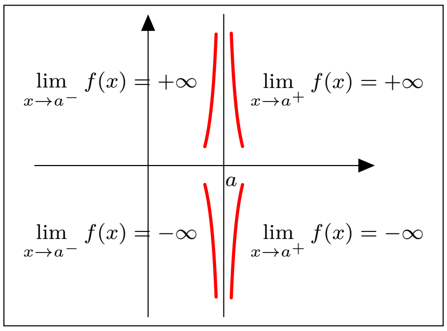


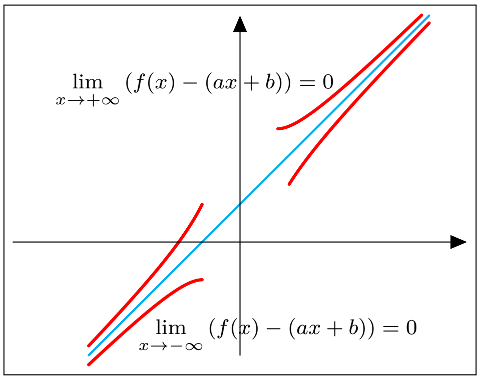
La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$ $\iff \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$

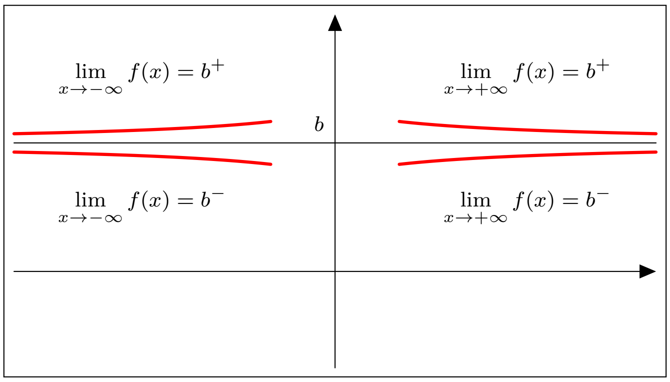
Attention ⚠

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty \not\Rightarrow$ (C_f) admet une branche parabolique suivant La droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

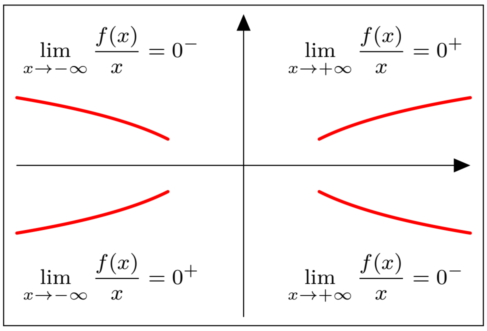
Asymptotes :

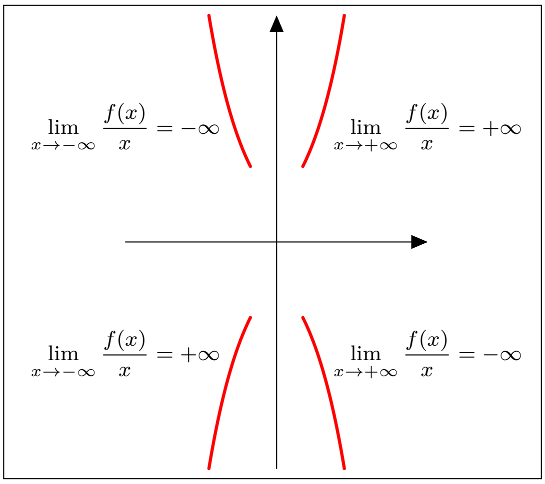


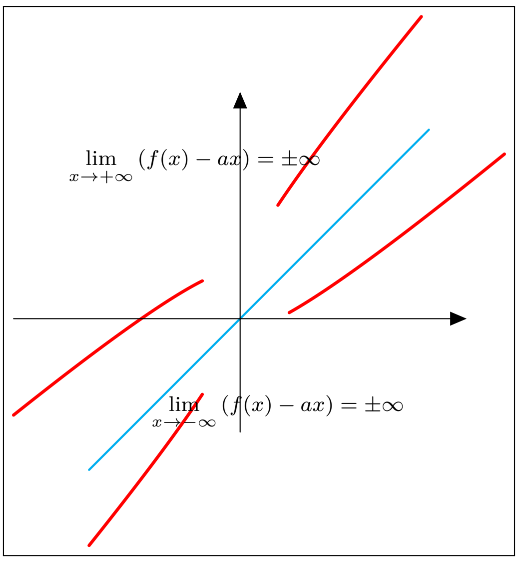




Les branches paraboliques :







2.5 Concavité

x		a	
f''	$-$	0	$+$
(C_f)	concave		convexe

x		a	
f''	$+$	0	$-$
(C_f)	convexe		concave

$M(a, f(a))$ est un point d'inflexion

Propriété 2.12

Si f" s'annule en a de I et change de signes au voisinage de a, alors le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).

Propriété 2.13

Si f' s'annule en a de I et ne change pas de signes au voisinage de a, alors le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).

2.6 Parité - symétrie - périodicité

Parité - periodicité :

type de f	définition	conséquences
f est paire	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$	$\star$ il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ $\star$ (C_f) est symetrique par $\%$ à (OY)
f est impaire	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$	$\star$ il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ $\star$ (C_f) est symetrique par $\%$ à O
f est périodique de période T $(T > 0)$	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} x + T \in D_f \\ f(x + T) = f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T

Symetrie :

propriètè	équivalent à	conséquences
la droite $x = a$ est un axe de symetrie de (C_f)	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [a, +\infty[$
la point $\Omega(a, b)$ est un centre de symetrie de (C_f)	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [a, +\infty[$

CHAPITRE 3

SUITES NUMÉRIQUES

3.1 Suite minorée - suite majorée - suite bornée

Définitions 3.1

⋆ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant M$.
⋆ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \geqslant m$.
⋆ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée s'il existe un réel positif C tel que $(\forall n \geqslant n_0) : |U_n| \leqslant C$.
(ie. la suite est majorée et minorée à la fois)

Remarques :

⋆ Toute suite positive est minorée par 0.
⋆ Toute suite négative est majorée par 0.

3.2 Suite monotone

Définitions et propriétés 3.2

⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} \geqslant U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n \geqslant 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est str. croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} > U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n > 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} \leqslant U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est str. décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} < U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n < 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est constante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = U_n$.

Définition 3.3

On dit qu'une suite est monotone s'elle est croissante ou décroissante.

Remarques :

⋆ Une suite croissante est minorée par son premier terme.(ie. $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \geqslant U_{n_0}$)
⋆ Une suite décroissante est majorée par son premier terme.(ie. $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant U_{n_0}$)

3.3 Suite arithmétique - Suite géométrique

	une suite arithmétique	une suite géométrique
définition	$(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = U_n + r$	$(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = qU_n$
terme général	$(\forall n \geqslant n_0) : U_n = U_p + (n-p)r$	$(\forall n \geqslant n_0) : U_n = U_p \times q^{n-p}$
la somme $S_n = U_p + ... + U_n$	$S_n = \left(\frac{n-p+1}{2}\right)(U_p + U_n)$	$S_n = U_p \times \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$; $(q \neq 1)$

Exemple :

$\star\ 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\qquad \star\ 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

3.4 Limite d'une suite

Définition 3.4

$\star$ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente s'elle admet une limite finie l qd $n \longrightarrow +\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

$\star$ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est divergente s'elle n'est pas convergente.

Propriété 3.5 (limtes usuelles)

Soient $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant 3$.

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Remarque :

Les opérations sur les limites des suites sont les mêmes opérations sur les limites des fonctions.

Propriété 3.6

Soients (u_n) une suite numérique et l un réel.

$\star \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - l) = 0.$

$\star \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |U_n - l| = 0.$

Propriété 3.7 (ordre et convergence)

$\star$ Si $\begin{cases} (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant k) : \ U_n \geqslant 0 \\ \text{(c.à.d } (u_n) \text{ est positive à partir d'un certain rang.)} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \end{cases}$, alors $l \geqslant 0$.

$\star$ Si $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \ et \ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l' \end{cases}$, alors $l \leqslant l'$.

3.5 Critères de convergence

Propriété 3.8

⋆ Toute suite croissante et majorée est convergente.
⋆ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Propriétés 3.9

⋆ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : |U_n - l| \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0 \end{cases} \Longrightarrow (U_n)_{n\geqslant n_0}$ *est convergente et* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

⋆ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : W_n \leqslant U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l \end{cases} \Longrightarrow (U_n)_{n\geqslant n_0}$ *est convergente et* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

⋆ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ *et* $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ *est divergente*

⋆ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : W_n \leqslant U_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ *et* $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ *est divergente*

3.6 Suites particulières

Propriété 3.10 (la suite (a^n))

Soit a un nombre réel.
⋆ Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
⋆ Si $a = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$.
⋆ Si $-1 < a < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
⋆ Si $a \leqslant 1$ alors (a^n) n'admet pas de limite.

Propriété 3.11

Soit $r \in \mathbb{Q}^*$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^r = \begin{cases} +\infty & si\ r > 0 \\ 0 & si\ r < 0 \end{cases}$$

Propriété 3.12 (suites de type $u_{n+1} \doteq f(u_n)$)

Si $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ f \text{ est continue sur } I \\ f(I) \subset I \\ u_{n_0} \in I \\ (u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ est convergente} \end{cases}$, alors sa limite l est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Propriété 3.13 (suites de type $v_n \doteq f(u_n)$)

Si $\begin{cases} (u_n)_{n \geqslant n_0} \text{ est convergente de limite } l \\ v_n = f(u_n), n \geqslant n_0 \\ f \text{ est continue sur en } l \end{cases}$, alors $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ est convergente de limite $f(l)$.

CHAPITRE 4

FONCTIONS LOGARITHMIQUES

4.1 Fonction Logarithme népérien

Définition 4.1

Le logarithme népérien est la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1. On la note $\ln$.

Conséquences :

(1) Le domaine de définition de $\ln$ est $]0,+\infty[$.

(2) $\ln(1)=0$.

(3) $\ln$ est une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a : $\quad (\forall x \in]0,+\infty[) \ : \ \ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

(4) $\ln$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

(5) Pour tous a et b de $]0,+\infty[$:

$$\ln(a)=\ln(b) \Leftrightarrow a=b \quad ; \quad a<b \Leftrightarrow \ln(a)<\ln(b)$$

Signe de $\ln$

On a :

$$\ln(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \quad ; \quad \ln(x)>0 \Leftrightarrow x>1 \quad ; \quad \ln(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1.$$

Donc

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Propriétés 4.2 (les propriétés algébriques de $\ln$)

Soient a et b de $]0,+\infty[$ et r de $\mathbb{Q}$. On a :

(1) $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ $\qquad$ (la propriètè fondamentale).

(2) $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$.

(3) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.

(4) $\ln(\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\ln(a)$.

(5) $\ln(a^r)=r\ln(a)$.

Propriétés 4.3 (limites)

⋆ $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ ⋆ $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ ⋆ $\lim_{x\to1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$

⋆ $\lim_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ⋆ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ ⋆ $\lim_{x\to0^+} x.\ln(x) = 0$

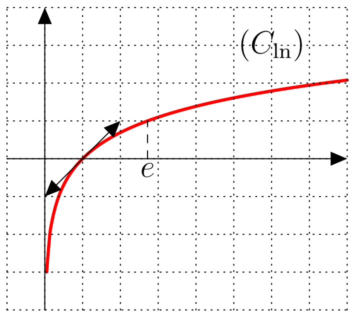
⋆ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ ⋆ $\lim_{x\to0^+} x^n.\ln(x) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Propriété 4.4 (nombre d'Euler)

L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution noté e telle que $e = 2,718\ldots.$

T.v et $(C_{\ln})$:

x	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\|\|$	$+$
$\ln$	$\|\|$	$-\infty \nearrow +\infty$



4.2 Dérivée logarithmique d'une fonction

Définition 4.5

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ s'appelle La dérivée logarithmique de u sur I.

Propriété 4.6

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I telle qu'elle ne s'annule jamais sur I, alors la fonction $f : x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et sa dérivée est La dérivée logarithmique de u.

càd $$(\forall x \in I) \ : \ f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Propriété 4.7

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I.

Les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln(|u(x)|) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

4.3 Logarithme à base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Définition 4.8

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

Le logarithme à base a est la fonction noté $\log_a$ et définie sur $]0,+\infty[$ par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Si $a = 10$ on note $\log_{10} = \log$.

Conséquences :

$\log_a(a) = 1$ $\qquad \log_a(e) = \dfrac{1}{\ln(a)}$ $\qquad \log_a(1) = 0$ $\qquad \log_e = \ln$.

Propriété 4.9

Soient $x, y \in]0,+\infty[$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad ; \quad \log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad ; \quad \log_a(x^r) = r\log_a(x)\ ,\ (\forall r \in \mathbb{Q})$$

Propriété 4.10

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

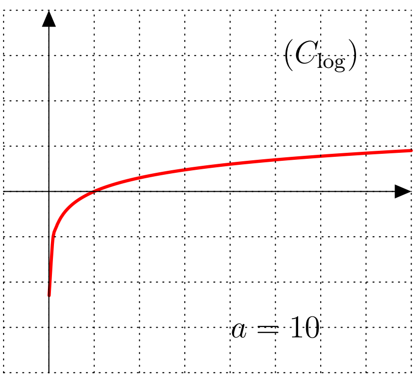
$$(\forall x \in]0,+\infty[)\ :\ \log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

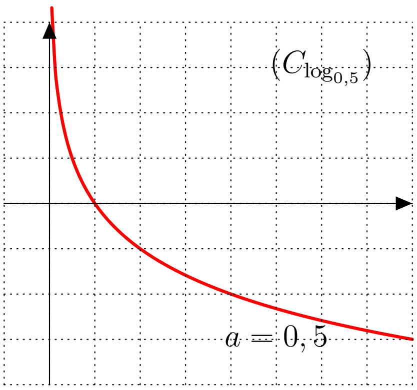
$0 < a < 1$

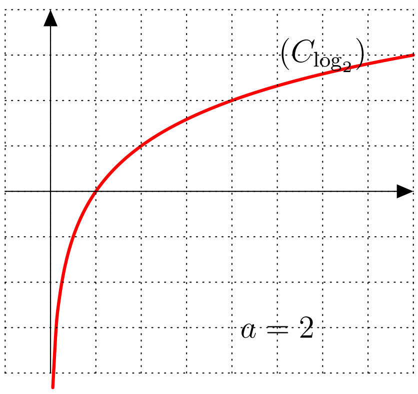
x	0	$+\infty$
$\log_a'$	‖	$-$
$\log_a$	‖ $+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

$a > 1$

x	0	$+\infty$
$\log_a'$	‖	$+$
$\log_a$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$







CHAPITRE 5

NOMBRES COMPLEXES

5.1 Ensemble des nombres complexes

L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$. On imagine qu'il existe un nombre imaginaire noté i, solution de cette équation.
On va construire un ensemble noté $\mathbb{C}$ plus grand que $\mathbb{R}$ qu'est engendré par le couple $(1, i)$ (càd. tout élèment de $\mathbb{C}$ est combinaison linéaire de 1 et i à coefficients dans $\mathbb{R}$).

Définition 5.1

L'ensemble $\mathbb{C}$ est définie par : $\mathbb{C} = \{z = a + ib/(a, b) \in \mathbb{R}^2 \; et \; i^2 = -1\}$.
$\star$ $a + ib$ s'appelle l'écriture algébrique (unique pour tout élèment de $\mathbb{C}$) de z.
$\star$ a s'appelle la partie réelle de z sera notée $\mathfrak{Re}(z)$.
$\star$ b s'appelle la partie imaginaire de z sera notée $\mathfrak{Im}(z)$.
$\star$ L'ensemble des nombres imaginaires pures sera noté $i\mathbb{R}$.

Propriété 5.2

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$:

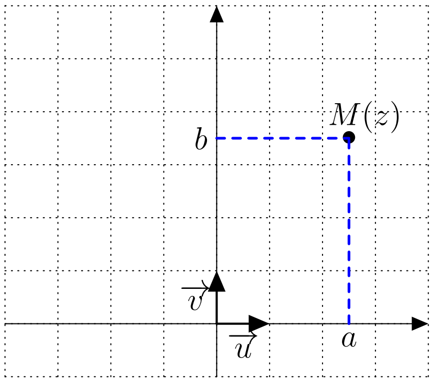
$$z = z' \iff \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(z') \; et \; \mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z')$$
$$z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}(z) = 0$$
$$z \in i\mathbb{R} \iff \mathfrak{Re}(z) = 0.$$

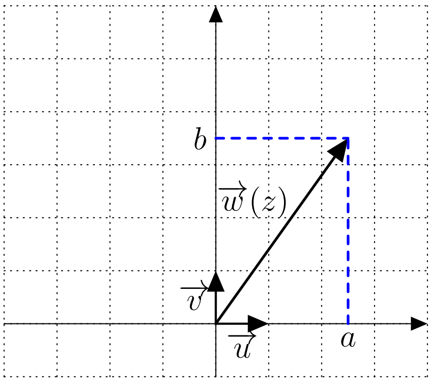
La représentation graphique d'un nombre complexe :

Le plan (P)(appelé après le plan complexe) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

$\star$ Tout point $M(a, b)$ du plan (P) est une image d'un unique nombre complexe $z = a + ib$, on écrit $M(z)$. De plus z s'appelle l'affixe de M et on écrit $z = aff(M)$.

$\star$ Tout vecteur $\overrightarrow{w}(a, b)$ du plan (P) est une image d'un unique nombre complexe $z = a + ib$, on écrit $\overrightarrow{w}(z)$. De plus z s'appelle l'affixe de $\overrightarrow{w}$ et on écrit $z = aff(\overrightarrow{w})$.





Conséquences :
⋆ Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé l'axe réel.
⋆ Les nombres imaginaires pures sont les affixes des points de l'axe des ordonnés appelé l'axe imaginaire.

Propriété 5.3

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $\vec{w}(z_{\vec{w}})$, $\vec{t}(z_{\vec{t}})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A \quad ; \quad aff(\vec{w} + \vec{t}) = aff(\vec{w}) + aff(\vec{t}) \quad ; \quad aff(\alpha\vec{w}) = \alpha.aff(\vec{w})$$

Propriété 5.4

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $I(z_I)$ tels que I est le milieu de $[AB]$. On a :
⋆ $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.
⋆ Si $A \neq C$, alors :

$$A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}.$$

5.2 Conjugué d'un nombre complexe - module d'un nombre complexe

Définition 5.5

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe tel que $a, b \in \mathbb{R}$. Le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Propriété 5.6

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
⋆ $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et en général : $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$. ⋆ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et en général : $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$.
⋆ Si $z' \neq 0$, alors $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$. ⋆ $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$.

Conséquences :
Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

$z+\overline{z}=2\Re e(z)$; $z-\overline{z}=2i\Im m(z)$; $\overline{\overline{z}}=z$; $\overline{z}=0 \Leftrightarrow z=0$; $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z}=z$; $z\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z}=-z$;

Définition 5.7

Le plan complexe minue d'un repère orthonormé directe $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
Soit $M(z)$ un point du plan complexe tel que $z=a+ib$ et $a,b\in\mathbb{R}$.
Le module du nombre complexe z est la distance OM sera noté $|z|$ et on a : $OM=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Propriété 5.8

Soient $z,z'\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

⋆ $|z\times z'|=|z|\times|z'|$ et en général : $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right|=\prod_{k=1}^{n}|z_k|$.

⋆ Si $z'\neq 0$, alors $\left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$. ⋆ $|z^n|=|z|^n$. ⋆ $|z+z'|\leqslant |z|+|z'|$.

Conséquences :

⋆ $z\overline{z}=|z|^2$ ⋆ $|\overline{z}|=|-z|=|z|$ ⋆ $|z|=0\Leftrightarrow z=0$ ⋆ $z=z' \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} |z|=|z'|$.

⋆ Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ du plan complexe, on a : $AB=|z_B-z_A|$.

5.3 Argument d'un nombre complexe - forme trigonomètrique d'un nombre complexe

Définition 5.9

Soit $M(z)$ dans le plan complexe, minue d'un repère orthonormé directe $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, tel que $z\neq 0$.
On appelle argument de z qu'on note $arg(z)$ toute mesure de l'angle orientée $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}})$ en radian et on écrit $arg(z)\equiv(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}})[2\pi]$.

Remarque :
0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Propriété 5.10

Soient $z,z'\in\mathbb{C}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

⋆ $arg(zz')\equiv arg(z)+arg(z')[2\pi]$ et en général : $arg\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right)=\sum_{k=1}^{n} arg(z_k)$.

⋆ $arg\left(\frac{1}{z'}\right)\equiv -arg(z')[2\pi]$ ⋆ $arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv arg(z)-arg(z')[2\pi]$ ⋆ $arg\left(z^n\right)\equiv n\, arg(z)[2\pi]$

Propriété 5.11

Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ des points du plan complexe $C \neq D$ on a :
$\star$ Si $A \neq B$ on a : $\overline{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})} \equiv arg(b-a)[2\pi]$.
$\star$ Si $A \neq B$ et $A \neq C$ on a : $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$.
$\star$ Si $A \neq B$ et $C \neq D$ on a : $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \equiv arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$.

Remarques :

$\star$ $(\forall z \in \mathbb{R}_+^*)$: $arg(z) \equiv 0[2\pi]$.
$\star$ $(\forall z \in \mathbb{R}_-^*)$: $arg(z) \equiv \pi[2\pi]$.
$\star$ $(\forall z \in i\mathbb{R}_+^*)$: $arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
$\star$ $(\forall z \in i\mathbb{R}_-^*)$: $arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Propriété 5.12

Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ s'écrit sous la forme $z = r[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]$ où $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos(\alpha) = \frac{a}{r}$ et $\sin(\alpha) = \frac{b}{r}$.

Définition 5.13

L'écriture $z = r[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]$ s'appelle la forme trigonomètrique du nombre complexe z et on note $z = [r, \alpha]$.
(ie. tout nombre complexe non nul est bien déterminé par son module et son argument)

Propriété 5.14

Soient $z = [r, \alpha]$ et $z = [r', \alpha']$ de $\mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$-z = [r, \alpha + \pi] \quad ; \quad \overline{z} = [r, -\alpha] \quad ; \quad zz' = [rr', \alpha + \alpha'] \quad ; \quad \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\alpha\right]$$
$$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \alpha - \alpha'\right] \quad ; \quad z^n = [r^n, n \times \alpha]$$

La formule de Moivre

Pour tout couple $(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ on a : $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$.

Remarque :

La formule de Moivre sert à calculer $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

5.4 Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition 5.15

$\star$ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on note par $e^{i\alpha}$ le nombre complexe $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ et on écrit $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha) = e^{i\alpha}$.
$\star$ Pour tout nombre complexe non nul z, on appelle la notation exponentielle la notation $re^{i\alpha}$ où $z = [r, \alpha]$ et on écrit $z = re^{i\alpha}$.

Propriété 5.16

Pour tous $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$\star\ \overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$ $\quad\star\ (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$ $\quad\star\ e^{i\alpha}e^{i\alpha'} = e^{i(\alpha+\alpha')}$ $\quad\star\ \dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}} = e^{i(\alpha-\alpha')}$.

Propriété 5.17

Les formules d'Euler : $\boxed{\cos(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}}$ et $\boxed{\sin(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}}$.

Remarque :

On utilise les formules d'Euler dans la linéarisation de $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$ ou $\cos^n(x)\sin^m(x)$. Càd les transformées en somme des termes de types $a\cos(kx) + b\sin(kx)$ en développant $\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ ou $\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n$.

Exemples :

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x) \qquad \sin^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

CHAPITRE 6

FONCTIONS EXPONENTIELLES

6.1 Fonction exponentielle népérienne

Définition 6.1

La réciproque de la fonction $\ln$ s'appelle La fonction exponentielle népérienne notée

$$\exp\ :\ \mathbb{R} \to]0,+\infty[.$$

Autre expression de $\exp$:

Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $a \in]0,+\infty[$, On a : $\quad \exp(r) = a \ \Leftrightarrow\ r = \ln(a) \ \Leftrightarrow\ \ln(e^r) = \ln(a) \ \Leftrightarrow\ a = e^r.$
Donc $\exp(r) = e^r$ pour tout r de $\mathbb{Q}$.
On prolonge cette expression à $\mathbb{R}$ et on aura :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ \exp(x) = e^x}$$

Propriétés 6.2

$\star$ La fonction $\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\star$ $e^1 = e$ $\qquad e^0 = 1$ $\qquad e^x > 0$, $(\forall x \in \mathbb{R})$.
$\star$ $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\ln(e^x) = x$ $\qquad (\forall x \in]0,+\infty[)$: $e^{\ln(x)} = x$

$\star$ $\begin{cases} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in]0,+\infty[\end{cases}$

$\star$ Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \qquad e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

$$e^x \times e^y = e^{x+y} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \qquad e^{rx} = (e^x)^r$$

$\star$ Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in]0,+\infty[$, on a :

$$e^x > a \Leftrightarrow x > \ln(a) \qquad e^x < a \Leftrightarrow x < \ln(a)$$

Propriété 6.3

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty\ ,\ (\forall n \in \mathbb{N})$

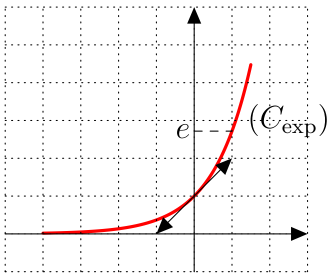
$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x^n e^x = 0\ ,\ (\forall n \in \mathbb{N})$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Propriété 6.4

⋆ La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x,\ (\forall x \in \mathbb{R})$.
⋆ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)},\ (\forall x \in I)$.

T.v et $(C_{\exp})$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
e^x	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$



6.2 Exponentielle à base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Définition 6.5

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.
L'exponentielle à base a est la fonction $\exp_a\ :\ x \mapsto e^{x\ln(a)} = a^x$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ \exp_a(x) = e^{x\ln(a)} = a^x.$$

Propriétés 6.6

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a :

⋆ $\quad a^x \times a^y = a^{x+y} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad a^{xy} = (a^x)^y \qquad a^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

⋆ La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ (a^x)' = \ln(a)a^x$.

⋆ $\begin{cases} a^x < a^y \Leftrightarrow x > y & ,0 < a < 1 \\ a^x < a^y \Leftrightarrow x < y & ,a > 1 \end{cases}$

⋆

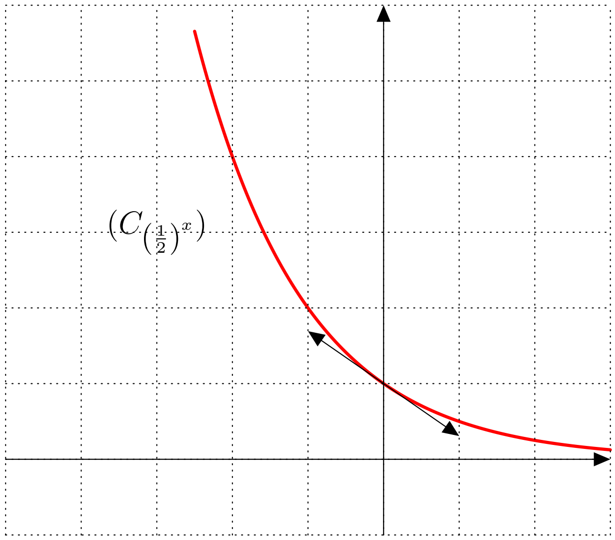
$0 < a < 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln(a)a^x$	$-$	
a^x	$+\infty$ $\searrow$	0

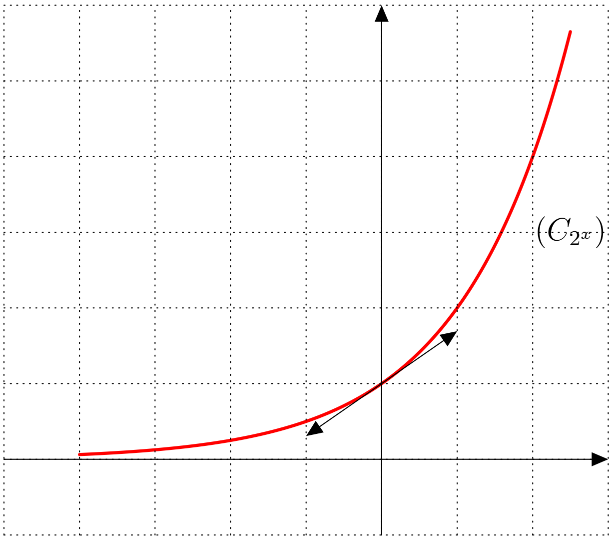
$a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln(a)a^x$	$+$	
a^x	0 $\nearrow$	$+\infty$

$a = \frac{1}{2}$



$a = 2$



CHAPITRE 7

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

7.1 L'équation $y' = ay + b$

L'équation différentielle sans ou avec une condition initiale	La solution générale
$y' = ay\ ;\ a \neq 0$	$y(x) = ce^{ax}\ ;\ c \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} ;\ a \neq 0$	$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$
$y' = ay + b\ ;\ a \neq 0$	$y(x) = ce^{ax} - \dfrac{b}{a}\ ;\ c \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} ;\ a \neq 0$	$y(x) = \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \dfrac{b}{a}$

7.2 L'équation $y'' + ay' + by = 0$

L'équation différentielle	L'équation caractéristique	cas	Solutions de l'éq.car	La solution génarale de l'équation différentielle
$y'' + ay' + by = 0$	$r^2 + ar + b = 0$	$\Delta > 0$	deux solutions réelles différentes r_1 et r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ telle que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
		$\Delta = 0$	une solution réelle double r	$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{rx}$ telle que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
		$\Delta < 0$	deux solutions complexes conjuguées $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$	$y(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))e^{px}$ telle que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

CHAPITRE 8

CALCUL INTÉGRAL

8.1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition 8.1

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et F sa primitive sur $[a, b]$.
Le nombre $F(b) - F(a)$ s'appelle l'intégrale de f de a à b noté

$$\int_a^b f(x)dx$$

et se lit " l'intégrale de a à b de $f(x)dx$ ".

Notation : Le nombre $\int_a^b f(x)dx$ s'écrit aussi $[F(x)]_a^b$ et on a : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarque : Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer la variable x par t, s, ... donc :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = ...$$

Conséquences : Si f est continue sur $[a, b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$.

8.2 Relation de Chasles - linéarité de l'intégrale

Propriété 8.2

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a,b et c de I et $k \in \mathbb{R}$.

$\star$ La relaion de Chasles : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

$\star$ La linéarité de l'intégrale : $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

8.3 Intégrale et ordre

Propriété 8.3

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a$et b de I tels que $a \leqslant b$.

$\star$ Si f est positive sur $[a,b]$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$

$\star$ Si $g(x) \leqslant f(x)$ pour tout x de $[a,b]$ alors : $\displaystyle\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx.$

$\star$ $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$

$\star$ $\displaystyle m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$ avec $\displaystyle m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\displaystyle M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$

8.4 Valeur moyenne

propriété et **Définition** 8.4

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a$et b de I tels que $a < b$.

$\star$ Il existe au moins un c de $[a,b]$ tel que : $\displaystyle f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$

$\star$ Le nombre $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a,b]$.

8.5 Techniques de calcul intégral

1- Calcul direct : se fait par trouver une primitive de la fonction à intégrer sur l'intervalle I .

Exemples : $\displaystyle\int_1^5 kdx = \int_1^5 (kx)'dx = [kx]_1^5 = 5k - k = 4k\,;\forall k \in \mathbb{R}$

$\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}dx = \int_1^e \ln'(x)dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$

2- L'intégration par partie :

propriété et **Définition** 8.5

Soient f et g deux fonctions dérivables et leurs dérivées sont continues sur un intervalle $[a,b]$. Alors on a :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

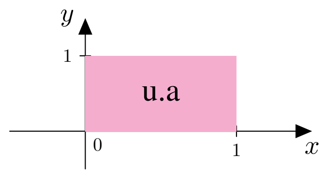
l'utilisation de cette relation s'appelle la technique d'intégration par partie.

Exemple : $\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx = \int_1^e (x)'\ln(x)dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x}dx = e - (e-1) = 1.$

8.6 Calcul des aires et volumes

1- Calcul des aires.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
L'unité de l'aire est $u.a = ||\overrightarrow{i}|| \times ||\overrightarrow{j}||$.



Propriété 8.6

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et (C_f) sa courbe. L'aire comprise entre (C_f) , (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A}(f, a, b) = \left(\int_a^b |f(x)|dx\right) u.a.$$

Remarque :

(1) Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\mathcal{A}(f, a, b) = \left(\int_a^b f(x)dx\right) u.a.$

(2) Si f est négative sur $[a, b]$, alors $\mathcal{A}(f, a, b) = -\left(\int_a^b f(x)dx\right) u.a.$

(3) Si f change de signe sur $[a, b]$, alors on utilise la relation de Chasles pour calculer $\mathcal{A}(f, a, b)$.

Propriété 8.7

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et (C_f) et (C_g) leurs courbes. L'aire comprise entre (C_f) , (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A}(f, g, a, b) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|dx\right) u.a$$

2- Calcul des volumes.

L'espace est muni d'un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
L'unité de volume est $u.v = ||\overrightarrow{i}|| \times ||\overrightarrow{j}|| \times ||\overrightarrow{k}||$.

Propriété 8.8

Soient un solide compris entre deux plans paralèlles d'équations $z = a$ et $z = b$.
On note par $S(t)$ l'aire d'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $z = t$ (la section du solide par dans le plan d'équation $z = t$).
Si la fonction $t \mapsto S(t)$ est continue sur l'intervalle $[a; b]$, alors le volume V du solide , en u.v. est donné par :

$$V = \int_a^b S(t)dt.$$

Propriété 8.9

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$, et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.On note D le domaine limité par (C_f), l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Alors le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe (Ox) est

$$V = \pi \left(\int_a^b (f(t))^2 dt \right) u.v.$$

CHAPITRE 9

PROBABILITÉS

9.1 Vocabulaire

Définition 9.1

Une expérience aléatoire est une expérience où on ne peut pas prévoir avec certitude ces résultats avant de l'effectuer comme le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé ... leurs résultats dépendent du **hasard**.

Vocabulaires :

(1) Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle **une éventualité**.

(2) L'ensemble de toutes les éventualités s'appelle **univers** et souvant noté Ω.

(3) Toute partie de Ω s'appelle **un événement**.

(4) Les événements formés d'un seul élément sont appelés **événements élémentaires**.

(5) Etant donné un univers Ω, l'événement Ω est **l'événement certain**.

(6) L'ensemble vide est **l'événement impossible**.

(7) Etant donné un univers Ω, soient A et B deux événements.

   (a) L'événement formé des éventualités qui sont dans A **et** dans B est noté $A \cap B$.

   (b) L'événement formé des éventualités qui sont dans A **ou** dans B est noté $A \cup B$.

   (c) L'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A constitue un événement appelé **événement contraire** de A, noté $\overline{A}$.

   (d) A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

9.2 Espaces probalisés finis

Définitions 9.2

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un ensemble non vide et fini.

(1) Si on associe à chaque élément a_i de Ω un nombre $p_i \in [0, 1]$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ et tel que $\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i = 1$, alors on dit qu'on a définie une probabilité p sur Ω.

(2) On dit que la probabilité de l'événement élémentaire $\{a_i\}$ est le nombre p_i pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ et on note $p(\{a_i\}) = p_i$ ou $p(a_i) = p_i$.

(3) Le couple (Ω, p) s'appelle un **espace probabilisé fini**.

Définition 9.3

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A un événement.
La probabilité de A est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans A notée $p(A)$.

Remarques :

(1) Toute probabilité sur Ω est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$.

(2) $p(\varnothing) = 0$ et $p(\Omega) = 1$.

Propriétés 9.4

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A et B deux événements.

(1) $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

(2) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

(3) Si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

9.2.1 Equiprobabilité

Définition 9.5

On dit qu'il y a **équiprobabilité** si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Remarque : : Dans les exercices, l'équiprobabilité peut être déclarée explicitement comme elle peut être déduite des conditions de l'expérience telles que : « dé équilibré ou parfait », « boule tirée de l'urne au hasard »,
« boules indiscernables »...

Propriété 9.6

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini où il y a **équiprobabilité** et A un événement. Alors on :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{le nombre de cas favorables}}{\text{le nombre de cas possibles}}$$

9.2.2 Probabilité conditionnelle

Définition 9.7

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$.

La probabilité de réalisation de B sachant que A est déjà réalisé est : $p_A(B) = p(B|A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Propriété 9.8

(1) Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A et B deux événements de probabilités non nulles. On a :

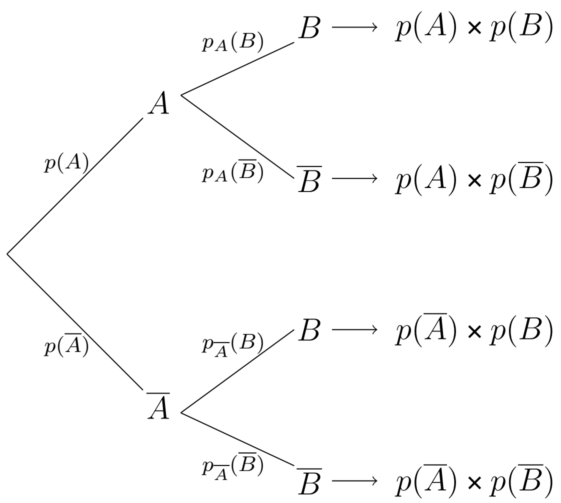
$$p(A \cap B) = p(A)p_A(B) = p(B)p_B(A),$$

c'est **la formule des probabilités composées**.

(2) Si Ω est la réunion de deux événements non nuls et non homogènes A_1 et A_2, alors pour tout événement B on a :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B).$$

Arbres pondérés



Règles de construction :

1. La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est 1.
2. La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

9.2.3 Indépendance

Définition 9.9

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire.
On dit que A et B sont indépendants si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Propriété 9.10

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $p(A) \neq 0$.
A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B) = p(B)$.

Remarques :

(1) Si A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, alors :

$$p_B(A) = p(B) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B).$$

(2) A et B sont indépendants veut dire que la réalisation de chacun d'eux n'est pas influencée par la réalisation de l'autre.

9.3 Indépendance de deux épreuves.

Exemples : Deux urnes u_1 et u_2 contiennent des boules de certaines couleurs.

(1) Si on tire une boule de chaque urne, alors cette expérience contient deux épreuves indépendants. Si $A = A_1$ et A_2 est un événement de cette éxpérience avec A_1 et A_2 sont deux événements des deux épreuves relatives aux urnes respectivement, alors :

$$p(A) = p(A_1) \times p(A_2).$$

Par exemple si	$A =$" obtenir une boule noir de u_1 et obtenir une boule jaune de u_2 ".
Alors	$A_1 =$" obtenir une boule noir de u_1 "
et	$A_2 =$" obtenir une boule jaune de u_2 ".

(2) On considère une expérience où on tire une boule de l'urne u_1 une boule. Si le résultat est une boule blanche, alors on tire deux boules de l'urne u_2 et sinon on tire trois boules. Les deux épreuves dans cette expérience sont dépendants.

Epreuves répétées :

Propriété 9.11

On considère dans une expérience une épreuve où on s'interesse seulement à la réalisation ou pas d'un événement A avec $p = p(A)$.
On répéte cette épreuve indépendamment n fois dans les mêmes conditions. Alors la probabilité que l'événement A soit réalisé k fois exactement, avec $k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$ est :

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

9.4 Variables aléatoires - Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définitions 9.12

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

(1) Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ s'appelle une variable aléatoire.

(2) Si $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$, alors déterminer la la loi de probabilité de la variable aléatoire X veut dire calculer, pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$, la probabilité de la réunion de tous les événements d'images x_i par X. Cette réunion sera notée $(X = x_i)$.
On résume cette loi dans la tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

(3) Si $x_1 < x_2 < ... < x_n$, alors :

$$p(X \leqslant \alpha) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \alpha < x_1 \\ p_1 + p_2 + ... + p_i & , \text{ si } x_i \leqslant \alpha < x_{i+1} \\ 1 & , \text{ si } \alpha > x_n \end{cases}$$

9.5 Espérence mathématique - variance - écart type d'une variable aléatoire.

Définitions 9.13

Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω.
On pose $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ et $p_i = p(X = x_i)$ pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$.

(1) L'espérense mathématique de la variable aléatoire X est le nombre réel noté $E(X)$ définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n.$$

(2) La variance de la variable aléatoire X est le nombre réel positif noté $V(X)$ définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 p_i = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + ... + (x_n - E(X))^2 p_n.$$

(3) L'écart type de la variable aléatoire X est le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Propriété 9.14

On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ avec $E(X^2) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n^2 p_n$.

9.6 Loi binomiale

Définition 9.15

On considère une expérience aléatoire composée de n épreuves répétées et indépendantes deux à deux. Soit A un événement de probabilté p de cette épreuve.
On appelle une variable aléatoire binomiale X de paramètres p et n la variable aléatoire qu'est égale au nombre de fois la réalisation de A.

Propriété 9.16

Sous les mêmes hypothèses de la définition, on a :

(1) $X(\Omega) = \{0; 1; 2; ...; n\}$.

(2) Pour tout $k \in \{0; 1; ...; n\}$, on a $p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.

(3) $E(X) = np$.

(4) $V(X) = np(1 - p)$.

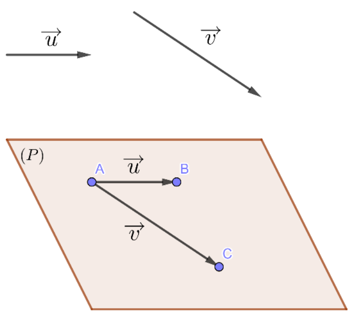
CHAPITRE 10

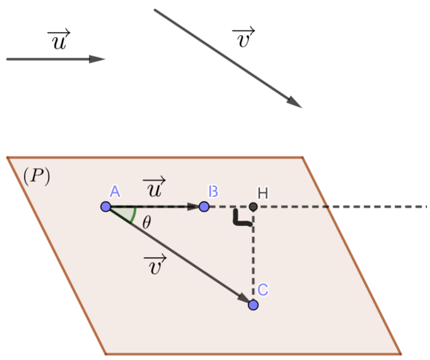
PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE ET SES APPLICATIONS

10.1 Produit scalaire dans l'espace et ses propriétés

Définition 10.1

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Il existe trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Soit (P) un plan passant par les trois points A, B et C.





Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans l'espace est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan (P) et qui sera noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$. On a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Remarque :
Les propriétés du produit scalaire dans le plan se prolongent dans l'espace.

Conséquence :
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. A, B et C sont trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

(1) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \quad \text{(formule trigonométrique du produit scalaire).}$$

(2) Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul, alors : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

(3) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

Remarque :

(1) Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ et appelé le carré scalaire de $\vec{u}$.

(2) La norme du vecteur $\vec{u}$ est le nombre positif noté $||\vec{u}||$ et on a $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}^2}$.

Définition 10.2 (Orthogonalité de deux vecteurs)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$, et on écrit : $\vec{u} \perp \vec{v}$.

10.2 Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé

Définition 10.3 (Base et repère orthonormé)

Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace et O un point de l'espace.

(1) On dit que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée si et seulement si $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$ et $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$.

(2) On dit que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé si et seulement si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée.

Dans ce qui suit, on munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Propriété 10.4 (expression analytique du produit scalaire)

Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ (càd $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$) sont deux vecteurs de l'espace, alors

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Conséquence : Les vecteurs $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$.

Propriété 10.5 (expression analytique de la norme et la distance)

(1) Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, alors la norme du vecteur $\vec{u}$ est le nombre noté $||\vec{u}||$, tel que :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(2) Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace. La distance entre A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

10.3 Etude analytique de l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k.$$

Propriété 10.6

Soient A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul et k un nombre réel.
L'ensemble des points M de l'espase tels que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = k$ est un plan ayant une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0,$$

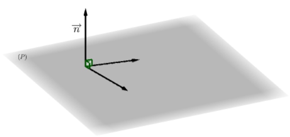
où d est un réel.

10.4 Plan défini par un point et un vecteur normal

Définition 10.7 (vecteur normal à un plan)

Soit (P) un plan de l'espace.
On appelle vecteur normal à (P) tout vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à (P).

Conséquence : Le vecteur $\overrightarrow{n}$ ($\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$) est normal au plan (P) si et seulement si $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (P).



Propriété 10.8

Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace qui vérifient $ax + by + cz + d = 0$ est un plan.
Le vecteur $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal à ce plan.

Propriété 10.9 (éq. cartés. d'un plan défini par un point et un vecteur normal)

Soient $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.
L'ensemble des points M de l'espase tels que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = 0$ est le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Une équation cartésienne de ce plan s'écrit sous la forme :

$$ax + by + cz + d = 0,$$

où d est un réel.

Définition 10.10 (distance d'un point à un plan)

Soient (P) un plan et A un point de l'espace.
H étant le projeté orthogonal du point A sur le plan (P).
La distance du point A au plan (P) est la distance AH notée $d(A, (P))$.

Propriété 10.11 (distance d'un point à un plan)

Soient (P) un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d = 0$ et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace.
La distance du point A au plan (P) est :

$$\boxed{d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.}$$

10.5 Etude analytique de la sphère

Définition 10.12

Soit Ω un point de l'espace et R un nombre réel strictement positif.
La sphère (S) de centre Ω et de rayon R, notée $S(\Omega, R)$, est l'ensemble des points M de l'espace qui vérivient $\Omega M = R$.

Propriété 10.13 (équation cartésienne d'une sphère définie par le centre et le rayon)

Une équation cartésienne de la sphère (S) de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R ($R > 0$) est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,$$

que l'on peut écrire :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2zx - 2by - 2cz + d = 0,$$

où $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Propriété 10.14 (équation cartésienne d'une sphère définie par l'un de ces diamètres)

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace tels que $A \neq B$.
L'ensemble des points M de l'espase tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère dont $[AB]$ est l'un de ces diamètres. Une équation cartésienne de cette sphère est :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0.$$

Propriété 10.15 (étude analytique d'un ensemble des points)

Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace qui vérifient $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$. On a trois cas :

(1) (S) est une sphère si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$. Cette sphère admet pour centre $\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{d}{2}\right)$ et pour rayon le nombre $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2}$.

(2) (S) est égale à l'ensemble $\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{d}{2}\right)\right\}$ si $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 0$.

(3) (S) est égale à l'ensemble vide si $a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0$.

Remarque :
L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace qui vérifient $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ est la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

10.6 Intersection d'une sphère et d'une droite

Soient (S) une sphère définie par une équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ et (D) une droite définie par une représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = e + \alpha t \\ y = f + \beta t; t \in \mathbb{R} \\ z = g + \gamma t. \end{cases}$$

Pour déterminer la position relative de (S) et (D), on résoud le système suivant :

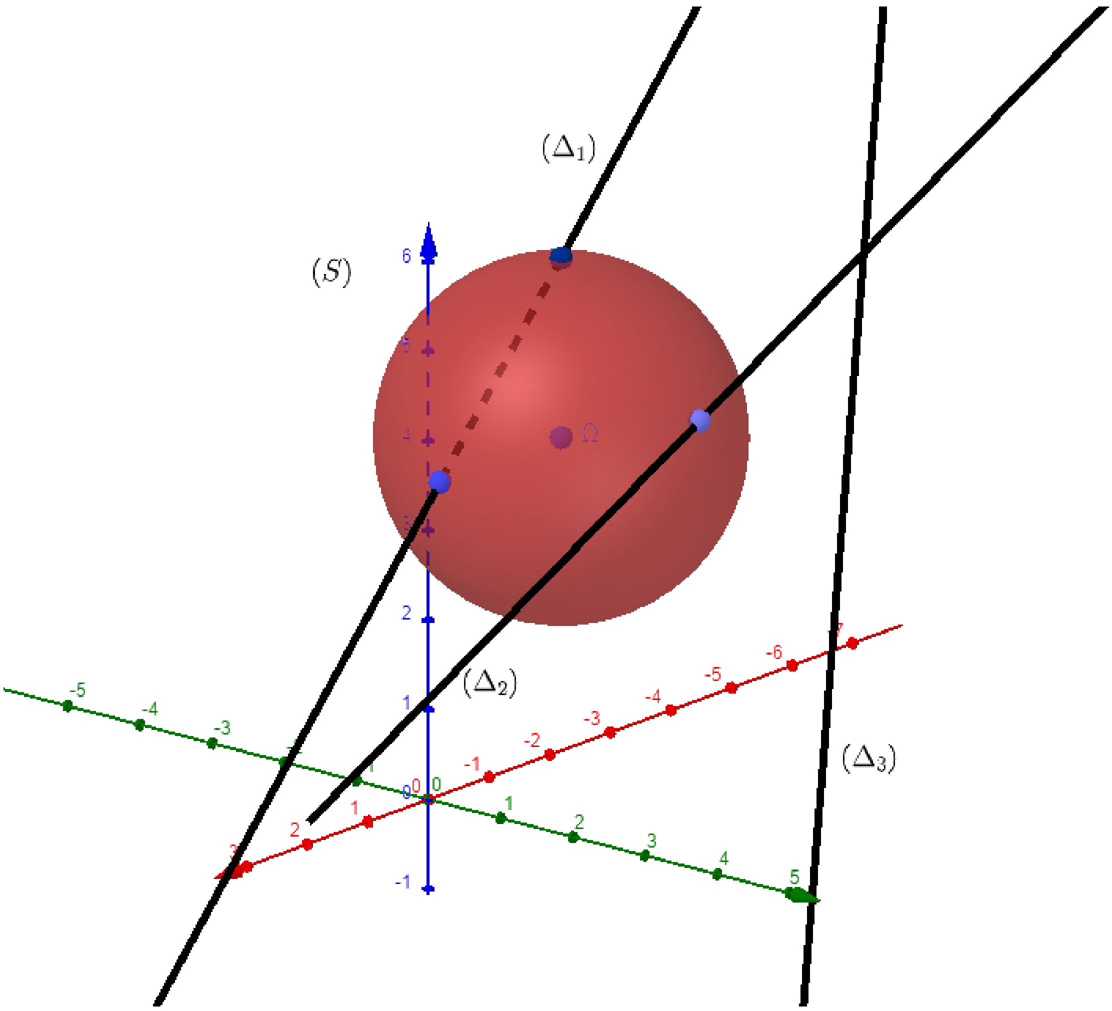
$$\begin{cases} x = e + \alpha t \\ y = f + \beta t \\ z = g + \gamma t \\ x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0. \end{cases}$$

On remplace x, y et z en fonction de t dans la quatrième équation et on obtient une équation de deuxième degré d'inconnue t. On a trois cas :

(1) Si cette équation admet deux solutions distincts t_1 et t_2, alors la droite coupe (ou traverse) la sphère en deux points $A_1(e + \alpha t_1, f + \beta t_1, g + \gamma t_1)$ et $A_2(e + \alpha t_2, f + \beta t_2, g + \gamma t_2)$.

(2) Si cette équation admet une solution unique t_0, alors la droite est tangente à la sphère au points $A(e + \alpha t_0, f + \beta t_0, g + \gamma t_0)$.

(3) Si cette équation n'admet aucune solution, alors la droite ne coupe pas la sphère ou la droite est située à l'exterieur de la sphère.



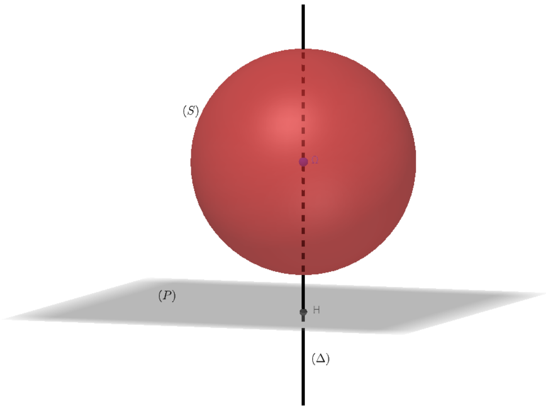
La droite (Δ_1) traverse la sphère (S).
La droite (Δ_2) est tangente à la sphère (S).
La droite (Δ_3) se situe à l'exterieur de la sphère (S).

10.7 Intersection d'une sphère et d'un plan

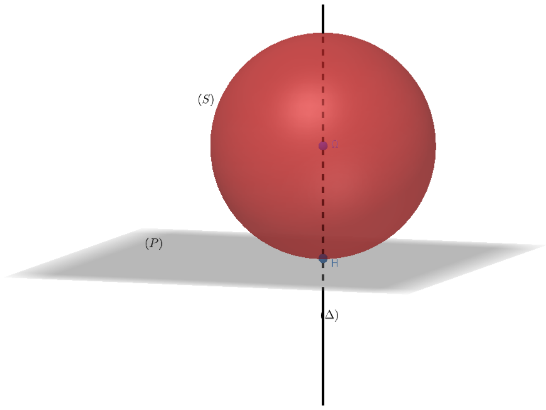
Propriété 10.16 (Position relative d'une sphère et d'un plan)

Soient $S(\Omega, R)$ une sphère, (P) un plan et H le projeté orthogonal de Ω sur (P). On a trois cas :

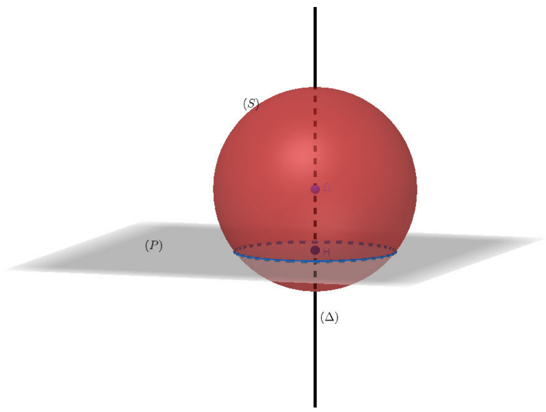
(1) si $d(\Omega, (P)) > R$, alors (P) ne coupe pas (S). On dit que (P) est à l'exterieur de (S).



(2) si $d(\Omega, (P)) = R$, alors (P) coupe (S) au point H. On dit que (P) est tangent à (S).



(3) si $d(\Omega, (P)) < R$, alors (P) coupe (S) en un cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega, (P))^2}$.



Remarque :
Le calcul de la distance $d(\Omega, (P))$ nous permet juste de déterminer la position relative de la sphère et du plan. Pour déterminer l'intersection de la sphère et du plan, on utilise la droite (Δ) pour déterminer les coordonnées du point H.

10.8 Equation cartésienne d'un plan tangent à une sphère en un point donné

Propriété 10.17

Soient $S(\Omega, R)$ une sphère et (P) un plan.
Le plan (P) est tangent à la sphère (S) si et seulement si $d(\Omega, (P)) = R$.

Remarque :

Si le plan (P) est tangent à la sphère (S) en un point donné A, alors le plan (P) est passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$.

CHAPITRE 11

PRODUIT VECTORIEL

11.1 Trièdre - orientation de l'espace - base et repère orientés

Définition 11.1 (Trièdre)

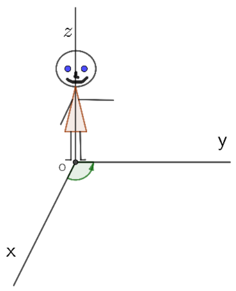
(1) Trois demi-droites $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ dans l'espace, de même origine O et non coplanaires, constituent dans cet ordre un trièdre qu'on note (Ox, Oy, Oz).

(2) Les demi-droites $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ sont les arêtes du trièdre (Ox, Oy, Oz)

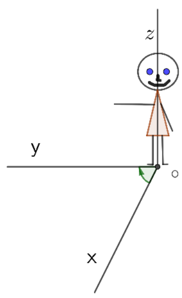
Définition 11.2 (Orientation de l'espace)

Soit (Ox, Oy, Oz) un trièdre. Le bonhomme d'Ampère, relatif au trièdre (Ox, Oy, Oz), est une personne fictive portée par l'arête $[Oz)$, ses pieds au point O et porte le regard sur l'axe $[Ox)$. Pour le bonhomme d'Ampère, il y a deux positions pour l'axe $[Oy)$:

l'axe $[Oy)$ à sa gauche :



l'axe $[Oy)$ à sa droite :



Par convention : on dit que le trièdre (Ox, Oy, Oz) est direct (ou positif) si le bonhomme d'Ampère est porté par l'arête $[Oz)$, ses pieds au point O, porte le regard sur l'axe $[Ox)$ et l'axe $[Oy)$ se trouve à sa gauche.

Définition 11.3 (base et repère orientés)

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace, on pose : $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OK}$.

(1) On dit que la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est directe si le trièdre (OI, OJ, OK) est direct.

(2) On dit que le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est direct si la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est directe.

(3) On dit que l'espace est orienté positivement (ou direct) s'il est rapporté à un repère direct.

Dans toute la suite, l'espace est orienté positivement (direct).

11.2 Définition géométrique du produit vectoriel

Définition 11.4 (Définition géométrique du produit vectoriel)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans cet ordre est le vecteur noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ et défini par :

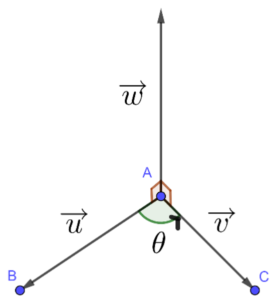
(1) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

(2) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$ tel que :

(i) $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{v}$.

(ii) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base directe.

(iii) $||\overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \sin(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.



$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$

Conséquences :

(1) Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, on a : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

(2) Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux non colinéaires de l'espace.

(i) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base orthogonale de l'espace.

(ii) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base orthonormée directe si : $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}|| = 1$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

Propriété 11.5 (L'aire d'un triangle - l'aire d'un parallélogramme)

(1) L'aire d'un triangle ABC est : $\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$.

(2) L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est : $||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$.

11.3 Antisymétrie - bilinéarité

Propriétés 11.6

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et α un réel. On a

1. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u})$. (antisymétrie)
2. $\overrightarrow{u} \wedge (\alpha \overrightarrow{v}) = (\alpha \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{u} = \alpha(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$.
3. $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$.
4. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$.
5. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

11.4 Coordonnées du produit vectoriel dans un repère orthonormé direct

Propriété 11.7

L'espace est muni d'une base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soient $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace. Le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est (X, Y, Z) tel que $X = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$, $Y = -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}$ et $Z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.
On écrit

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\overrightarrow{k}.$$

11.5 Distance d'un point à une droite

Propriété 11.8

Soient (D) la droite qui passe par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et M un point de l'espace.

La distance du point M à la droite (D) est : $d(M, (D)) = \dfrac{||\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}||}{||\overrightarrow{u}||}$.