Mathématiques
2 Bac. S. E.

Activités, applications, exercices, résumé, devoirs et examen blanc

Semestre 1

Table des matières

Chapitre 1 : Continuité d'une fonction numérique

Activités, applications et exercices

Activité 1 (Continuité en un point):

Partie I :

On considère la fonction suivante :

$$\begin{cases} h(x) = x+3 & ; \quad x < -1 \\ h(x) = 4 & ; \quad -1 \le x < 2 \\ h(x) = 3x-2 & ; \quad x \ge 2 \end{cases}.$$

1)- Tracer la courbe représentative de la fonction *h*.

2)- Peut-on tracer la courbe représentative de la fonction *h* sans lever le crayon ? Sinon, indiquer l'abscisse du point (ou les abscisses des points) de discontinuité.

Partie II :

On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x-1} \; ; \; x \ne 1 \\ f(1) = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x-1} \; ; \; x \ne 1 \\ g(1) = 2 \end{cases}$$

1)- Calculer $\lim_{x \to 1} f(x)$ et $\lim_{x \to 1} g(x)$.

2)- Laquelle des deux fonctions possède une discontinuité ? Justifier votre réponse.

3)- Que peut-on conclure ?

Application 1 :

On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 5x} \; ; \; x \ne 5 \\ f(5) = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} ; x \ne 0 \\ g(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} h(x) = \dfrac{\sin(3x)}{x} ; x \ne 0 \\ h(0) = 2 \end{cases}.$$

1)- Étudier la continuité de f en 5.

2)- Montrer que g est continue en zéro.

3)- La fonction *h* est-elle continue en zéro ? Justifier votre réponse.

Exercice 1 :

Soit h la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x^3 - x + 6}{4 - x^2} \; ; \; x \ne -2 \\ h(-2) = 3a - 1 \end{cases}$$, où *a* est un nombre réel.

Déterminer la valeur de *a* pour que h soit continue en –2.

Activité 2 (Continuité à droite et continuité à gauche):

On considère la fonction suivante :

$$\begin{cases} f(x) = x+3 & ; \quad x \in]-\infty, -1[\\ f(x) = 4 & ; \quad x \in [-1, 2[\\ f(x) = 3x-2 & ; \quad x \in [2, +\infty[\end{cases}.$$

1)- Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.

2)- a)- Déterminer la limite de f à droite et à gauche en –1.

b)- Que peut-on remarquer ?

3)- a)- Déterminer la limite de f à droite et à gauche en 2.

b)- Que peut-on remarquer ?

Application 2 :

On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{x}} \; ; \; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} g(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{4-x^2}} ; x<2 \\ g(2)=1 \end{cases}.$$

1)- Étudier la continuité de f à droite en 0.

2)- Étudier la continuité de g à gauche en 2.

Exercice 2 :

On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} h(x)=x^4-x & ; x<-1 \\ h(x)=\dfrac{1-x^2}{x+1} & ; x>-1 \\ h(-1)=2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} k(x)=\dfrac{2x-|x|}{|x|} \; ; x\neq 0 \\ k(0)=3 \end{cases}.$$

1)- Étudier la continuité de h en -1.

2)- Étudier la continuité de k en 0.

Activité 3 (Continuité sur un intervalle) :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I.

On dit que f est **continue** sur I si elle est continue en tout point de I.

I)- Fonctions usuelles continues

Fonction	Exemple (à compléter ou à construire)
Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.	
Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle contenu dans son domaine de définition.	
Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.	
La fonction $x \mapsto \|x\|$ est continue sur $\mathbb{R}$.	
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.	
La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur chaque intervalle contenu dans $D_{\tan}=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.	

II)- Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux **fonctions continues** sur un intervalle I, n un entier naturel non nul et α un réel.

Propriété	Exemple (à compléter ou à construire)
Les fonctions $f+g$, $f-g$, αf, fg et f^n sont continues sur I.	
Si $\forall x\in I,\; g(x)\neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.	
Si $\forall x\in I,\; f(x)\geq 0$, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.	

Application 3 :

Étudier la continuité de f sur l'intervalle I dans les cas suivants :

(1) $f(x)=\dfrac{7x^3-2x-1}{5x+3}$ $\quad I=[1,+\infty[$

(2) $f(x)=x-\sin x+5$ $\quad I=\mathbb{R}$

(3) $f(x)=(8x^3-2x-5)|x|$ $\quad I=\mathbb{R}$

(4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ $\quad I=[0,5]$

(5) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$ $\quad I=]-\infty,-2]$

(6) $f(x)=\sqrt{1-\sin x}$ $\quad I=\mathbb{R}$

Exercice 3 :

On considère la fonction suivante :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\cos x}{2-x} & ; \ x<0 \\ f(x)=\sqrt{\dfrac{7x+1}{x+4}} & ; \ x\geq 0 \end{cases}$$

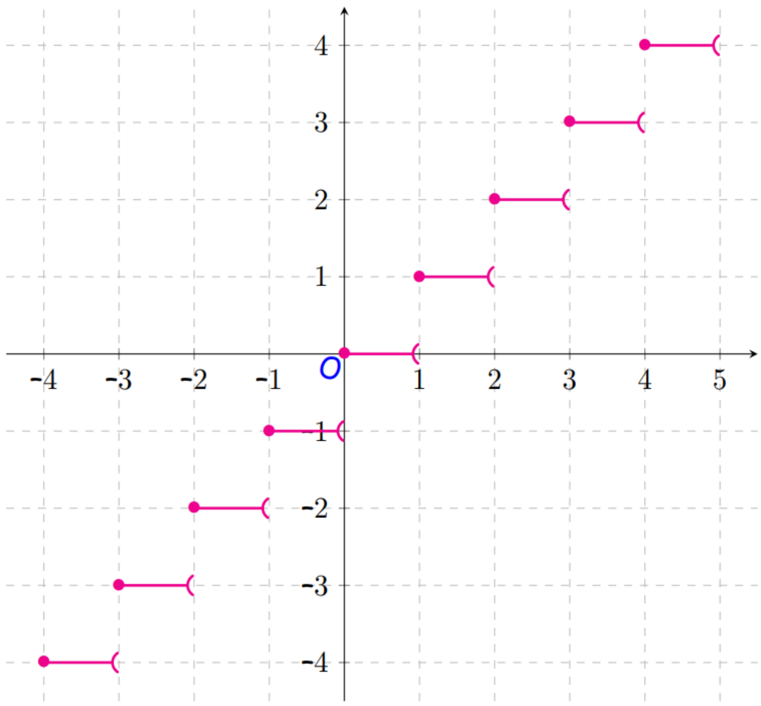
Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Continuité de la fonction partie entière : Si x un réel compris entre deux entiers relatifs consécutifs n et $n+1$, on dit que **la partie entière** de x est égale à n, et on note $E(x)=n$.

Exemples :

$$E(3{,}5)= \quad , E(2)= \quad , E(\sqrt{3})= \quad , E(-1{,}5)= \quad , E(-3)=$$

Ci-dessous la représentation graphique de la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$:



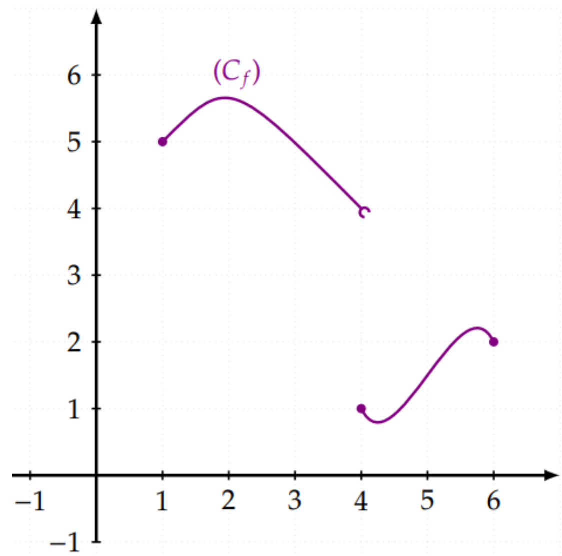
La fonction partie entière est continue sur chaque intervalle du type $[n,n+1[$, où n est un entier relatif, mais n'est pas continue en chaque entier relatif.

Activité 4 (Théorème des valeurs intermédiaires) :

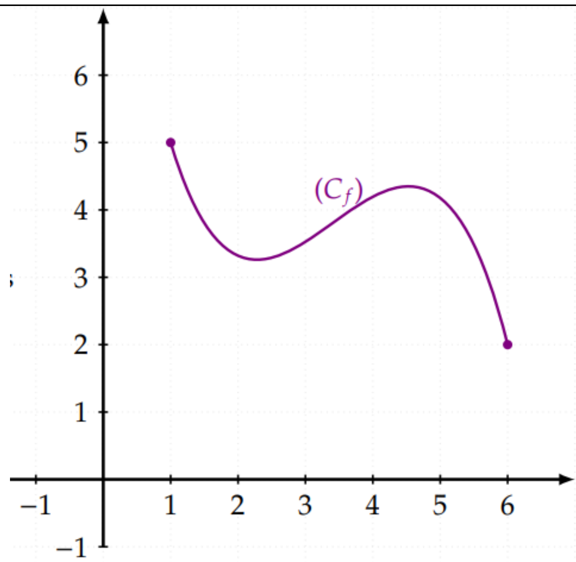
Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[1,6]$ telle que : $f(1)=5$ et $f(6)=2$.

1)- On considère les cas suivants :

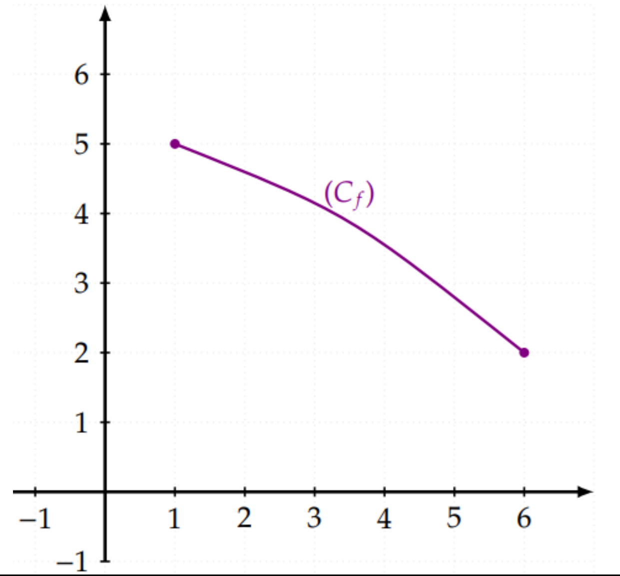
1^er cas



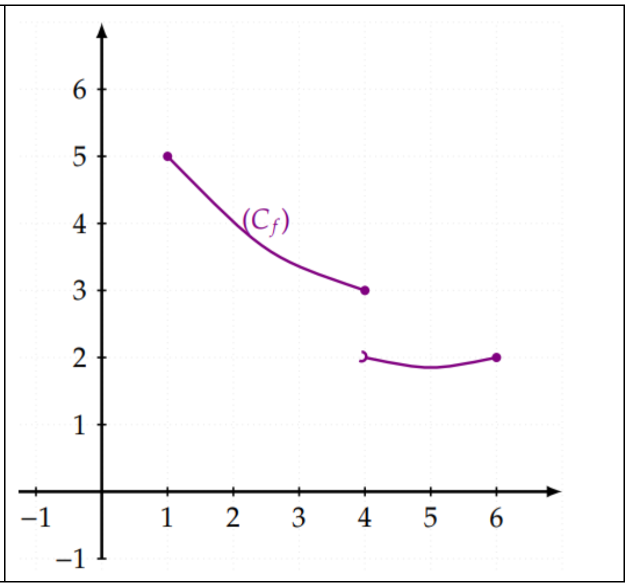
2^ème cas



3ème cas



4ème cas



Dans chacun des cas précédents, déterminer le nombre de solutions de l'équation *f(x)* = 3 sur l'intervalle [1,6], puis donner toutes les conditions suffisantes qui assurent l'existence de solutions.

2)- Sous quelles conditions sur le réel k et la fonction f , l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur l'intervalle [1,6] ? et sous quelle condition supplémentaire cette solution est unique ?

3)- On peut reformuler le résultat de la question précédente, sous forme d'un théorème, comme suit :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et a et b deux éléments cet intervalle tels que a<b.
*Si f est **continue** sur I et k un réel compris entre f(a) et f(b), alors **il existe au moins un réel c compris entre a et b** tel que f(c)= k (ou encore, l'équation f(x)= k admet au moins une solution c comprise entre a et b).*

a)- Interpréter graphiquement la conclusion de ce théorème.
b)- Donner une condition supplémentaire pour que la solution soit unique.
c)- Énoncer une conséquence du théorème précédent pour lorsque $k = 0$.

Application 04 :

Soit g une fonction numérique continue sur l'intervalle [–8,6] dont le tableau de variations suivant :

x	-8		-1		0		6
g	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	7	$\searrow$	-2

1)- Dénombrer les solutions (c'est-à-dire, déterminer le nombre de solutions) de l'équation $g(x) = 3$.

2)- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution sur l'intervalle $]1,6[$.

Application 4 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=x^2-\cos x$.

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]0,\pi[$.

Exercice 4 :

1)- Montrer que l'équation $x^3+2x-7=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1,2[$.

2)- Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,25.

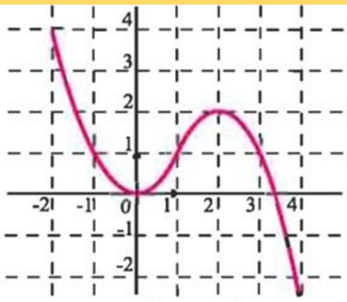
Activité 5 (Image d'un intervalle par une fonctions continue):

1)- On considère le tableau de variations de la fonction g donné dans l'Application 04

Déterminer $g([-8,-5])$, $g([-5,1])$, $g([-5,6])$ et $g([-8,6])$.

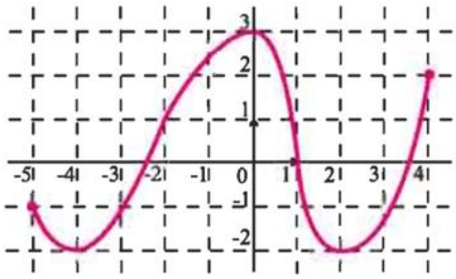
2)- Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement l'image de l'intervalle I par la fonction f.

Cas 1 :



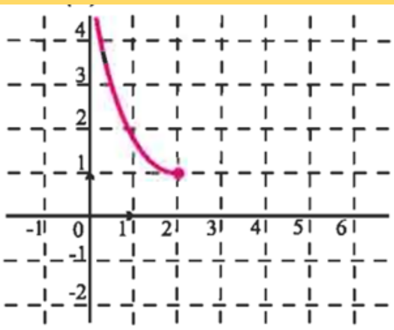
$I = [0,2]$

Cas 2 :



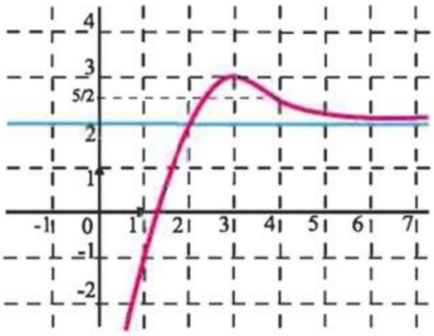
$I = [-5,4]$

Cas 3 :



$I =]0,2]$

Cas 4 :



$I = [4,+\infty[$

Application 5 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

1)- Dresser le tableau de variations de f.

2)- Déterminer $f([2,4])$, $f([0,1])$, $f([1,+\infty[)$ et $f([-2,1])$.

Activité 6 (Continuité de la composée de deux fonctions continues):

On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1$.

1)-Déterminer deux fonctions f et g telles que $h = fog$

2)- Étudier la continuité de h sur $[1,+\infty[$.

Application 6 :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3 - 5\cos x}{\cos x + 2}$ et $g(x) = \sin(x^2 + 3x - 7)$.

Étudier la continuité de f et g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

On considère la fonction suivante : $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \; ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1)- Montrer que f est continue en zéro.

2)- Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Activité 7 (Fonctions réciproques):

On considère la fonction numérique f définie sur $I = \left[\dfrac{3}{2},+\infty\right[$ par : $f(x) = \sqrt{2x-3}$.

1)- Déterminer $f(I)$

2)- Montrer que pour tout réel y de $f(I)$, l'équation f(x) = y admet une unique solution dans I que l'on déterminera.

Application 7 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x - 5$.

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

Exercice 7 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x^3+2\sqrt{x}-4$.

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $[0,+\infty[$, et que : $1<\alpha<2$

Activité 8 (Racines n-ièmes):

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=x^n$, où n est un entier supérieur ou égal à 2.

1)-Déterminer les variations de f sur $[0,+\infty[$

2)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

Application 8 :

1)- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$(E_1):\quad x^7-5=0$ $\qquad (E_2):\quad 3x^8-1=6$ $\qquad (E_3):\quad x^3+5=1$

$(E_4):\quad 7x^{12}-1=-3$ $\qquad (E_5):\quad \sqrt[5]{x}-15=-13$ $\qquad (E_6):\quad \sqrt[3]{2x-1}-4=0$

2)- Calculer $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1-x}$.

3)- Comparer $\sqrt{3}$ et $\sqrt[4]{17}$, puis $\sqrt{2}$ et $\sqrt[3]{5}$.

Exercice 8 :

1)- Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x-1}-2}{x-3}$.

Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

2)- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\left(x\sqrt[4]{x}+1\right)^3-5=0$.

3)- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-3}\geq 0$.

4)- Simplifier les nombres $A=\dfrac{\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{16}}{\sqrt[3]{\sqrt{8}}\times\sqrt[12]{4}}$ et $B=\dfrac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt[6]{64}\times\sqrt[10]{8}}{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{4}}$.

Résumé de cours

❶ Continuité en un point

Définition :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
On dit que f est **continue** en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

❷ Continuité à droite\ à gauche en un point

Définition :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a-\alpha, a]$ avec $\alpha > 0$.
On dit que f est **continue à gauche** en a si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Définition :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a, a+\alpha[$ avec $\alpha > 0$.
On dit que f est **continue à droite** en a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Propriété :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
Alors f est ***continue*** en a si et seulement si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

❸ Continuité sur un intervalle

Définition :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I.
On dit que f est **continue** sur I si elle est continue en tout point de I.

Propriétés :

Fonctions usuelles continues

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle contenu dans son domaine de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto |x|$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur chaque intervalle contenu dans
  $D_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux **fonctions continues** sur un intervalle I et α un réel. On a :

- Les fonctions $f+g$, $f-g$, αf et fg sont continues sur I.
- Si $\forall x \in I,\ g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.
- Si $\forall x \in I,\ f(x) \geq 0$, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

❹ Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition (…au moins…) :

Si f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que : ***f (a).f (b)<0***, alors l'équation $f(x) = 0$ admet ***au moins*** une solution dans l'intervalle $]a, b[$.

Proposition (…unique…) :

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur $[a,b]$ telle que : ***f (a).f (b)<0*** , alors l'équation $f(x)=0$ admet une ***unique*** solution dans l'intervalle $]a,b[$.

❺ Image d'un intervalle par une fonction continue

Proposition (Image d'un segment) :

Soit f une fonction **continue** sur $[a,b]$.

On a : $f\left([a,b]\right)=[m,M]$, où m et M sont respectivement la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $[a,b]$.

Proposition :

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I , et a et b sont deux éléments de I tels que $a<b$.

f est **strictement croissante** sur I	f est **strictement décroissante** sur I
$f\left([a,b]\right)=\left[f(a),f(b)\right]$	$f\left([a,b]\right)=\left[f(b),f(a)\right]$
$f\left(]a,b]\right)=\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),f(b)\right]$	$f\left(]a,b]\right)=\left[f(b),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$f\left([a,b[\right)=\left[f(a),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$f\left([a,b[\right)=\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),f(a)\right]$
$f\left(]a,b[\right)=\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$f\left(]a,b[\right)=\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$f\left([a,+\infty[\right)=\left[f(a),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$f\left([a,+\infty[\right)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(a)\right]$
$f\left(]a,+\infty[\right)=\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$f\left(]a,+\infty[\right)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$f\left(]-\infty,b]\right)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(b)\right]$	$f\left(]-\infty,b]\right)=\left[f(b),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$
$f\left(]-\infty,b[\right)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$f\left(]-\infty,b[\right)=\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$
$f\left(\mathbb{R}\right)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$f\left(\mathbb{R}\right)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$

❻ Continuité de la composée de deux fonctions continues

Propriété :

Soient f et g deux fonctions numériques.

Si f est continue sur un intervalle I et g est continue sur $f(I)$, alors gof est continue sur I .

❼ Fonctions réciproques

Théorème :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I .

Si f est **continue** et **strictement monotone** sur I , alors la fonction f admet une **fonction réciproque** , notée f^{-1}, définie sur $J=f(I)$ à valeurs dans I telle que : $\left(\forall x\in J\right)\left(\forall y\in I\right),\ f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$.

Propriétés :

Soit f une **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I . On pose : $J=f(I)$.

- La fonction f^{-1} est continue sur J .

- La fonction f^{-1} est strictement monotone sur J et a le même sens de variation que f.
- $\forall x \in I,\ f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ et $\forall x \in J,\ f\left(f^{-1}(x)\right) = x$.
- Dans un repère orthonormé, $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et $\left(\mathscr{C}_{f^{-1}}\right)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire : la droite d'équation $y = x$).

Théorème :

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I et $k \in f(I)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet une ***unique*** solution dans l'intervalle I.

❽ Racines n-ièmes

Définition :

Soit n un entier naturel non nul.

La fonction $x \mapsto x^n$ admet une fonction réciproque de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$, appelée **fonction racine n-ième** et notée $\sqrt[n]{\ }$.

Notons que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ \sqrt[1]{x} = x$ et $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

Propriétés :

Soit n un entier naturel non nul.

$\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$	$\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
$\forall x \in [0,+\infty[,\ \sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$	$\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ x < y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$	La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

Résolution de l'équation : $x^n = a$, où a est un réel.

	n est pair	n est impair
$a \geq 0$	$\mathscr{S} = \left\{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\right\}$	$\mathscr{S} = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}$
$a < 0$	$\mathscr{S} = \varnothing$	$\mathscr{S} = \left\{-\sqrt[n]{-a}\right\}$

Propriétés :

Soient $(x,y) \in [0,+\infty[^2$ et $(m,n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$.

$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$	$\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$	$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ avec $y \neq 0$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$	$\sqrt[nm]{x^m} = \sqrt[n]{x}$	$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[m]{x} = \sqrt[nm]{x^{n+m}}$

Définition (Puissance rationnelle d'un réel strictement positif):

Soient x un réel strictement positif et r un nombre rationnel tel que $r = \dfrac{m}{n}$ avec $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Le nombre x^r, appelé **puissance rationnelle de base x et d'exposant r**, est le réel positif $\sqrt[n]{x^m}$.

Autrement dit : $x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

Propriétés :

Soient $(a,b) \in]0,+\infty[^2$ et $(r,r') \in \mathbb{Q}^2$.

$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$	$\left(a^r\right)^{r'} = a^{rr'}$	$\dfrac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$	$\dfrac{1}{a^r} = a^{-r}$	$a^r \times b^r = (ab)^r$	$\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$

Série d'exercices

Exercice 1 :

On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} & ;x\neq 1 \\ f(1)=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{x\sqrt{x+2}-4}{x-2} & ;x\neq 2 \\ g(2)=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x)=(x-2)\sqrt{3-x} & ;x<1 \\ h(x)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{x}} & ;x>1 \\ h(1)=-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k(x)=\left(\dfrac{x^3+5x-6}{x-2}\right)\cos x & ;x\in\left]-\infty,0\right[\\ k(x)=8x^2-\sqrt{x}+3 & ;x\in\left[0,1\right[\\ k(x)=\sqrt{x+8}+7\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) & ;x\in\left]1,+\infty\right[\\ k(1)=10 \end{cases}$$

1)- Étudier la continuité de f en 1.

2)- Étudier la continuité de g en 2.

3)- Étudier la continuité de h en 1.

4)- Étudier la continuité de k sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Soit u la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} u(x)=\sqrt{x-1}+b & ;\ x\geq 2 \\ u(x)=\dfrac{x^2-x+a}{x-2} & ;\ x<2 \end{cases}$$, où a et b sont deux réels.

Déterminer a et b pour que u soit continue en 2.

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=(x-1)\sqrt{x}$.

1)- Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Étudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$.

3)- a)- Montrer que : $\forall x\in D_f-\{0\},\ f'(x)=\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$

b)- Dresser le tableau de variations de f.

4)- Déterminer $f([2,4])$, $f([0,\frac{1}{3}])$, $f([1,+\infty[)$,et $f([0,1])$.

Exercice 4 :

On considère la fonction numérique g définie par : $g(x)=2x^3-5x^2-3$.

1)- Étudier les variations de g.

2)- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\left]\dfrac{5}{2};3\right[$.

3)- Vérifier que : $\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{2\alpha-5}}$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction numérique sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+3x^2+2$.

1)- Déterminer les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Étudier les variations de f.

3)- a)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α comprise entre –4 et –3.

b)- Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,25.

4)- Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 6 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x+2\sqrt{x-3}-2$.

1)- Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Étudier la continuité de f sur D_f .

3)- a)- Vérifier que : $\forall x\in D_f$, $f(x)=\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2$.

b)- En déduire la monotonie de f .

4)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

5)- Exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x, pour tout $x\in J$

6)- Dresser le tableau de variations de f^{-1}.

Exercice 7 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-1}+3 & ; \ x\geq 1 \\ f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & ; \ x<1 \end{cases} .$$

1)- Déterminer D_f , puis calculer les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Étudier la continuité de f sur D_f .

3)- Soit g la restriction de f sur un l'intervalle $I=[1,+\infty[$.

a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Exprimer $g^{-1}(x)$ en fonction de x, pour tout $x\in J$.

Exercice 8 :

1)- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x\sqrt[4]{x}-3=0$	$\sqrt[3]{x}-\sqrt{2x}=0$	$\sqrt[3]{x^2+4x}-2=0$	$x^6-x^3-6=0$	$\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}-2=0$

2)- Comparer $\sqrt[3]{3}$ et $\sqrt{2}$.

3)- Simplifier les nombres suivants :

$$A=\frac{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{\sqrt{81}}\times\sqrt[3]{9}}{\sqrt[15]{3^5}} \ ; \ B=\frac{\sqrt[3]{11^2}\times\sqrt[4]{11}\times\sqrt[5]{11^4}}{\left(\sqrt[6]{11^5}\right)^2} \ ; \ C=\frac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt[4]{64}\times\sqrt[5]{2}}{\sqrt[4]{8}\times\sqrt[12]{2}} .$$

4)- Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x-5}-1}{x-2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+x-1}}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}-1}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2-\sqrt[4]{15-x}}{x^3+1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[4]{x^2-4}}$

Exercice 9 :

On considère les fonctions f et g définies comme suit : $f(x)=x^3+\sqrt[3]{x}$ et $g(x)=\sqrt[3]{1-x}$.

Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ se coupent en un point d'abscisse comprise entre 0 et 1.

Exercice 10 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}-1$.

1)- Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Étudier la continuité de f sur D_f .

3)- Montrer que f est strictement croissante sur D_f .

4)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

5)- Exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x, pour tout $x\in J$

6)- Dresser le tableau de variations de f^{-1}.

Exercice 11 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x}$.

1)- Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Étudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$.

3)- Montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, puis déterminer $f([0,2])$.

4)- Soit g la restriction de f sur un l'intervalle $I=[0,2]$.

a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Exprimer $g^{-1}(x)$ en fonction de x, pour tout $x\in J$

Exercice 12 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x^3+x+1$.

1)- Étudier les variations de f .

2)- a)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

b)- Vérifier que : $-1<\alpha<0$

3)- Montrer que : $1+\alpha^2=\dfrac{-1}{\alpha}$ et $\alpha+\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1+\alpha}}}=0$.

4)- Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=(x-\alpha)\left(x^2+\alpha x-\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

5)- Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

6)- Soit g la fonction numérique définie par : $\begin{cases} g(x)=x^2 & ;\ x\geq\alpha \\ g(x)=-1-\dfrac{1}{x} & ;\ x<\alpha \end{cases}$.

Étudier la continuité de g en α .

Exercice 13 :

1)- Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants : $a=\sqrt{5}$; $b=\sqrt[3]{7}$; $c=\sqrt[4]{11}$.

2)- Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right) & ;\ x\neq 0 \\ f(0)=0 & \end{cases}$.

Montrer que f est continue en zéro.

3)- Soit g une fonction continue sur $[0,1]$ telle que : $g(1)=\sqrt{2}$.

Montrer que : $\exists c\in]0,1[,\ \sqrt[3]{c}\,g(c)=1$.

Chapitre 2 : Dérivabilité d'une fonction numérique

Activités, applications et exercices

Activité de rappel 1:

1)- Compléter les tableaux suivants :

Limite et image	Interprétation analytique (Dérivabilité)	Interprétation graphique
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=5$ $f(2)=3$		
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=+\infty$ $f(0)=-1$		
$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3}=0$ $f(-3)=4$		
$\lim\limits_{x\to 7^+}\dfrac{f(x)-f(7)}{x-7}=-1$ $f(7)=0$		
$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=-\infty$ $f(3)=-8$		
$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2$ $f(0)=0$		

Limite et image	Équation de la (demi-)tangente
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=5$; $f(2)=3$	
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=+\infty$; $f(0)=-1$	
$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3}=0$; $f(-3)=4$	
$\lim\limits_{x\to 7^+}\dfrac{f(x)-f(7)}{x-7}=-1$; $f(7)=0$	
$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2$; $f(0)=0$	

2)- On considère le tableau de variations suivant :

x	-3		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	7	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

a)- Donner le domaine de définition de f.

b)- Donner le point (ou les points) où f n'est pas dérivable.

c)- Déterminer les équations des tangentes horizontales à la courbe représentative

Activité de rappel 2 :

Sachant que les conditions suffisantes de la dérivabilité sont vérifiées, compléter le tableau suivant :

Règle	Fonction *f*	La fonction dérivée *f '*
$(u+v)'=$	$f(x)=2x^5-\sin(x)+3x-\sqrt{2}$	$f'(x)=$
$(uv)'=$	$f(x)=\left(1+x-x^2\right)\cos(x)$	$f'(x)=$
$\left(\frac{u}{v}\right)'=$	$f(x)=\frac{2x+3}{x^3-4x+7}$	$f'(x)=$
$\left(u^n\right)'=$, $n\in\mathbb{N}$	$f(x)=\left(x-\tan x\right)^3$	$f'(x)=$
$\left(\frac{1}{u}\right)'=$	$f(x)=\frac{5}{8x-3}$	$f'(x)=$
$\left(\sqrt{u}\right)'=$	$f(x)=\sqrt{x^2-6x+7}$	$f'(x)=$

Application 1 :

Étudier la dérivabilité de f en a, puis donner l'interprétation graphique dans chacun des cas suivants :

(1) $f(x)=x^2-2x+3$ $a=1$

(2) $f(x)=x-\sin x$ $a=0$

(3) $f(x)=x\sqrt{x+2}$ à droite en $a=-2$

(4) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ à droite en $a=0$

(5) $f(x)=\sqrt[3]{7-x}$ $a=-1$

Application 2 :

On considère les fonctions suivantes : $\begin{cases} f(x)=\frac{1-\cos x}{x} & ;\ x<0 \\ f(x)=x\sqrt{x} & ;\ x\geq 0 \end{cases}$ et $g(x)=x|x-4|$.

1)- Étudier la continuité de f en 0.

2)- Étudier la dérivabilité de f en 0.

3)- Étudier la dérivabilité de g en 4

Activité 3 :

On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=2\cos^3 x-3\cos^2 x+1$.

Dans l'activité 6 du chapitre précédent, on a déterminé deux fonctions f et g telles que : $h = f \circ g$. Ces deux fonctions sont définies par : $f(x)=2x^3-3x^2+1$ et $g(x)=\cos(x)$.

1)- Exprimer $h'(x)$ et $f'og'(x)$, en fonction de *x*. Que peut-on déduire ?

2)- Exprimer $f'o\,g(x)$ en fonction de *x*.

3)- Que peut-on déduire ?

Application 3 :

On considère la fonction suivante : $f(x)=\cos\left(2x^3-3x^2+1\right)$.

Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$, puis déterminer l'expression de la fonction dérivée de *f*.

Activité 4:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(2)=5$.

1)- Par deux manières différentes, déterminer $\left(fof^{-1}\right)'(x)$

2)- Sous quelles conditions sur la fonction f, la fonction f^{-1} est dérivable en 5.

3)- Sachant que : $f'(2)=-3$, montrer que f^{-1} est dérivable en 5 et déterminer son nombre dérivé.

Série d'exercices

Exercice 1 (Fonction polynomiale)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3+9x^2-5$.

1)- Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=6x(x+3)$, puis dresser le tableau de variations de f.

2)- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentant la fonction f au point d'abscisse 1.

3)- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} vers $[0,+\infty[$ définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Vérifier que : $g^{-1}(6)=1$.

c)- Montrer que g^{-1} est dérivable en 6, puis déterminer $\left(g^{-1}\right)'(6)$.

Exercice 2 (Fonction rationnelle)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x^3}{2x+1}$.

1)- Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Étudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$.

3)- Montrer que : $\forall x\in D_f$, $f'(x)=\dfrac{x^2(4x+3)}{(2x+1)^2}$, puis dresser le tableau de variations de f.

4)- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Dresser le tableau de variations de g^{-1}.

c)- Calculer $g(1)$.

d)- Montrer que g^{-1} est dérivable en $\dfrac{1}{3}$, puis déterminer $\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Exercice 3 (Fonction irrationnelle)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=(x-1)\sqrt{x}$.

1)- Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter le résultat graphiquement.

3)- a)- Montrer que : $\forall x\in D_f-\{0\}$, $f'(x)=\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$, puis dresser le tableau de variations de f.

b)- En déduire que : $\forall x\in[0,+\infty[$, $(x-1)\sqrt{x}\geq\dfrac{-2\sqrt{3}}{9}$

4)- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Dresser le tableau de variations de g^{-1}.

c)- Calculer $g(4)$.

d)- Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{g^{-1}(x)-4}{x-6}$.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1)- Déterminer D_f, et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2)- Étudier la dérivabilité de f sur D_f.

3)- a)- Montrer que : $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

b)- Dresser le tableau de variations de f.

4)- Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentant la fonction f au point d'abscisse 0.

5)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Dresser le tableau de variations de f^{-1}.

c)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 1, puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie sur $[-1,1]$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} & ;\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1)- Étudier la continuité de f en 0.

2)- Montrer que la fonction f est dérivable en 0, puis interpréter le résultat graphiquement.

3)- Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentant la fonction f au point d'abscisse 0.

4)- Étudier la dérivabilité de f à droite en -1, puis interpréter le résultat graphiquement.

5)- Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1, puis interpréter le résultat graphiquement.

6)- a)- Montrer que : $\forall x \in]-1,1[-\{0\}$, $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}$.

b)- Dresser le tableau de variations de f.

7)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Dresser le tableau de variations de f^{-1}.

Chapitre 3 : Étude de fonctions

Activités, applications et exercices

Activité 1 (Rappel) :

On considère les fonctions suivantes : $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2+3}$, $g(x)=x-2\sqrt{x}+3$ et $h(x)=\dfrac{x^2+5x}{x-3}$.

Pour chacune des fonctions précédentes :

1)- Déterminer le domaine de définition,

2)- Calculer les limites aux bornes du domaine de définition,

3)- Déterminer les branches infinies.

Application 1 :

On considère les fonctions suivantes : $f(x)=\dfrac{2x+5}{(x-1)^2}$ et $g(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$.

Pour chacune des deux fonctions précédentes :

1)- Déterminer le domaine de définition,

2)- Calculer les limites aux bornes du domaine de définition,

3)- Déterminer les branches infinies.

Exercice 1 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Vérifier que la droite d'équation $y=x+1$ est l'asymptote oblique de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=x\sqrt{x+1} & ;\ x\geq -1 \\ f(x)=\dfrac{1-x^2}{(x+2)^2} & ;\ x<-1 \end{cases}$.

1)- Déterminer D_f, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2)- Étudier les branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.

Activité 2 (Rappel) :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-x+1}$.

1)- Déterminer D_f.

2)- Montrer que la droite d'équation $x=\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

Activité 3 (Rappel) :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x^3+3x^2-4$.

Montrer que le point $A(-1,-2)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

Exercice 3 :

Interpréter graphiquement ce qui suit :

1	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$	**2**	$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\infty$
3	$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=+\infty$	**4**	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=-\infty$
5	$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-2x\right)=0$	**6**	$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)-(-x+1)\right)=0$
7	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$	**8**	$f(0)=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{f(x)}{x}=-\infty$
9	$f(1)=2$ et $f'(1)=0$	**10**	$\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)+f(x)=0$
11	$\forall x\in\mathbb{R},\ f(4-x)+f(x)=6$	**12**	$\forall x\in\mathbb{R},\ f(2-x)=f(x)$

Résumé de cours

❶ Branches infinies

<table>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$</td><td colspan="3">$(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=b$ au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$</td><td colspan="3">$(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=a$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$</td><td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$</td><td colspan="2">$(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$</td><td colspan="2">$(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$</td><td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x)-ax\right)=b$</td><td>$(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$</td><td>$(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.</td></tr>
</table>

Remarque importante : Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x)-(ax+b)\right)=0$, alors $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.

❷ Centre de symétrie

$\Omega(a,b)$ est un **centre de symétrie** de $(\mathscr{C}_f)$ si, et seulement si, $\begin{cases}\forall x\in D_f,\ 2a-x\in D_f\\ \forall x\in D_f,\ f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$

❸ Axe de symétrie

$x=a$ est un **axe de symétrie** de $(\mathscr{C}_f)$ si, et seulement si, $\begin{cases}\forall x\in D_f,\quad 2a-x\in D_f\\ \forall x\in D_f,\quad f(2a-x)=f(x)\end{cases}$

Série d'exercices

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x-1+\sqrt{x-1}$.

1)- Vérifier que : $D_f=[1,+\infty[$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en 1, puis interpréter le résultat graphiquement.

4)- a)- Montrer que : $\forall x\in D_f-\{1\},\quad f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x-1}+1}{2\sqrt{x-1}}$

b)- En déduire les variations de f.

5)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe la première bissectrice du repère en un unique point à déterminer.

6)- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

7)- On admet que f admet une fonction réciproque notée f^{-1}.

Tracer avec une autre couleur et dans le même repère précédent $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$.

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$.

1)- Vérifier que : $D_f=[0,1[\cup]1,+\infty[$, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2)- Déterminer les deux branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter le résultat graphiquement.

4)- a)- Montrer que : $\forall x\in D_f-\{0\},\ f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$

b)- Dresser le tableau de variations de f.

5)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe la première bissectrice du repère en deux points différents à déterminer.

6)- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé (**on admet que le point d'abscisse 9 est un point d'inflexion**).

7)- On admet que g la restriction de f sur l'intervalle $[0,1[$ admet une fonction réciproque notée g^{-1}.

Tracer avec une autre couleur et dans le même repère précédent $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{x-1}$.

1)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Étudier la continuité de f sur $[1,+\infty[$.

3)- Déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

4)- Étudier la dérivabilité de f à droite en 1, puis interpréter le résultat graphiquement.

5)- a)- Montrer que : $\forall x\in]1,+\infty[,\quad f'(x)=\dfrac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$

b)- En déduire les variations de f.

6)- Déterminer $f\left([1,+\infty[\right)$.

7)- a)- Montrer que : $\forall x\in]1,+\infty[,\quad f''(x)=\dfrac{3x-4}{4\sqrt{(x-1)^3}}$

b)- En que $(\mathscr{C}_f)$ admet un point d'inflexion A dont on déterminera ses coordonnées.

8)- Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.

9)- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

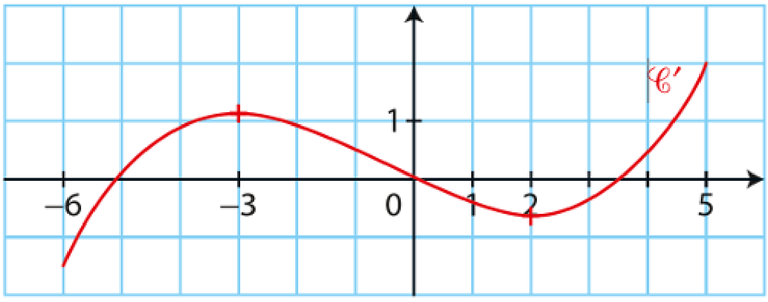
10)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 2, puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

11)- Tracer avec une autre couleur et dans le même repère précédent $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$.

Exercice 4

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-6 ; 5]$.
On donne dans le repère ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}'$, représentative de la fonction f', dérivée de f'.



1)- Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-6 ; 5]$.
2)- Étudier la concavité de f sur l'intervalle $[-6 ; 5]$ et préciser les abscisses des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f.

Exercice 5

Partie A :

Soit u la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=7x^3+6x+1$.

1)- Déterminer $u'(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

2)- Dresser le tableau de variations de u (***Les limites ne sont pas demandées***).

3)- En déduire que : $\forall x\in[0,+\infty[,\quad u(x)>0$.

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\left(x^3+2x+1\right)\sqrt{x}-3$.

1)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, puis déterminer la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$.

2)- Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter le résultat graphiquement.

4)- a)- Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[,\quad f'(x)=\dfrac{u(x)}{2\sqrt{x}}$.

b)- En utilisant la question **A.3**), déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

5)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α, puis vérifier que : $0,8<\alpha<0,9$.

6)- Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentant la fonction f au point d'abscisse 1.

7)- Tracer (T) et $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé (**on admet que $(\mathscr{C}_f)$ possède un point d'inflexion d'abscisse $\beta\simeq 0,1$**) *« unité : 2cm »*.

8)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Tracer dans le même repère précédent et avec une autre couleur la courbe $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$.

Mini-problème

Partie A :

Soit g la fonction numérique sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3-x^2+3x+1$.

1)- Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2)- Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

3)- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$, et que : $-1<\alpha<0$.

4)- Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de *x*.

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x-\dfrac{2}{x^2+1}$.

1)- Déterminer D_f , puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2)- Étudier la continuité de f sur D_f.

3)- Montrer que : $\forall x\in D_f,\quad f'(x)=\dfrac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.

4)- Étudier les variations de f , puis dresser son tableau de variations.

5)- Vérifier que la première bissectrice du repère est l'asymptote oblique de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

6)- Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.

7)- Soit h la restriction de f sur un l'intervalle $I=[0,+\infty[$.

a)- Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Dresser le tableau de variations de h^{-1}.

Chapitre 4 : Limite d'une suite numérique

Activités, applications et exercices

Activité 1 (Rappel) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = 3u_n - 8$ pour tout entier naturel n

1)- Calculer u_1 et u_2 .

2)- Montrer par récurrence que $u_n > 4$ pour tout entier naturel n

3)- Vérifier que $u_{n+1} - u_n = 2(u_n - 4)$ pour tout entier naturel n .

4)- Déterminer la monotonie de la suite (u_n).

5)- Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 4$ pour tout entier naturel n

a)- Calculer v_0 .

b)- Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . Que peut-on déduire ?

c)- Écrire v_n en fonction de n

d)- Montrer que : $u_n = 3^{n+1} + 4$ pour tout entier naturel n

Application 1 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2}$ pour tout entier naturel n

1)- Montrer par récurrence que (u_n) est majorée par 2

2)- Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis déduire qu'elle est bornée.

3)- Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 2$ pour tout entier naturel n

a)- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$

b)- Écrire v_n puis u_n en fonction de n

Activité 2 (Rappel) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1)- Montrer par récurrence que $u_n > 3$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

2)- Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

3)- En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

4)- Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a)- Montrer que (v_n) est une suite géométrique, puis trouver le terme général de (v_n)

b)- Exprimer u_n en fonction de v_n

c)- En déduire le terme général de (u_n)

Application 2 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{3 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer par récurrence que $0 < u_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2)- Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

3)- En déduire la monotonie de la suite (u_n)

4)- Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = \dfrac{1}{1-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

b)- Écrire v_n puis u_n en fonction de n

Activité 3 :

Compléter ce qui suit :

$$\lim_{n\to+\infty} n = ... \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 = ... \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^p = ... \ , p \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = ... \quad ;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = ... \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = ... \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = ... \ , p \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = ...$$

Application 3 :

1)- En utilisant les limites précédentes, calculer ce qui suit :

$$\lim n^2 + 3n \quad ; \quad \lim 5n^3 - n^2 + 4 \quad ; \quad \lim 8n - \sqrt{n} \quad ; \quad \lim 3 - \frac{2}{n} \ ;$$

$$\lim \frac{2n+1}{n^2} \quad ; \quad \lim \frac{n-7}{3+4n} \quad ; \quad \lim \frac{4n^2+5n-9}{n^3-n+1}$$

2)- On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{3+\sin(n)}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a)- Vérifier que : $\dfrac{2}{n} \le u_n \le \dfrac{4}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, puis déduire que la suite (u_n) est convergente.

b)- Déduire la limite de la suite (v_n) définie par: $v_n = \sqrt{4-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

Activité 4 :

1)- Montrer, par récurrence, que : $2^n > n$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$

2)- En déduire les limites suivantes : $\lim 2^n$, $\lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $\lim \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$.

Conclusion

q	$q \le -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim q^n$				

Application 4 :

Déterminer la limite -si elle existe- dans chacun des cas suivants :

1)- $u_n = 3^n$ **2)-** $u_n = \left(\dfrac{3}{7}\right)^n$ **3)-** $u_n = 5 - 2\left(\dfrac{-7}{9}\right)^n$

4)- $u_n = \left(-\sqrt{2}\right)^n$ **5)-** $u_n = 3^n - 2\times 5^n$ **6)-** $u_n = 3^n + (-2)^n$

Question 1 :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{7^n+3^n}{7^n-3^n}$ pour tout entier naturel n

Question 2 : Soit (u_n) une suite numérique telle que : $0 \le u_n - 2 < \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, pour tout entier naturel n

Déterminer la limite de la suite (u_n)

Activité 5 (Suite de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \le u_n \le 2$

2)- Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. Que peut-on dire de la monotonie de (u_n) ?

3)- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4)- En utilisant une calculatrice, compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1,5										

5)- Que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (u_n) ?

6)- On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{2x}$

a)- Quelle est la relation entre la suite (u_n) et la fonction f ?

b)- Résoudre, dans $[0,+\infty[$, l'équation : $f(x)=x$. Que peut-on déduire ?

Application 5 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=2x-x^2$

1)- Dresser le tableau de variations de f

2)- Montrer que $f(x)\geq x$, pour tout x de $[0,1]$

3)- Déterminer $f([0,1])$

4)- Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=\frac{2}{3}$ et $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer, par récurrence, que $0\leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b)- Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis déduire qu'elle est convergente.

c)- Déterminer la limite de la suite (u_n)

Résumé de cours

❶ Monotonie d'une suite numérique

Soit (u_n) une suite numérique définie sur une partie I de $\mathbb{N}$

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante, si $\forall n\in I,\ u_{n+1}\le u_n$ (ou encore : $\forall n\in I,\ u_{n+1}-u_n\le 0$)
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante, si $\forall n\in I,\ u_{n+1}\ge u_n$ (ou encore : $\forall n\in I,\ u_{n+1}-u_n\ge 0$)

❷ Suite majorée – Suite minorée – Suite bornée

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée par un nombre réel M si et seulement si $(\forall n\in I);u_n\le M$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée par un nombre réel m si et seulement si $(\forall n\in I);u_n\ge m$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques

- Si (u_n) est une suite croissante, alors elle est minorée par son premier terme.
- Si (u_n) est une suite décroissante, alors elle est majorée par son premier terme.

❸ Suite arithmétique et Suite géométrique

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=q\times u_n$
Terme général	$(\forall n\ge p),u_n=u_p+(n-p)r$	$(\forall n\ge p),u_n=u_p\times q^{n-p}$
Somme des termes consécutifs	$S_n=u_p+u_{p+1}+\dots+u_n$ $=(n-p+1)\times\dfrac{u_p+u_n}{2}$	$S_n=u_p+u_{p+1}+\dots+u_n$ $=u_p\times\dfrac{1-(q)^{n-p+1}}{1-q}$

❹ Limite d'une suite

a)- Limites de référence

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^p=+\infty$, $p\in\mathbb{N}^*$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^p}=0$, $p\in\mathbb{N}^*$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$

q	$q\le-1$	$-1<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\lim q^n$	n'existe pas	0	1	$+\infty$

b)- Théorème (des suites monotones)

- **Toute suite croissante et majorée est convergente.**
- **Toute suite décroissante et minorée est convergente.**

c)- Suite de la forme $v_n=f(u_n)$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=a$ et f est continue en a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=f(a)$

d)- Suite de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$

Si f est continue sur I , $f(I)\subset I$,

$u_0\in I$, (u_n) est **convergente,**

alors la limite ℓ de la suite (u_n) est **une solution** de l'équation $f(x)=x$

Série d'exercices

Exercice 1 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{5}{4}$ pour tout entier naturel n

1)- a)- Montrer, par récurrence, que : $u_n > 5$, pour tout entier naturel n

b)- Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{4}(u_n - 5)$, pour tout entier naturel n, puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c)- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2)- Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 5$ pour tout entier naturel n

a)- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$, puis écrire v_n en fonction de n

b)- Montrer que $u_n = 5 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ pour tout entier naturel n, puis déterminer la limite de la suite (u_n)

c)- Déduire la limite de la suite (w_n) définie par : $w_n = \sqrt{u_n - 4}$, pour tout entier naturel n

3)- Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

a)- Écrire S_n puis T_n en fonction de n

b)- Calculer $\lim S_n$ et $\lim T_n$

Exercice 2 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{8u_n + 3}{u_n + 6}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- a)- Montrer, par récurrence, que : $1 < u_n < 3$, pour tout n de $\mathbb{N}$

b)- Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n)(3-u_n)}{6+u_n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$, puis montrer que la suite (u_n) est croissante.

c)- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2)- Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{9}$, puis écrire v_n en fonction de n

b)- Montrer que : $u_n = \dfrac{3 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$, puis déterminer la limite de la suite (u_n)

c)- Déduire la limite de la suite (w_n) définie par: $w_n = (u_n - 2)u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

3)- a)- Montrer que : $3 - u_{n+1} < \frac{5}{7}(3 - u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$

b)- En déduire que : $0 < 3 - u_n < \left(\frac{5}{7}\right)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}$

c)- Retrouver la limite de la suite (u_n)

Exercice 3 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $0 < u_n < 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

2)- a)- Vérifier que : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n-1)^2}{3-u_n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

b)- Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3)- Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n=\dfrac{1}{1-u_n}$

a)- Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.

b)- Écrire v_n en fonction de n , puis en déduire que : $u_n=\dfrac{n+1}{n+3}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

c)- Calculer la limite de la suite (u_n)

4)- Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n\geq\dfrac{2023}{2024}$

5)- Déterminer la limite de la suite (w_n) définie par : $w_n=(u_n-1)\sin u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

6)- Pour tout entier naturel n, on pose : $d_n=2^{v_n}$, $S_n=d_0+d_1+\cdots+d_n$ et $P_n=d_0\times d_1\times\cdots\times d_n$

a)- Montrer que (d_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

b)- Écrire S_n et P_n en fonction de n

Exercice 4 :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

Partie I :

1)- Déterminer $f'(x)$, pour tout x de $[0,+\infty[$, puis déduire que f est croissante sur $[0,+\infty[$

2)- Étudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$, puis déterminer $f([0,1])$

3)- Montrer que $f(x)\leq x$, pour tout x de $[0,+\infty[$

Partie II :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=\dfrac{1}{4}$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n{}^2+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $0\leq u_n\leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

2)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

3)- Déterminer la limite de la suite (u_n)

Plan d'étude des suites $u_{n+1}=f(u_n)$ (Les trois questions classiques)

1 Montrer que : $\boxed{1}$ $a<u_n<b$, $\boxed{2}$ $a\leq u_n\leq b$, $\boxed{3}$ $u_n>a$, $\boxed{4}$ $u_n\geq a$, $\boxed{5}$ $u_n<b$, $\boxed{6}$ $u_n\leq b$, pour tout entier naturel n

1er cas	La fonction f est (strictement) croissante sur l'intervalle tiré de la question
2ème cas	La fonction f est (strictement) décroissante sur l'intervalle tiré de la question

2 Montrer que la suite (u_n) est croissante//décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.

1er cas	La fonction f vérifie l'inégalité $f(x)\leq x$ sur l'intervalle tiré de la question précédente (Voir l'étude de la fonction f : explicitement ou implicitement=Position relative de la courbe et la première bissectrice du repère)
2ème cas	La fonction f vérifie l'inégalité $f(x)\geq x$ sur l'intervalle tiré de la question précédente (Voir l'étude de la fonction f : explicitement ou implicitement=Position relative de la courbe et la première bissectrice du repère)

3 Calculer la limite de la suite (u_n) « ***Cours*** »

Chapitre 5 : Fonctions primitives

Activités, applications et exercices

Activité 1 :

On considère les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_1(x)=\frac{5}{3}x^3+x^2-8x+1\ ,\ F_2(x)=\frac{5}{3}x^3+x^2-8x\ \text{ et }\ F_3(x)=\frac{5}{3}x^3+x^2-8x-\sqrt{5}+2$$

1)- Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions précédentes.

2)- Que peut-on remarquer ?

Application 1 :

Compléter le tableau suivant :

Fonction f	L'ensemble des primitives
$f(x)=2x-3$	
$f(x)=5x^3-x^2+7$	
$f(x)=5x^4+x+3\cos x+1$	
$f(x)=x-\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	
$f(x)=\sqrt{x}-2x$	

Exercice 1 :

1)- On considère les deux fonctions suivantes : $f(x)=4x+\dfrac{5}{x^3}-2$ et $g(x)=2x-\cos x+1$.

a)- Déterminer l'ensemble des primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b)- Déterminer la fonction primitive G de g sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $G(0)=2$.

2)- Montrer que la fonction $H:x\mapsto 2\sqrt{x^2-x+1}+5$ est une primitive de $h:x\mapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Déterminer une fonction primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x)=4-\sin x+\frac{1}{x^2}\qquad g(x)=(2x+1)\left(x^2+x+6\right)^{2023}\qquad h(x)=\frac{x^3-2x+7}{x^5}\qquad k(x)=2-\frac{5}{(x-3)^{11}}$$

Résumé de cours

Définition

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que F est une **primitive** de f sur I, si F est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$ pour tout x de I.

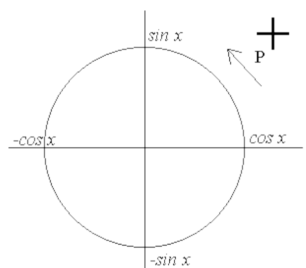
Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I.

Propriétés

Soient r un nombre rationnel différent de -1 et h une fonction numérique.

Fonction f	$f(x)=x^r$	$f(x)=h'(x)\left(h(x)\right)^r$
Une primitive F	$F(x)=\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	$F(x)=\dfrac{\left(h(x)\right)^{r+1}}{r+1}$



P : sens positif : primitive

Série d'exercices

Exercice 1 :

Déterminer une fonction primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$f(x)=3x^2+5x+2+\dfrac{1}{x^2}$	$f(x)=x+\sqrt{x}+\dfrac{2}{x^3}$	$f(x)=(x-2).\sqrt{x}$
$f(x)=(2x+1).\sqrt[3]{x^2+x+1}$	$f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$	$f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x^3+3x-1)^4}$
$f(x)=\sin(x)\cos^3(x)$	$f(x)=\dfrac{5.\cos x}{(2-\sin x)^3}$	$f(x)=3x-2\cos^2 x$

Exercice 2 :

On considère la fonction numérique f définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{x-1}$

1)- Vérifier que : $\forall x\in[1,+\infty[,\ f(x)=\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}$.

2)- Déterminer l'ensemble des primitive de f sur $[1,+\infty[$.

3)- Déterminer la fonction primitive F de f sur $[1,+\infty[$ qui vérifie $F(2) = 1$.

Exercice 3 :

On considère la fonction numérique f définie sur $]-2,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$

1)- Vérifier que : $\forall x\in]-2,+\infty[,\ f(x)=\sqrt{x+2}-\dfrac{2}{\sqrt{x+2}}$.

2)- Déterminer l'ensemble des primitive de f sur $]-2,+\infty[$.

3)- Déterminer la fonction primitive F de f sur $]-2,+\infty[$ dont la courbe représentative passe par l'origine du repère.

Exercice 4 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+|x|-2$

1)- Montrer que f admet une fonction primitive sur

2)- Déterminer la fonction primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 0$.

Chapitre 6 : Fonctions logarithmes

Activités, applications et exercices

Activité 1 :

Justifier pourquoi la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une primitive sur $]0,+\infty[$.

On appelle fonction *logarithme népérien*, notée ln, la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

Conséquences :

Compléter ce qui suit :

La fonction ln est définie sur	$\ln(1) = \ldots$	$\ln(e) = \ldots$	Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\ln'(x) = ...$
La fonction ln est .... sur $]0,+\infty[$		La fonction ln est .... sur $]0,+\infty[$	
$\forall X \in]0,+\infty[,\ \ln(X) = 0 \Leftrightarrow$	$\forall X \in]0,+\infty[,\ \ln(X) > 0 \Leftrightarrow$	$\forall X \in]0,+\infty[,\ \ln(X) < 0 \Leftrightarrow$	

Tableau de signe de la fonction ln :

x	
$\ln(x)$	

Conclusion :

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est **définie**, **continue**, **dérivable** et **strictement croissante** sur $]0,+\infty[$

De plus, on a : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$

Application 1 :

1)- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$(E_1) :\ \ln(2x-1) = \ln(3)$ $\qquad (E_2) :\ \ln(x+2) = 0$ $\qquad (E_3) :\ \ln(x)\left(1+\ln(x)\right) = 0$

2)- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes : $(I_1) :\ \ln(x-1) \leq \ln(5)$ $\qquad (I_2) :\ \ln(x) - 1 > 0$

3)- Dresser le tableau de signe de chacune des deux expressions suivantes : $\ln(x+2)$ et $\ln(x)\left(1+\ln(x)\right)$

4)- Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x + x\ln(x) + 1$

Exercice 1 :

1)- On considère les deux fonctions suivantes : $f(x) = (4x+1)\ln(x-3)$ et $g(x) = \frac{x^2-3x+2}{\ln x}$.

a)- Déterminer D_f et D_g

b)- Calculer $g(e)$, puis vérifier que : $g(2) = 0$

c)- Résoudre, dans D_f, l'équation : $f(x) = 0$

2)- Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x-2)\ln x$ est une primitive de $h : x \mapsto 1 - \frac{2}{x} + \ln x$ sur $]0,+\infty[$.

Activité 2 :

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1)- a)- L'égalité $\ln(ab) = \ln(a) \times \ln(b)$ est-elle toujours vraie ? Justifier votre réponse.

b)- Donner une relation entre $\ln(ab)$, $\ln(a)$ et $\ln(b)$

c)- Simplifier la somme $\ln 2 + \ln 3$

2)- Exprimer en fonction de $\ln a$ chacune des expressions suivantes : $\ln\left(a^2\right)$, $\ln\left(a^3\right)$ et $\ln\left(a^7\right)$

3)- a)- Simplifier la somme $\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln a$

b)- En déduire l'expression de $\ln\left(\frac{1}{a}\right)$ en fonction de $\ln(a)$

4)- Exprimer $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ en fonction de $\ln(a)$ et $\ln(b)$

5)- Montrer que : $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln a$

Application 2 :

1)- Exprimer en fonction de ln 2 chacun des nombres suivants :

$a=\ln 16-5\ln 2$ $\qquad b=\ln\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}$

$c=\ln 10+\ln\frac{1}{5}+\ln\sqrt{32}$ $\qquad d=\ln^2(8)-\ln\sqrt[3]{2}$

2)- Montrer que : $\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)=0$

Exercice 2 :

1)- Simplifier l'expression suivante :

$$E=\frac{5}{2}\ln\left(e^3\right)-\ln\left(\sqrt{e}\right)+\ln(4e)$$

2)- Comparer ln 8 et ln 6 + ln 2

3)- Écrire sous la forme d'un seul logarithme les nombres suivants :

$a=2\ln 3+\ln 5$ $\qquad b=\ln 5-2\ln\sqrt{2}$

$c=1-\ln 7+\ln 2$ $\qquad d=\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)+\ln(2e)$

4)- Montrer ce qui suit :

- $\forall x\in\mathbb{R},\ \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$
- $\forall x\in]0,+\infty[,\ \ln^2(x+1)-\ln^2(x)=\ln\left(x^2+x\right)\times\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
- $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \ln\left(x^2+1\right)=2\ln|x|+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

Exercice 3 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=e$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$ pour tout entier naturel n, et soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n=\ln(u_n)$, pour tout entier naturel n

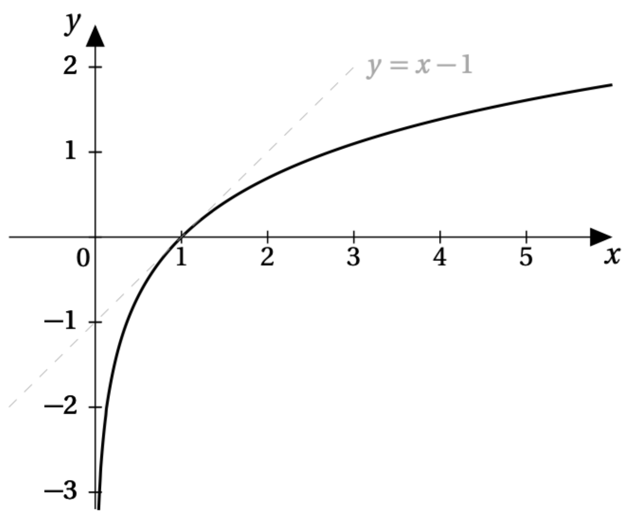
1)- Montrer, par récurrence, que : $u_n>0$, pour tout entier naturel n

2)- Montrer que (v_n) est une suite géométrique, puis écrire v_n en fonction de n

3)- En déduire l'expression de u_n en fonction de n

Activité 3 :

I)- Avec le logiciel GeoGebra, on trace facilement la courbe représentative de la fonction ln et on obtient :



Déterminer graphiquement les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}$

II)- Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction $f : x\mapsto \ln(x)-\sqrt{x}$ sur $]0,+\infty[$

x	0		4		$+\infty$
$f(x)$	‖	↗	$f(4)$	↘	

1)- Vérifier que : $f(4)=2\left(\ln(2)-1\right)$, puis donner une valeur approchée de $f(4)$ à 0,1 près.

2)- a)- À partir du tableau précédent, déterminer le signe de la fonction f sur $]0,+\infty[$

b)- En déduire que : $\forall x\in\,]0,+\infty[,\ \ln(x)<\sqrt{x}$

3)- Montrer que : $\forall x\in[1,+\infty[,\ 0\le\frac{\ln(x)}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$, puis déduire la valeur de la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$

4)- Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x)$

Application 3 :

Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3x+7)\ln(x)$ **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-3x+7\ln(x)$ **(3)** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-5\ln(x)+3$ **(4)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8\ln(x)+3}{1-2\ln(x)}$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x)}$ **(6)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}$ **(7)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x-4\ln(x)+1}{x^3}$ **(8)** $\lim\limits_{x\to0^+}(3x^2-2x)\ln(x)$

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln(x)-x}{\ln(x)}$ **(10)** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{5}{x}+\ln(x)$ **(11)** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{x}$ **(12)** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x\ln(x)}$

(13) $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(\sqrt{x})$ **(14)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x^2-1}$ **(15)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$ **(16)** $\lim\limits_{x\to0^+}x^8\ln^6(x)$

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^4(x)}{x^5}$ **(18)** $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln(x)$ **(19)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ **(20)** $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln^2(x)$

Exercice 4 :

On considère la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} f(x)=x\left(2-\ln(x)\right),\ x\neq0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1)- Montrer que f est continue à droite en zéro.

2)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, puis déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en zéro, puis interpréter graphiquement le résultat.

4)- Déterminer $f'(x)$, pour tout x de $]0,+\infty[$

Exercice 5 :

Calculer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

(1) $f(x)=x+2\ln(x)$ **(2)** $f(x)=(5x-7)\ln(x)$ **(3)** $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

(4) $f(x)=3x^2-4\ln(2-x)+5$ **(5)** $f(x)=x\ln\left|x^2-1\right|$ **(6)** $f(x)=\frac{\ln|x|}{x^2+1}$

Exercice 6 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{-1}{x}+\ln(x)$

1)- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Calculer la dérivée de f, puis déduire qu'elle est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$

Exercice 7 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $f(x)=x^2-x-\ln(x)$

1)- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

2)- a)- Vérifier que : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,\ f(x)=x\left(x-1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

b)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

3)- Déduire les deux branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.

4)- Calculer la dérivée de f, puis dresser son tableau de variations

Exercice 8 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2$

1)- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Montrer que : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$, avec $g(x)=x-3+\ln(x)$

Exercice 9 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$

1)- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Déterminer les deux branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.

3)- Montrer que : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$, avec $g(x)=x^2-1+\ln x$

4)- Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la première bissectrice du repère

Exercice 10 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $f(x)=x+\ln(x)$

1)- Calculer $f(1)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Déterminer les deux branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.

3)- Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, puis déduire le sens de variation de la fonction f.

4)- Montrer que l'équation $f(x)=-1$ admet une unique solution sur $\left]0,+\infty\right[$

Activité 4 :

Trouver le nombre x dans les deux cas suivants : **(1)** $3^x=2$ **(2)** $10^x=7$

Application 4 :

1)- Simplifier l'expression suivante : $A=2\log_3(81)-5\log_2(4)-\log_5\left(\dfrac{1}{25}\right)$

2)- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante : (E) : $\log(2x+1)+\log x=1$

Exercice 11 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

1)- Déterminer D_f, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2)- Montrer que la fonction f est impaire.

3)- a) -Montrer que : $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2-1}$

b)- Dresser le tableau de variations de f

4)- Donner l'équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse nulle.

5)- Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.

Exercice 12 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\ln^2(x) - \ln(x), \ x \geq 1 \\ f(x) = (x-1)\ln(1-x), \quad x < 1 \end{cases}$

1)- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{x} = 0$ (on peut poser : $t = \sqrt{x}$), puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

3)- Déterminer les branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.

4)- Montrer que f est continue en 1.

5)- Étudier la dérivabilité de f en 1, puis interpréter graphiquement le résultat.

6)- a) -Montrer que : $\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{x}$

b) -Montrer que : $\forall x \in]-\infty,1[$, $f'(x) = 1 + \ln(1-x)$

c)- Dresser le tableau de variations de f

Résumé de cours

1)- Domaine de définition

$f(x)=\ln\left(u(x)\right)$	$D_f=\left\{x\in\mathbb{R},\ u(x)>0\right\}$
$f(x)=\ln\left\|u(x)\right\|$	$D_f=\left\{x\in\mathbb{R},\ u(x)\neq 0\right\}$

2)- Valeurs particulières

$\ln 1=0$ $\qquad$ $\ln e=1$

Pour tout nombre rationnel r, $\ln\left(e^r\right)=r$

3)- Propriétés algébriques

Soient a et b deux réels strictement positifs et r un nombre rationnel.

$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ $\qquad$ $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$

$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

$\ln\left(a^r\right)=r\ln(a)$ $\Big($Cas particulier : $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\ln(a)\Big)$

$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad \ln\left(x^2\right)=2\ln|x|$

4)- Signe de ln

$\forall x\in\,]0,+\infty[,\ \ln(x)=0\Leftrightarrow x=1$

$\forall x\in\,]0,+\infty[,\ \ln(x)>0\Leftrightarrow x>1$

$\forall x\in\,]0,+\infty[,\ \ln(x)<0\Leftrightarrow x<1$

5)- Continuité

- La fonction ln est continue sur $]0,+\infty[$
- La fonction $x\mapsto\ln\left(u(x)\right)$ est continue sur un intervalle I si la fonction u est continue est strictement positive sur I

6)- Équations et inéquations

Soient x et y deux réels strictement positifs et r un nombre rationnel.

$\ln(x)=\ln(y)\Leftrightarrow x=y$	$\ln(x)=r\Leftrightarrow x=e^r$	$a\ln^2(x)+b\ln(x)+c=0$ « On pose : $X=\ln(x)$ »
$\ln(x)<\ln(y)\Leftrightarrow x<y$	$\ln(x)>\ln(y)\Leftrightarrow x>y$	$a\ln^2(x)+b\ln(x)+c<0$; $a\ln^2(x)+b\ln(x)+c\leq 0$; $a\ln^2(x)+b\ln(x)+c>0$; $a\ln^2(x)+b\ln(x)+c\geq 0$; « On pose : $X=\ln(x)$ + Dresser le tableau de signe »
$\ln(x)<r\Leftrightarrow x<e^r$	$\ln(x)>r\Leftrightarrow x>e^r$	

N'oublier pas de déterminer l'ensemble d'étude !

7)- Limites de référence

Soit n un entier naturel non nul.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(x)=0^{(-)}$ $\lim\limits_{x\to 0^+}x^n\ln(x)=0^{(-)}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0^{(+)}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^n}=0^{(+)}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

8)- Dérivées

$\forall x\in\,]0,+\infty[,\ \ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$

$\left(\ln(u)\right)'=\dfrac{u'}{u}$ $\qquad$ $\left(\ln|u|\right)'=\dfrac{u'}{u}$

9)- Logarithme de base *a*

Soit a un réel strictement positif différent de 1.

$$\forall x\in\,]0,+\infty[,\ \log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Cas particulier : Logarithme décimal

Lorsque $a=10$, on écrit $\log$ au lieu de $\log_{10}$

10)- Valeur minimale d'un entier naturel *n* dans des cas particuliers

Cas 1 : $q^n\leq a$, avec q et a appartiennent à $]0,1[$	**Cas 2 :** $q^n\geq a$, avec q et a appartiennent à $]1,+\infty[$
$q^n\leq a \Leftrightarrow \ln(q^n)\leq\ln(a)$ $\Leftrightarrow n\ln(q)\leq\ln(a)$ $\Leftrightarrow n\geq\dfrac{\ln(a)}{\ln(q)}$ car $\ln(q)<0$ Par exemple, si $q=0,8$ et $a=0,01$, alors : $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}=20,64....$ Donc la valeur minimale de l'entier n cherchée est 21.	$q^n\geq a \Leftrightarrow \ln(q^n)\geq\ln(a)$ $\Leftrightarrow n\ln(q)\geq\ln(a)$ $\Leftrightarrow n\geq\dfrac{\ln(a)}{\ln(q)}$ car $\ln(q)>0$ Par exemple, si $q=2$ et $a=3000$, alors : $\dfrac{\ln(3000)}{\ln(2)}=11,55....$ Donc la valeur minimale de l'entier n cherchée est 12.

Série d'exercices

Exercice 01 :

1)- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$(E_1):\quad \ln(x-1)=\ln(3-x)$ $\qquad (E_2):\quad \ln(x^2+2x+2)=\ln(4)$ $\qquad (E_3):\quad \ln^2(x)+\ln(x)-2=0$

2)- Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, les systèmes suivants :

$(S_1):\ \begin{cases}\ln(x)-8\ln(y)=-1\\ 2\ln(x)-5\ln(y)=9\end{cases}$ $\qquad (S_2):\ \begin{cases}\ln(x)-3\ln(y)=5\\ xy=e\end{cases}$

Exercice 02 :

1)- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$(I_1):\quad \ln(2x-1)\le 1$ $\qquad (I_2):\quad \ln(x^2-x+1)>0$ $\qquad (I_3):\quad \ln^2(x)+\ln(x)-2\le 0$

2)- Déterminer la petite valeur de l'entier naturel n dans chacun des cas suivants :

$(a)\quad 3\times 2^n-5\ge 6$ $\qquad (b)\quad \left(\dfrac{2}{5}\right)^n<0,001$ $\qquad (c)\quad 2024-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n>2023,99$

3)- Montrer que : $\log_2 7.\log_3 7+\log_3 7.\log_5 7+\log_5 7.\log_2 7=\dfrac{\log_2 7.\log_3 7.\log_5 7}{\log_{30} 7}$

4)- Soient a un réel supérieur strictement à 1 et n un entier non nul.

Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[,\ \log_{a^n}(x)=\dfrac{1}{n}\log_a(x)$

Exercice 03 :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+\ln^2(x)}{x}$

1)- Calculer $f(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Vérifier que : $\forall x\in]0,+\infty[,\ \dfrac{\ln^2(x)}{x}=4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$, puis calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

3)- Déterminer les deux branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.

4)- Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=-\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)^2$.

5)- Dresser le tableau de variation de f

6)- Montrer que la fonction $F:x\mapsto\dfrac{1}{3}\left(\ln^2(x)+3\right)\ln x$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 04 :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x}\right)$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $2cm$).

1)- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis déduire une branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$

2)- Déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3)- Étudier les variations de de f sur $]0,+\infty[$, puis dresser son tableau de variations.

4)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

5)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

6)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice 05 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $f(x)=x\ln(x+1)$

Partie I :

1)- Déterminer $f'(x)$, pour tout x de $\left[0,+\infty\right[$, puis déduire que f est croissante sur $\left[0,+\infty\right[$

2)- Étudier la continuité de f sur $\left[0,+\infty\right[$, puis déterminer $f\left(\left[0,e-1\right]\right)$

3)- Montrer que : $f(x)\leq x$, pour tout x de $\left[0,e-1\right]$

Partie II :

Soit $\left(u_n\right)$ la suite numérique définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n\ln(u_n+1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $0\leq u_n\leq e-1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

2)- Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3)- Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)$

Exercice 06 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $f(x)=x-\ln(x)$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $1cm$).

1)- Calculer $f(1)$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2)- Déterminer les deux branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.

3)- Étudier la continuité de f sur $\left]0,+\infty\right[$.

4)- Montrer que : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,\ f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

5)- Dresser le tableau de variation de f, puis en déduire le signe de la fonction f.

6)- Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.

7)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

8)- Montrer que la fonction $F:x\mapsto\dfrac{1}{2}x^2+x\left(1-\ln(x)\right)-3$ est une primitive de f sur $\left]0,+\infty\right[$.

9)- Soit $\left(u_n\right)$ la suite numérique définie par : $u_0=\sqrt{3}$ et $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer, par récurrence, que $1\leq u_n\leq2$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b)- Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c)- Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)$

Exercice 07 :

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $g(x)=x^3-1+2\ln(x)$

1)- Calculer $g(1)$

2)- Déterminer $g'(x)$, pour tout x de $\left]0,+\infty\right[$, puis déduire le sens de variation de g sur $\left]0,+\infty\right[$

3)- En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $f(x)=x-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $3cm$).

1)- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, puis déduire une branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$

2)- Montrer que la première bissectrice du repère est une asymptote oblique de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3)- Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.

4)- a)- Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[,\quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

b)- Dresser le tableau de variations de f .

5)- a)- Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[,\quad f''(x) = \dfrac{5-6\ln(x)}{x^4}$

b)- En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ admet un point d'inflexion A dont on déterminera ses coordonnées.

6)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Exercice 08 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = x^2 - \ln(2x-1) - 1$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : $2cm$).

1)- Déterminer D_f , puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .

2)- Déterminer les branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$

3)- a) -Montrer que : $\forall x \in D_f,\quad f'(x) = \dfrac{2(x-1)(2x+1)}{2x-1}$.

b)- Dresser le tableau de variations de f .

c)- En déduire que : $\forall x \in \left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[,\ \ln(2x-1) \le x^2 - 1$

4)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

5)- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Construire $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

6)- On considère la fonction numérique h définie par : $h(x) = x^2 - \ln(2|x|-1) - 1$.

a)- Montrer que la fonction h est paire.

b)- Construire $(\mathscr{C}_h)$ la courbe représentative de h dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Exercice 09 :

On considère la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1},\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : $2cm$).

1)- a)- Déterminer D_f , puis calculer $f(1)$ et les limites de f aux bornes de D_f .

b)- En déduire les branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.

2)- Montrer que f est continue à droite en zéro.

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en zéro, puis interpréter le résultat graphiquement.

4)- a) -Montrer que : $\forall x \in D_f \setminus \{0\},\quad f'(x) = -\dfrac{2}{x(\ln(x)-1)^2}$.

b)- Dresser le tableau de variations de f .

5)- Déterminer l'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses.

6)- a)- Montrer que : $\forall x \in D_f \setminus \{0\}, \quad f''(x) = \dfrac{2\left(\ln(x)+1\right)}{x^2\left(\ln(x)-1\right)^3}$

b)- En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ admet un point d'inflexion A dont on déterminera ses coordonnées.

7)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

8)- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$.

9)- On considère la fonction numérique g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\ln(|x|)+1}{\ln(|x|)-1}, \ x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

a)- Montrer que la fonction g est paire.

b)- Construire $(\mathscr{C}_g)$ la courbe représentative de g dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Exercice 11 :

Partie I :

On considère la fonction numérique h définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $h(x) = x\ln(x) + x + 1$

1)- Déterminer $h'(x)$, pour tout x de $\left]0,+\infty\right[$

2)- Dresser le tableau de variations de h sur $\left]0,+\infty\right[$

3)- En déduire le signe de h sur $\left]0,+\infty\right[$

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $f(x) = (x+1)\ln(x)$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : 1cm).

1)- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, puis déduire une branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$

2)- Déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un seul point A que l'on déterminera.

4)- a)- Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$

b)- En déduire le sens de variation de f.

5)- a)- Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f''(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$

b)- En déduire que A est le seul point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$.

6)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

7)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 0, puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

8)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Exercice 12 :

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + 3\ln(x)$

1)- Calculer $g(1)$

2)- Déterminer $g'(x)$, pour tout x de $\left]0,+\infty\right[$, puis déduire le sens de variation de g sur $\left]0,+\infty\right[$

3)- En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2-3\ln(x)}{x}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $1cm$).

1)- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, puis déduire une branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$

2)- Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-2$ est une asymptote oblique de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3)- Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (D).

4)- a)- Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b)- Dresser le tableau de variations de f .

5)- a)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0,1]$

b)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β sur $[1,+\infty[$

6)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (on donne : $\alpha\approx 0,4$ et $\beta\approx 3,6$).

Partie III :

1)- Vérifier que la fonction $H: x\mapsto \dfrac{1}{2}\ln^2(x)$ est une primitive de $h: x\mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $]0,+\infty[$.

2)- Déterminer une fonction primitive F de la fonction f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 13 :

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur $]1,+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{x}{x-1}+\ln(x-1)$

1)- Déterminer $g'(x)$, pour tout x de $]1,+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $]1,+\infty[$

2)- En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=x\ln(x-1)$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $1cm$).

1)- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, puis déduire une branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$

2)- Déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3)- Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.

4)- a)- Montrer que : $\forall x\in]1,+\infty[,\ f'(x)=g(x)$.

b)- Dresser le tableau de variations de f .

5)- Montrer que le point $I(2\ ;\ 0)$ est un point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$

6)- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point I

7)- Construire la droite (T) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

8)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 0, puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

9)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice 14 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=x-1+\ln\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 1cm).

1)- a)- Déterminer D_f, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

b)- En déduire deux branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.

2)- Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$

3)- Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (D).

4)- a) -Montrer que : $\forall x\in D_f,\ f'(x)=\dfrac{(x-1)^2+1}{x(x-2)}$

b)- Dresser le tableau de variations de f.

5)- a)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]-\infty,0[$

b)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β sur $]2,+\infty[$

6)- Construire la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (on donne : $\alpha\approx-0,5$ et $\beta\approx 2,5$)

Exercices de soutien

Exercice 01 (Domaine de définition) :

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = 2x - \ln(x+1)$ $\quad g(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x-5}$ $\quad h(x) = \dfrac{x}{\ln(x)-1}$ $\quad k(x) = \sqrt{\ln(x)}$

Exercice 02 (Équations, inéquations et systèmes) :

1)- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

(E_1) : $\ln(x-2) = \ln(7)$ $\quad (E_2)$: $\ln(3x+1) = 0$ $\quad (E_3)$: $\ln(x) - 1 = 0$

2)- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

(I_1) : $\ln(x+6) > 2$ $\quad (I_2)$: $\ln(7x-9) \leq 0$ $\quad (I_3)$: $\ln(x) + 1 < 0$

3)- Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant : (S) : $\begin{cases} \ln(x) - 8\ln(y) = -1 \\ 2\ln(x) - 5\ln(y) = 9 \end{cases}$

Exercice 03 (Propriétés algébriques) :

1)- Écrire sous la forme d'un seul logarithme les nombres suivants :

$a = 2\ln 3 + \ln 5$ $\quad b = \ln 14 - 2\ln\sqrt{2}$ $\quad c = 1 - \ln 7$

2)- Soit x un réel strictement positif.

a)- Exprimer en fonction de $\ln x$ les deux expressions suivantes :

$E = \ln\left(x^2\right) - \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + \ln x$ $\quad F = \ln(ex) + \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) - \ln\left(\dfrac{e}{x}\right)$

b)- Montrer les deux égalités suivantes :

$\ln^2(ex) - \ln^2(x) = 1 + 2\ln x$ $\quad \ln\left(x^2 + x + 1\right) = 2\ln x + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$

Exercice 04 (Limites) :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 2x + 7)\ln(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x^2 + \dfrac{\ln(x)}{x^3}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 2x\ln(x) + 1$

$\lim\limits_{x\to0^+} 5x^3 - \ln(x) + 6$ $\quad \lim\limits_{x\to0^+} (x-2)\ln(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

Exercice 05 (Dérivées) :

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = 5x^2 - 3\ln(x) + 8$ $\quad g(x) = x\ln(x) - 9x + 2$ $\quad h(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x}$ $\quad k(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

Mini-exercice de synthèse :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1+\ln^2(x)}{x}$

1)- Calculer $f(1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ (pour la dernière limite, remarquer que : $\dfrac{\ln^2(x)}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

2)- Déterminer les deux branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.

3)- Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = -\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)^2$, puis dresser le tableau de variation de f

4)- Montrer que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{3}\left(\ln^2(x) + 3\right)\ln x$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

Chapitre 7 : Nombres complexes

Activités, applications et exercices

Activité 1 :

On considère l'équation suivante : (E): $z^2-6z+13=0$

1)- L'équation (E) admet-elle des solutions réelles ? Justifier.

2)- Donner la forme canonique du trinôme $z^2-6z+13$

3)- On suppose qu'il existe un nombre non réel i tel que : $i^2=-1$

a)- Pourquoi le nombre i n'est pas réel ?

b)- Écrire l'équation (E) sous la forme $(z-\alpha)^2=\beta^2$

c)- En déduire les solutions de l'équation (E) en fonction du nombre i

Application 1 :

Trouver la forme algébrique de chacun des nombres suivants :

$z_1=3+5i-7+i$ $\quad z_2=8i-2(1-9i)$ $\quad z_3=5i(3+2i)$

$z_4=\dfrac{(7+3i)(2-i)}{5}$ $\quad z_5=(5+4i)^2$ $\quad z_6=3+8i+(1-i)^2$

Exercice 1 :

On considère les deux nombre complexes : $a=1+i$ et $b=5-i\sqrt{2}$.

1)- Donner la forme algébrique de $\overline{a}$ et $\overline{b}$

2)- Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres suivants : $a+b$, ab, ib^2

3)- Montrer que a^2 est un imaginaire pur

Exercice 2 :

On pose : $a=3+5i$, $b=\overline{a}$ et $c=7+3i$.

Montrer que : $b-c=2i(a-c)$

Activité 2 :

On considère les deux nombre complexes suivants : $a=3+4i$ et $b=2-5i$.

1)- Calculer les produits $a\overline{a}$ et $b\overline{b}$. Que peut-on remarquer ?

2)- Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{a}{b}$

Application 2 :

1)- Trouver la forme algébrique de chacun des nombres suivants :

$a=\dfrac{1}{7+9i}$ $\quad b=\dfrac{8i}{\sqrt{3}+i}$ $\quad c=\dfrac{3+2i}{1-i}$ $\quad d=\dfrac{5+4i}{-2-i}$

2)- Calculer le module de chacun des nombres suivants :

$z_1=5+2i$ $\quad z_2=\sqrt{3}+i$ $\quad z_3=\sqrt{2}$

$z_4=-2-i$ $\quad z_5=-4i$ $\quad z_6=-3+i(1-i)$

Exercice 3 :

1)- On pose : $a=-2+2i$, $b=-5+i$, $c=-3$ et $d=-8$

Montrer que : $\dfrac{b-c}{a-c}=i$ et $\dfrac{a-d}{b-d}\in\mathbb{R}$

2)- Soit z un nombre complexe non nul tel que : $|z|=1$

Montrer que : $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$

Exercice 4 :

On pose : $a=2i$, $b=\sqrt{3}-i$ et $c=2\overline{b}$

1)- Calculer $|a|$ et $|b|$, puis déduire $|ab|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right|$, $|a^3|$, $|\overline{b}|$ et $|c|$

2)- Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres suivants : $a+b$, ab, ib^2

3)- Montrer que : $\dfrac{a-b}{c-b}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puis calculer $\left|\dfrac{a-b}{c-b}\right|$

Activité 3 :

D'après l'activité 1, l'équation $(E):\ z^2-6z+13=0$ admet deux solutions complexes conjugués $z_1=3+2i$ et $z_2=3-2i$

1)- Calculer Δ le discriminent de l'équation (E)

2)- Exprimer les solutions de (E) en fonction du discriminent Δ et les coefficients de (E)

Application 3 :

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$(E_1):\ z^2+2z+2=0$ $\quad$ $(E_2):\ z^2=z-1$ $\quad$ $(E_3):\ 3z^2+2z+5=0$

$(E_4):\ -z^2+z\sqrt{5}-2=0$ $\quad$ $(E_5):\ z^2+4=0$ $\quad$ $(E_6):\ \dfrac{1}{2}z^2+z+6=0$

Activité 4 :

Soit z un nombre complexe.

1)- Montrer que : $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$

2)- Donner une condition sur z et $\overline{z}$ pour que z soit un nombre réel.

3)- Donner une condition sur z et $\overline{z}$ pour que z soit un nombre imaginaire pur.

Application 4 :

On pose : $a=(1+i)^5+(1-i)^5$ et $b=\left(3+i\sqrt{7}\right)^{12}-\left(3-i\sqrt{7}\right)^{12}+2i$

1)- Montrer que a est un nombre réel.

2)- Montrer que b est un nombre imaginaire pur.

Activité 5 :

On pose : $a=\sqrt{3}+i$

1)- Calculer le module de a

2)- On suppose qu'on peut écrire a sous la forme $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, avec r un réel positif et α un réel

a)- Exprimer le module de a en fonction de r, puis déduire la valeur de r

b)- Trouver une valeur de α

Application 5 :

On pose : $a=1+i$, $b=1-i$, $c=-1+i$ et $d=-1-i$

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes ci-dessous.

Exercice 5 :

1)- Écrire sous forme trigonométrique les nombres suivants :

$a=1+i\sqrt{3}$ $\quad$ $b=3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)-i\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)$ $\quad$ $c=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $d=\sqrt{3}$ $\quad$ $e=5i$

2)- Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres précédents.

Exercice 6 :

On pose : $a=2\left(1+i\sqrt{3}\right)$ et $b=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

1)- Écrire a et b sous forme trigonométrique.

2)- En déduire ab, $7b$, $-2ib$, a^3, b^{10} et $\dfrac{a}{b}$ sous forme trigonométrique.

3)- Déterminer la forme algébrique du produit ab

4)- En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 7 :

1)- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-z\sqrt{2}+2=0$

2)- On pose : $u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

a)- Écrire u sous forme trigonométrique.

b)- Montrer que u^{642} est un nombre réel.

Exercice 8 :

On pose : $Z=(1-i)(1+i\sqrt{3})$

1)- Déterminer l'écriture exponentielle de Z

2)- En déduire que Z^6 est un nombre imaginaire pur.

Exercice 9 :

1)- Montrer que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ e^{ix}+e^{iy}=2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\frac{x+y}{2}}$

2)- En déduire une écriture exponentielle du nombre $Z=\frac{1+\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

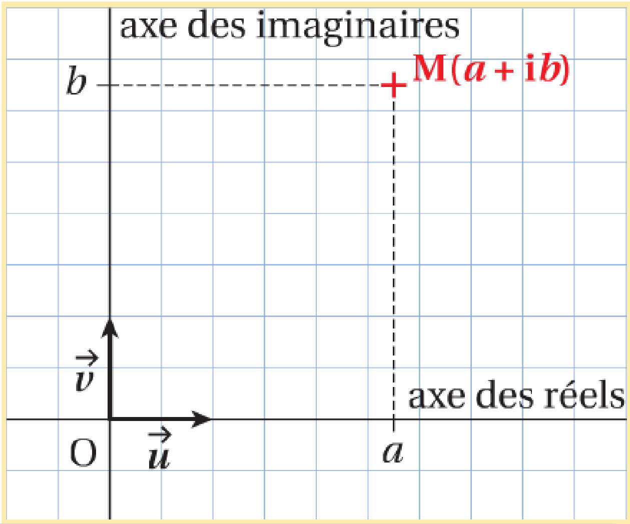
Activité 6 :

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a+ib$.

Le point M de coordonnées (a,b) est appelé ***image*** de z

Le nombre complexe z est appelé l'***affixe*** du point M, et on écrit : aff(M) = z



Soient A et B deux points d'affixes respectives $z_A=2+3i$ et $z_B=4-i$

1)- Placer les points A et B

2)- Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

3)- Calculer la distance AB

4)- Déterminer l'affixe du point I le milieu du segment $[AB]$

Dans toute la suite, le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Application 6 :

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=-1+2i$, $b=-i$ et $c=3+4i$

1)- Placer les points A, B et C

2)- Déterminer l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3)- Calculer les distances AB, BC et OC

4)- Déterminer l'affixe du point P le milieu du segment $[AC]$

Exercice 10 :

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=1+2i$, $b=2+6i$, $c=6+8i$ et $d=5+4i$

Montrer que $ABCD$ est un parralélogramme, puis déterminer l'affixe de son centre.

Activité 7 :

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=\sqrt{3}+2i$ et $b=5-i$

1)- On considère (E_1) l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z-\sqrt{3}-2i|=2$

a)- Montrer que : $M\in(E_1)\Leftrightarrow AM=2$

b)- En déduire la nature de l'ensemble (E_1) ainsi que ses éléments caractéristiques.

2)- Déterminer (E_2) l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z-\sqrt{3}-2i|=|z-5+i|$

Application 7 :

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=4i$, $b=1+i$ et $c=-2+5i$

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

1)- $|z-4i|=\sqrt{5}$

2)- $|z-1-i|=|c|$

3)- $|z+2-5i|=|z-4i|$

4)- $|z|=|z-1-i|$

Exercice 11 :

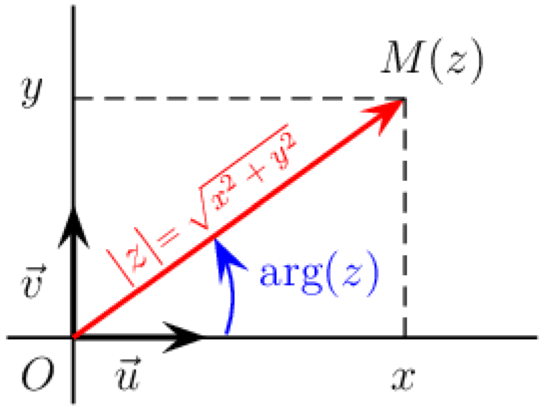
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=3+2i$, $b=1+i$ et $c=-i$

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

1)- $|iz+2-3i|=1$ **2)-** $|\bar{z}-1+i|=|z+i|$

Activité 8 :

Si M est un point d'affixe non nul z, alors : $\overline{\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)} \equiv \arg(z)\ [2\pi]$



Soient A et B deux points d'affixes respectives $a=3+5i$ et $b=6+8i$

1)- Déterminer une forme trigonométrique de $b-a$

2)- En déduire une mesure de l'angle $\overline{\left(\vec{u},\ \overrightarrow{AB}\right)}$

Application 8 :

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=1$, $b=1+2i$ et $c=1+\sqrt{3}+i$

Vérifier que : $\dfrac{c-a}{b-a}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$, puis en déduire une mesure de l'angle orienté $\overline{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}$

Exercice 12 :

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=3+5i$, $b=\bar{a}$ et $c=7+3i$.

1)- Montrer que : $b-c=2i(a-c)$

2)- En déduire que le triangle ABC est rectangle et que BC = 2 AC

Exercice 13 :

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=-2+2i$, $b=-5+i$, $c=-3$ et $d=-8$

1)- a)- Montrer que : $\dfrac{b-c}{a-c}=i$

b)- En déduire que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C

2)- Montrer que les points A, B et D sont alignés

Activité 9 :

Montrer les écritures complexes des transformations usuelles.

Application 9.1 (Translation) :

On considère le point A d'affixe $a=3+5i$

Soit $M'(z')$ l'image d'un point $M(z)$ par la translation T de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $d=4-2i$.

1)- Donner l'écriture complexe de T

2)- Vérifier que l'affixe du point B image de A par T est $b=7+3i$

Application 9.2 (Homothétie) :

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=3+4i$ et $b=3-4i$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par l'homothétie h de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.

1)- Donner l'écriture complexe de h

2)- Vérifier que $p=3+8i$ est l'affixe du point P image de A par h

Application 9.3 (Rotation) :

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=4(1+i)$, $b=3+5i$ et $c=3+4i$.

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation r de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1)- Montrer que : $z' = iz + 7 + i$

2)- a)- Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation r

b)- En déduire la nature du triangle ABC

Exercice 14 :

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $b = 8$

Soit $M'(z')$ l'image d'un point $M(z)$ par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1)- Exprimer z' en fonction de z

2)- a)- Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R

b)- En déduire la nature du triangle OAB

Exercice 15 :

On considère les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives $a = 2 + i$, $b = \overline{a}$, $c = i$, $d = \overline{c}$ et $\omega = 1$

1)- Montrer que : $\frac{a-\omega}{b-\omega} = i$, puis déduire la nature du ΩAB

2)- Soit $M'(z')$ l'image d'un point $M(z)$ par la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a)- Montrer que : $z' = iz + 1 - i$

b)- Vérifier que : $R(A) = C$ et $R(D) = B$

c)- En déduire que les points A, B , C et D appartiennent au même cercle dont on précisera le centre.

Activité 10 :

Soit x un nombre réel.

1)- En utilisant la formule de Moivre, exprimer

a)- $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$,

b)- $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

2)- a)- Montrer que : $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ (Formules d'Euler)

b)- Exprimer $\cos^3(x)$ en fonction de $\cos(3x)$ et $\cos(x)$.

c)- Exprimer $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(3x)$ et $\sin(x)$.

Application 10 :

Soit x un nombre réel.

Linéariser $\cos^4(x)$, puis déduire une primitive de la fonction $f : x \mapsto \cos^4 x$ sur $\mathbb{R}$

Résumé de cours

Ensemble des nombres complexes

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$, c'est-à-dire : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$,
- Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, vérifiant : $i^2 = -1$,
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Forme algébrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe z s'écrit d'une façon unique sous la forme $x+iy$, avec x et y sont deux réels.

- Le réel x est appelé la ***partie réelle*** de z, et noté $\mathrm{Re}(z) = x$
- Le réel y est appelé la ***partie imaginaire*** de z, et noté $\mathrm{Im}(z) = y$

Si $\mathrm{Im}(z) = 0$, alors $z = x$ est réel.

Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, alors $z = iy$ et, dans ce cas, on dit que z est ***imaginaire pur***.

L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Conjugué d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x+iy$.

On appelle ***conjugué*** de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = x - iy$.

Module d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe.

On appelle ***module*** de z le réel positif noté $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

Si $x+iy$ est la forme algébrique de z, alors : $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous une ***forme trigonométrique :*** $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, avec r un réel positif et α un réel.

- Le réel positif r est le module de z
- Le réel α est appelé un ***argument*** de z, et noté arg(z). On écrit : $\arg(z) \equiv \alpha[2\pi]$

Autres écritures : **Écriture exponentielle :** $z = re^{i\alpha}$ **Écriture polaire :** $z = [r, \alpha]$

Remarque importante :

$\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$

$-\cos\alpha + i\sin\alpha = \cos(\pi-\alpha) + i\sin(\pi-\alpha)$

$-\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(\pi+\alpha) + i\sin(\pi+\alpha)$

$\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Propriétés

Conjugué	Module	Argument	Opérations et forme trigo.
$z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$	$\lvert z\rvert = \lvert -z\rvert = \lvert \overline{z}\rvert$	$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$	$[r,\theta]\times[r',\theta'] = [r\times r', \theta+\theta']$
$z-\overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$	$\lvert z\times z'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$	$\frac{[r,\theta]}{[s,\alpha]} = [\frac{r}{s}, \theta-\alpha]$
$\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$\arg(z\times z') \equiv \arg(z)+\arg(z')[2\pi]$	$[r,\theta]^n = [r^n, p\times\theta]$
$\overline{z\times z'} = \overline{z}\times\overline{z'}$	$\lvert \frac{z}{z'}\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg(z^n) \equiv n\cdot\arg(z)\ [2\pi]$	$\overline{[r,\theta]} = [r, -\theta]$
$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$	$\lvert z+z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$	$\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z)-\arg(z')[2\pi]$	$\frac{1}{[r,\theta]} = [\frac{1}{r}, -\theta]$
$\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$		$\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$	
$z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$			
$z\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$			

Formule de Moivre : $(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$ (n est un entier naturel)

Formules d'Euler : $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Affixe, distance et mesure d'angle

Soint A, B, C et D quatres points du plan complexe.

aff$(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$

C est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $z_C = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

$AB = |z_B - z_A|$

$\overline{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)} \equiv \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

Équation du second degré

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et c trois réels et a non nul.
Soit Δ le discriminent de cette équation

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une seule solution réelle : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjugués : $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Écritures (ou représentations) complexes des transformations usuelles

Soit F une transformation plane qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$.
Donner l'écriture complexe de F consiste à exprimer z' en fonction de z

Transformation plane et ses éléments caractéristiques	Définition géométrique	Écriture complexe
T est la **translation** de vecteur $\vec{w}$ d'affixe w	$T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{w}$	$z' = z + w$
h est l'**homothétie** de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k	$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z-\omega)+\omega$
R est la **rotation** de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α	$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \overline{\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)} \equiv \alpha\ [2\pi] \end{cases}$	$z' = e^{i\alpha}(z-\omega)+\omega$

Réciproquement, toute transformation plane d'écriture complexe $z' = a z + b$, avec a non nul, est :

- une translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b, si $a = 1$;
- une homothétie de rapport a, si a est un réel non nul différent de 1 ;
- une rotation d'angle $\arg(a)$, si a est un nombre complexe non réel de module 1.

Dans les deux derniers cas, ω l'affixe du centre Ω vérifie l'égalité : $\omega = a\omega + b$

L'outil complexe pour traduire des notions géométriques

Ensemble des points	♥ Médiatrice ♥ Cercle		
Trois points	♥ Alignement ♥ Milieu d'un segment ♥ Triangle	● Isocèle ● Rectangle et isocèle	● Rectangle ● Équilatéral
Quatre points	♥ Droites parallèles ♥ Droites perpendiculaires ♥ Quadrilatère	● Parallélogramme ● Rectangle	● Losange ● Carré

Série d'exercices

Dans toute la suite, le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Exercice 1 :

1)- Déterminer deux réels a et b tels que : $3i-a=(2-ib)(i-b)$

2)- Soient p et q deux nombres complexes.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z=p\overline{z}+q$

Exercice 2 :

Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres suivants :

$z_1=(1-i)^2$ $\quad z_2=-\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}$ $\quad z_3=-2(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ $\quad z_4=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$

$z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ $\quad z_6=(\sqrt{3}-i)^7$ $\quad z_7=(1+i)^{2009}$ $\quad z_8=\frac{(1-i\sqrt{3})^{12}}{(1+i\sqrt{3})^7}$

$z_9=1-i\tan\frac{\pi}{11}$ $\quad z_{10}=1+\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$(E_1):\ 2z^2-6z+5=0$ $\quad (E_2):\ z^2-5z+9=0$

$(E_3):\ z^2-2z+17=0$ $\quad (E_4):\ z+\frac{7}{z}=3$

$(E_5):\ z^4+4z^2-21=0$ $\quad (E_6):\ z^2-2\left(1+\sqrt{2}\right)z+2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)=0$

Exercice 4 :

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante : $(E):\ z^3+2z^2-16=0$

1)- Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme $(z-2)(az^2+bz+c)=0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

2)- En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

Exercice 5 :

Soit z un nombre complexe différent de $-3i$

On pose : $Z=\frac{3z+i}{z+3i}$

1)- Montrer que l'ensemble des points M (z) tels que $|Z|=3$ est la médiatrice du segment [AB], avec A et B sont deux points d'affixes respectives $-\frac{1}{3}i$ et $-3i$

2)- Montrer que : $|Z|=1 \Leftrightarrow |z|=1$

3)- En déduire l'ensemble des points M (z) tels que : $|Z|=1$

Exercice 6 :

Soit $P(z)=z^3+6z^2+13z+10$

1)- Calculer $P(-2)$

2)- En déduire une factorisation de $P(z)$

3)- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z)=0$

Exercice 7 :

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=2$, $b=1+i$ et $c=1-i$

1)- a)- Écrire c sous forme trigonométrique

b)- Montrer que c^{2020} est un nombre réel

2)- Vérifier que : $\frac{b-a}{c-a}=-i$, puis déduire la nature du triangle ABC

3)- Montrer que $ABOC$ est un carré

4)- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|iz+1-i|=2$

Exercice 8 :

1)- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $7z^2-5z+1=0$

2)- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $7z^2-5iz-1=0$

Exercice 9 :

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=-8+5i$, $b=-8-5i$, $c=i$ et $d=11i$

1)- Soit T la translation qui transforme A en B

a)- Donner la représentation complexe de T

b)- Vérifier que le point C est l'image de D par la translation T

2)- Montrer que : $\dfrac{a-c}{d-b}=\dfrac{i}{2}$

3)- En déduire que le quadrilatère $ABCD$ est un losange et que $BD=2AC$

4)- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-i|=|z|$

Exercice 10 :

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=1+i$ et $b=2-3i$

Déterminer l'affixe des points M tels que ABM soit un triangle équilatéral.

Exercice 11 :

1)- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-4z+13=0$

2)- On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=i$, $b=2+3i$ et $c=\overline{b}$

Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$

a)- Exprimer z' en fonction de z

b)- Déterminer d l'affixe du point D est l'image du point A par la rotation R

c)- En déduire la nature du triangle ABD

d)- Montrer que les points B, C et D sont alignés

Exercice 12 :

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$(E):\ z^4+\left(1-\sqrt{3}\right)z^3+\left(2-\sqrt{3}\right)z^2+\left(1-\sqrt{3}\right)z+1=0$$

1)- Le nombre 0 est-il solution de l'équation (E) ?

2)- Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, les équations suivantes :

$(E_1):\ z^2+z+1=0$ $\qquad$ $(E_2):\ z^2-z\sqrt{3}+1=0$ $\qquad$ $(E_3):\ z^2+\left(1-\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}=0$

3)- Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation suivante

$$(E'):\ \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)-\sqrt{3}=0$$

4)- En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique

Exercice 13 :

Déterminer la nature de la transformation plane et ses éléments caractéristiques qui à tout point M d'affixe z associé le point M' d'affixe z' dans chacun des cas suivants :

1) $z'=z+2-i$ $\qquad$ 2) $z'=2z-1+3i$ $\qquad$ 3) $z'=iz-2$

4) $z'=4(z-5+i)$ $\qquad$ 5) $z'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$ $\qquad$ 6) $z'=-iz+7-10i$

Exercice 14 :

1)- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-2z+2=0$

2)- On pose $a=1-i$ et $b=2+\sqrt{3}+i$

a)- Écrire a sous forme trigonométrique

b)- Vérifier que : $\dfrac{b}{a}=\left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$, puis écrire b sous forme trigonométrique

c)- Déduire que b^6 est un nombre imaginaire pur

3)- On considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $c=-1+i\sqrt{3}$

Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a)- Exprimer z' en fonction de z

b)- Vérifier que le point C est l'image du point B par la rotation R

c)- En déduire la nature du triangle ABC

4)- Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|z-2-\sqrt{3}-i\right|=\left|z+1-i\sqrt{3}\right|$

a)- Déterminer l'ensemble (E)

b)- En déduire que le milieu du segment $[BC]$ appartient à l'ensemble (E)

Exercice 15 :

1)- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^3-8=0$

2)- On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=2$, $b=-1+i\sqrt{3}$, $c=-1-i\sqrt{3}$ et $d=-4+2i\sqrt{3}$

a)- Vérifier que : $\frac{a-d}{a-b}=2$, puis déduire que B est le milieu du segment $[AD]$

b)- Écrire $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sous forme trigonométrique

c)- Vérifier que : $\frac{b-a}{c-a}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, puis déduire la nature du triangle ABC

3)- Soit H le point d'affixe $h=2-2i\sqrt{3}$.

Montrer que $ABCH$ est un losange.

4)- Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|z+1+i\sqrt{3}\right|=\left|\bar{z}+4+2i\sqrt{3}\right|$

a)- Déterminer l'ensemble (E)

b)- En déduire que le point B appartient à l'ensemble (E)

5)- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|2z-4+4i\sqrt{3}\right|=\left|1-5i\right|$

Exercice 16 :

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=4$ et $b=3-i$

Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

1)- a)- Montrer que : $z'=-iz+4+4i$

b)- Vérifier que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c=3+i$

c)- En déduire la nature du triangle ABC

2)- Soient t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et D l'image du point C par la translation t

a)- Déterminer d l'affixe du point D

b)- En déduire la nature du quadrilatère $ABDC$

3)- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|\bar{z}-3-i\right|=\left|3+i\right|$

Exercice 17 :

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=-\sqrt{2}$, $b=1+i$, $c=1-i$ et $d=2+\sqrt{2}$

1)- a)- Écrire b sous forme trigonométrique

b)- Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel non nul n pour que b^n soit un nombre réel

c)- Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel non nul n pour que b^n soit un nombre imaginaire pur

2)- Vérifier que : $\frac{b-a}{c-a}=\frac{\sqrt{2}}{2}b$, puis déduire que : $AB=AC$ et $\overline{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)}\equiv\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$

3)- a)- Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un losange

b)- En déduire que $\frac{\pi}{8}$ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right)}$

4)- Soients G le point d'affixe $g = i\sqrt{2}$ et h l'homothétie de centre D et de rapport $\sqrt{2}$

a)- Déterminer la représentation complexe de h

b)- Vérifier que : $h(B) = G$

c)- En déduire que les points B, D et G sont alignés

5)- On pose : $p = 1 + \sqrt{2} + i$

a)- Vérifier que : $|p| = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

b)- En utilisant la question 3)b), montrer que : $\arg(p) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

c)- Écrire p sous forme trigonométrique

d)- En déduire que : $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

Exercices de soutien

Exercice 01 (Forme algébrique) :

On pose : $a = 7 - i$ et $b = 3 + 5i$.

Trouver la forme algébrique de chacun des nombres suivants :

$$a+b \qquad ia-b \qquad ab \qquad a^2+\overline{b} \qquad \frac{a}{b}$$

Exercice 02 (Forme trigonométrique) :

1)- Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres suivants :

$$a = 1+i \qquad b = \sqrt{3} - i \qquad c = -\sqrt{2} + i\sqrt{6} \qquad d = -5 - 5i$$

2)- En déduire une forme trigonométrique de chacun des nombres suivants :

$$ab \qquad \frac{a}{c} \qquad d^3 \qquad 2ia$$

Exercice 03 (Équation) :

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$(E_1) : 7z^2 + 2z + 6 = 0 \qquad (E_2) : z^2 - 5z + 9 = 0 \qquad (E_3) : 2z^2 - z + 1 = 0$$

Exercice 04 (Points alignés) :

On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $a = -3i$, $b = 1 - i$ et $c = 2 + i$

Montrer que les points *A*, *B* et *C* sont alignés

Exercice 05 (Droites parallèles) :

On considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives $a = 1 + 4i$, $b = i$, $c = 1 + i$ et $d = -2 - 8i$

Montrer que les droites (*AB*) et (*CD*) sont parallèles

Exercice 06 (Droites perpendiculaires) :

On considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives $a = 2 + 3i$, $b = -1$, $c = -1 + 3i$ et $d = 5 - 3i$

Montrer que les droites (*AB*) et (*CD*) sont perpendiculaires

Exercice 07 (Parallélogramme) :

On considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = -1 + 5i$, $c = 2 + i$ et $d = 4 - 2i$

Montrer que le quadrilatère *ABCD* est un parralélogramme, puis déterminer l'affixe de son centre *K*

Exercice 08 (Triangle rectangle) :

On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $a = 3 + 5i$, $b = 3 - 5i$ et $c = 7 + 3i$

Montrer que le triangle *ABC* est rectangle en *C* et que *BC* = 2 *AC*

Exercice 09 (Triangle rectangle et isocèle) :

On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $a = 9 + i$, $b = 9 - i$ et $c = 11 - i$

Montrer que le triangle *ABC* est rectangle et isocèle en *B*

Exercice 10 (Triangle équilatéral) :

On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $a = 8i$, $b = 4\sqrt{3} - 4i$ et $c = 2\left(4\sqrt{3} + 4i\right)$

Montrer que le triangle *ABC* est équilatéral

Exercice 11 (Rectangle) :

On considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives $a = 2 + 2i$, $b = 1 - i$, $c = -5 + i$ et $d = -4 + 4i$

Montrer que le quadrilatère *ABCD* est un rectangle

Exercice 12 (Losange) :

On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $a = 1 + i\sqrt{3}$, $b = 2i$ et $c = a + b$

Montrer que le quadrilatère O*ACB* est un losange

Exercice 13 (Carré) :

On considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives $a = \sqrt{3}$, $b = 2 + i\sqrt{3}$, $c = 2 - \sqrt{3} + 2i$ et $d = \left(2 - \sqrt{3}\right)i$

Montrer que le quadrilatère *ABCD* est un carré

Devoirs et examen blanc

Devoir maison N° 1

Exercice 1 (Questions indépendantes):

1)- Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right) & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est continue en zéro.

2)- Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants : $a = \sqrt{5}$; $b = \sqrt[3]{7}$; $c = \sqrt[4]{11}$.

3)- Soit g une fonction continue sur $[0,1]$ telle que : $g(1) = \sqrt{2}$.

Montrer que l'équation $\sqrt[3]{x}g(x) = 1$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]0,1[$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x - \sqrt{2x-1}$.

1)- Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2)- Montrer que f est continue sur D_f.

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en $\dfrac{1}{2}$, puis interpréter le résultat graphiquement.

4)- Vérifier que : $\forall x \in \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$.

5)- Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^3 + x + 1$.

1)- Étudier les variations de f.

2)- a)- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

b)- Vérifier que : $-1 < \alpha < 0$

3)- Montrer que : $1 + \alpha^2 = \dfrac{-1}{\alpha}$ et $\alpha + \sqrt[3]{1 - \sqrt[3]{1 - \sqrt[3]{1+\alpha}}} = 0$.

4)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

5)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 0, puis vérifier que : $\left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{3\alpha^2 + 1}$.

6)- Soit g la fonction numérique définie par : $\begin{cases} g(x) = x^2 & ; x \geq \alpha \\ g(x) = -1 - \dfrac{1}{x} & ; x < \alpha \end{cases}$.

Étudier la continuité de g en α.

Devoir blanc

Exercice 1

1)- Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants : $a=\sqrt{2}$; $b=\sqrt[4]{5}$; $c=7^{\frac{4}{3}}$.

2)- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}-3=0$.

3)- Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{11-3\cos x}-2}{x^2}$.

4)- Simplifier le nombre suivant : $A=\dfrac{\sqrt[3]{32}\times\sqrt{8}\times\sqrt{\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[5]{\sqrt{32}}}$.

5)- Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x-a)}{x}\sin x\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=3 \end{cases}$, où a est un nombre réel.

a)- Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en zéro.

b)- Pour la valeur de a trouvée dans la question précédente, étudier la dérivabilité de f en zéro, puis interpréter le résultat graphiquement (on admet que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}=0$).

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x^5+8x^3-8$.

1)- Étudier les variations de f.

2)- a)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

b)- Vérifier que : $0<\alpha<1$

3)- Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

4)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

5)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 0, puis exprimer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ en fonction de α.

6)- Soit g la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} g(x)=\sqrt[3]{x^2+8} & ;\ x\leq\alpha \\ g(x)=\dfrac{2}{x} & ;\ x>\alpha \end{cases}.$$

a)- Montrer que g est continue en α.

b)- Étudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x}-2\sqrt{x+1}$.

1)- Déterminer D_f, puis calculer la limite de f en $+\infty$.

2)- Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en -1, puis interpréter le résultat graphiquement.

4)- a)- Calculer $f'(x)$, pour tout $x \in D_f - \{-1\}$.

b)- Déduire les variations de f.

5)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans $]0,+\infty[$, et que : $\frac{1}{4} < \alpha < 1$.

6)- Vérifier que : $\alpha^3 + \alpha^2 = \frac{1}{4}$.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x\left(\sqrt{x}-2\right)^2$.

1)- Déterminer D_f , puis étudier la continuité de f sur D_f.

2)- Étudier la dérivabilité de f en zéro, puis interpréter le résultat graphiquement.

3)- Vérifier que : $\forall x \in]0,+\infty[,\quad f'(x) = 2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$.

4)- Dresser le tableau de variations de f.

5)- Soit g la restriction de f sur un l'intervalle $I=[1,4]$.

a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Dresser le tableau de variations de g^{-1}.

c)- Simplifier $g^{-1}(x)\left(\sqrt{g^{-1}(x)}-2\right)^2$, pour tout $x \in J$.

Devoir surveillé N° 1 (version 1)

Exercice 1 (Questions indépendantes): 7 points

1)- Comparer $\sqrt{2}$ et $\sqrt[4]{5}$. **1pt**

2)- Résoudre dans $\mathbb{R}$ ce qui suit : $(x+1)^6 - 7 = 0$; $\sqrt[3]{3x-4} \leq 2$. **1pt + 1,5pt**

3)- Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 - \cos(x)$.

a)- Justifier pourquoi g est continue sur $\mathbb{R}$. **0,75pt**

b)- En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. **0,75pt**

4)- Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{ax}{5x - 2\sin x} \; ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$, où a est un nombre réel.

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en zéro. **2pts**

Problème : 13 points

Partie A :

Soit P la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

1)- Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3(x^2 - 1)$. **0,75pt**

2)- Dresser le tableau de variations de P (***Les limites ne sont pas demandées***). **0,75pt**

3)- En déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $P(x) \geq 0$. **0,5pt**

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 8\sqrt{x} - 5$.

1)- a)- Vérifier que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = (x-3)^2 + 8\sqrt{x} - 14$. **0,75pt**

b)- En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. **0,5pt**

2)- Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$. **1pt**

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter le résultat graphiquement. **1,5pt**

4)- a)- Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2P(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. **1,5pt**

b)- En utilisant la question **A.3**), déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. **1pt**

5)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. **1,5pt**

6)- Dresser le tableau de variations de f^{-1}. **1pt**

7)- a)- Calculer $f(4)$. **0,25pt**

b)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 3, puis calculer $(f^{-1})'(3)$. **2pts**

Devoir surveillé N° 1 (version 2)

Exercice 1 : 8 points

1)- Résoudre dans $\mathbb{R}$ ce qui suit : $2\sqrt[3]{x+1}-1=0$; $\sqrt[4]{x-1}>\sqrt{2}$. **1,25pt + 1,25pt**

2)- Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants : $a=\sqrt{5}$; $b=\sqrt[3]{7}$; $c=\sqrt[4]{11}$. **1,25pt**

3)- Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=\cos\left(x^2-5x+1\right)$

Déterminer $h'(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$. **1pt**

4)- Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3-3x+1$.

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]0,1[$. **1,25pt**

5)- Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-a\tan x}{x} \; ; x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$, où a est un nombre réel.

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en zéro. **2pts**

Problème : 12 points

Partie A :

Soit u la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=7x^3+6x+1$.

1)- Déterminer $u'(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$. **0, 5pt**

2)- Dresser le tableau de variations de u (***Les limites ne sont pas demandées***). **0,75pt**

3)- En déduire que : $\forall x\in[0,+\infty[,\quad u(x)>0$. **0,5pt**

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\left(x^3+2x+1\right)\sqrt{x}-3$.

1)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. **0,75pt**

2)- Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$. **1pt**

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter le résultat graphiquement. **1,5pt**

4)- a)- Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[,\quad f'(x)=\dfrac{u(x)}{2\sqrt{x}}$. **1,5pt**

b)- En utilisant la question **A.3**), déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. **1pt**

5)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. **1,5pt**

6)- Dresser le tableau de variations de f^{-1}. **0,75pt**

7)- a)- Calculer $f(1)$. **0,25pt**

b)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 1, puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$. **2pts**

Devoir maison N° 2

Exercice 1 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \left(\sqrt{2}-1\right)u_n + 2 - \sqrt{2}$ pour tout entier naturel n

1)- Montrer que la suite (u_n) est minorée par 1

2)- Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \left(\sqrt{2}-2\right)\left(u_n - 1\right)$, puis déterminer la monotonie de (u_n)

3)- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4)- Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 1 = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(u_n - 1\right)$

5)- Trouver le terme général de (u_n), puis calculer $\lim u_n$

6)- Déduire la limite de la suite (v_n) définie par : $v_n = \left(5 - u_n\right)\sqrt{u_n}$ pour tout entier naturel n

Problème :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$.

1)- Déterminer D_f, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2)- Déterminer les deux branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.

3)- Montrer que : $\forall x \in [2, +\infty[,\ f(x) \leq x$.

4)- a)- Montrer que : $\forall x \in D_f,\ f'(x) = \dfrac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$, puis dresser le tableau de variations de f.

b)- En déduire que : $\forall x \in D_f,\ f(x) \geq 2$.

5)- a)- Montrer que : $\forall x \in D_f,\ f''(x) = \dfrac{4-x}{4\sqrt{(x-1)^5}}$

b)- En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ admet un point d'inflexion A dont on déterminera ses coordonnées.

6)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe la première bissectrice du repère en un seul point à déterminer.

7)- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

8)- On admet que g la restriction de f sur l'intervalle $[2, +\infty[$ admet une fonction réciproque notée g^{-1}.
Tracer dans le même repère précédent et avec une autre couleur la courbe $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$.

9)- Montrer que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1} - 24$ est la primitive de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$ qui s'annule en 10.

10)- Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n - 1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer, par récurrence, que $u_n \geq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c)- Déterminer la limite de la suite (u_n)

Devoir blanc

Exercice 1 (Questions indépendantes) :

1)- Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2023n+1}{n-2024}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7^n+5\times 2^n}{2\times 3^n-7^n}$.

2)- Déterminer une fonction primitive F de la fonction f sur I dans les cas suivants :

a)- $f(x)=x^3+4x+2\cos x-1$ $\quad I=\mathbb{R}$

b)- $f(x)=(x+1)\left(x^2+2x-4\right)^7$ $\quad I=\mathbb{R}$

c)- $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x-\sin x+2}}$ $\quad I=\mathbb{R}^+$

Exercice 2 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=-1$ et $u_{n+1}=\dfrac{45}{46}u_n-\dfrac{1}{23}$ pour tout entier naturel n

1)- Montrer, par récurrence, que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq -2$

2)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis déduire qu'elle convergente.

3)- Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n=u_n+2$ pour tout entier naturel n

a)- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{45}{46}$, puis écrire v_n en fonction de n

b)- En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\left(\dfrac{45}{46}\right)^n-2$

c)- Calculer la limite $\lim u_n$

4)- Déterminer la limite de la suite (w_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ w_n=u_n\tan(2+u_n)$

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=x\left(\sqrt{x}-1\right)^2$

1)- Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2)- Déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en zéro, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4)- a)- Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[,\quad f'(x)=\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$

b)- Dresser le tableau de variations de f

5)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ admet un seul point d'inflexion que l'on déterminera.

6)- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé. **(unité : 2cm)**

Devoir surveillé N° 2

Exercice 1 (Questions indépendantes) : 4 points

1)- Calculer les deux limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n+2}{5-n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n+2^n}{5^n-2^n}$. **2 x 1pt**

2)- Déterminer une fonction primitive F de la fonction f sur I dans les deux cas suivants :

a)- $f(x)=x^2-2\sin x+3$ $\quad I=\mathbb{R}$ **1pt**

b)- $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$ $\quad I=]0,+\infty[$ **1pt**

Exercice 2 : 9 points

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{23}{24}u_n+\dfrac{1}{8}$ pour tout entier naturel n

1)- Montrer, par récurrence, que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\le 3$ **1pt**

2)- Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis déduire qu'elle convergente. **1,5pt+0,5pt**

3)- Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n=u_n-3$ pour tout entier naturel n

a)- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{23}{24}$, puis écrire v_n en fonction de n **2 x 1pt**

b)- En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=3-\left(\dfrac{23}{24}\right)^n$ **0,5pt**

c)- Calculer la limite $\lim u_n$ **1pt**

4)- Déterminer la limite de la suite (w_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ w_n=(u_n+2)\cos(u_n)$ **1pt**

5)- Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $P_n=(3-u_1)\times(3-u_2)\times\cdots\times(3-u_n)$

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P_n=\left(\sqrt{\dfrac{23}{24}}\right)^{n(n+1)}$, puis calculer $\lim \sqrt[n]{P_n}$ **2 x 0,75pt**

Exercice 3 : 7 points

Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

1)- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **0,5pt+1pt**

2)- Déterminer les deux branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$ **0,25pt+0,75pt**

3)- a)- Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[,\quad f'(x)=\dfrac{x+1}{2x\sqrt{x}}$ **0,75pt**

b)- En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ **0,5pt**

4)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un seul point à déterminer. **0,75pt**

5)- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé. **1pt**

6)- On admet que f admet une fonction réciproque, notée f^{-1}

Tracer dans le même repère précédent et avec une autre couleur $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ **0,5pt**

7)- Montrer que la fonction $F: x\mapsto \dfrac{2}{3}(x-3)\sqrt{x}+1$ est une primitive de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ **1pt**

Devoir maison N° 3

Exercice 1 :

On considère les nombres complexes : $a=\sqrt{3}+i$ et $b=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i$

1)- Écrire a et $1+i$ sous forme trigonométrique.

2)- a)- Vérifier que : $b=(1+i)a$, puis en déduire que : $|b|=2\sqrt{2}$ et $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$

b)- Déduire de ce qui précède que : $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3)- Montrer que : $b^6\in i\mathbb{R}$

4)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $c=-1+i\sqrt{3}$

a)- Vérifier que : $c=ia$, puis déduire la nature du triangle OAC

b)- Montrer que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$

c)- En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un carré

Problème :

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x-2\ln(x)$

1)- Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$

2)- Dresser le tableau de variations de g (*le calcul des limites n'est pas demandé*)

3)- En déduire que : $g(x)>0$, pour tout x de $]0,+\infty[$

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-\ln^2(x)$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $1cm$).

1)- Calculer la limite $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat

2)- a)- Vérifier que : $\forall x\in]0,+\infty[,\ \frac{\ln^2(x)}{x}=4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)}{x}$

b)- Déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3)- a)- Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

b)- En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

4)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ admet un point d'inflexion A dont on déterminera ses coordonnées.

5)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessous de la première bissectrice du repère.

6)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (on admettra que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α et que $\alpha\approx0,49$).

Partie III :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=\sqrt{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $1\le u_n\le2$, pour tout n de $\mathbb{N}$

2)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3)- Déterminer la limite de la suite (u_n)

Devoir blanc

Exercice 1 :

On considère les nombres complexes suivants :

$$a=-1+i\,,\quad b=\sqrt{6}-i\sqrt{2}\quad \text{et}\quad c=-\sqrt{6}-\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

1)- Écrire a et b sous forme trigonométrique.

2)- Vérifier que : $c=a\overline{b}$, puis déduire une écriture exponentielle de c

3)- Le nombre c^{18} est-il réel ou imaginaire pur ? Justifier votre réponse.

4)- Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$

5)- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $\dfrac{1}{2}z^2-3z+6=0$

6)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point A

d'affixe a , et soit R la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$

a)- Trouver l'expression complexe de R

b)- Vérifier que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $d=i\sqrt{2}$

c)- Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z+1-i|=|z-i\sqrt{2}|$

Exercice 2 :

Partie I :

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2-2\ln x$

On considère ci-dessous le tableau de variation de la fonction g

X	**0**		**1**		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	

1)- Calculer g(1)

2)- En utilisant le tableau précédent, déterminer le signe de g sur $]0,+\infty[$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2\ln x}{x}-3$,

et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $1cm$).

1)- a)- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, puis en déduire une branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$

b)- Déterminer l'asymptote oblique de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

2)-a)- Montrer que : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,\quad f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b)- En déduire le sens de variation de f sur $]0,+\infty[$

3)- Montrer que : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,\quad f''(x)=\dfrac{2}{x^3}\left(2\ln(x)-1\right)$, puis en déduire le point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$

4)- Construire $(\mathscr{C}_f)$

Devoir surveillé N° 3

Exercice 1 : 6 points

On pose : $Z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$

1)- Écrire $\sqrt{3}+i$ et $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ sous forme trigonométrique. **2x1pt**

2)- Vérifier que : $Z = e^{i\frac{5\pi}{12}}$ **1pt**

3)- En déduire que Z^{36} est un nombre réel négatif. **1pt**

4)- Déterminer la forme algébrique de Z, puis en déduire que : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **2x1pt**

Exercice 2 : 5 points

1)- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $2z^2 - z + 1 = 0$ **1,5pt**

2)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point Ω d'affixe $\omega = 2i$, et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2

a)- Trouver l'expression complexe de h **1pt**

b)- Vérifier que l'affixe du point A image du point O par l'homothétie h est $a = 6i$ **1pt**

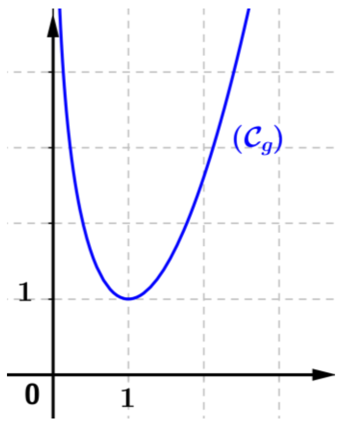
c)- Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-2i| = |z|$ **1,5pt**

Exercice 3 : 9 points

Partie I :

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$

On considère ci-contre la courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g



En utilisant la courbe $(\mathscr{C}_g)$,

1)- déterminer le signe de g sur $]0,+\infty[$ **1pt**

2)- dresser le tableau de signe de $g'(x)$ sur $]0,+\infty[$ **1pt**

Partie II : On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^3 + 6x(1-\ln x) - 7, & x>0 \\ f(0) = -7 \end{cases}$,

et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $1cm$).

1)- a)- Vérifier que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x^2\left(x + \dfrac{6}{x} - 6\dfrac{\ln x}{x}\right) - 7$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **2x0,5pt**

b)- Déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ **1pt**

2)- Montrer que f est continue à droite en zéro. **0,5pt**

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en zéro, puis interpréter graphiquement le résultat. **2x0,5pt**

4)- a)- Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[,\quad f'(x) = 3g(x)$ **1pt**

b)- En déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ **0,5pt**

5)- Montrer que $f''(x)$ et $g'(x)$ ont le même signe $]0,+\infty[$, puis déduire le point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$ **1pt**

6)- Construire $(\mathscr{C}_f)$ **1pt**

Examen blanc

Exercice 1 (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{8u_n + 3}{u_n + 6}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{9}$, puis écrire v_n en fonction de n **0,5pt+0,5pt**

2)- Montrer que : $u_n = \dfrac{3 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$, puis déterminer la limite de (u_n) **0,5pt+0,5pt**

3)- Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n > 2,99$ **1pt**

Exercice 2 (5 points)

1)- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 6z + 10 = 0$ **1pt**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B

d'affixes respectives $a = 4$ et $b = 3 - i$

2)- Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation

R de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

a)- Montrer que : $z' = -iz + 4 + 4i$ **1pt**

b)- Vérifier que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = 3 + i$ **0,5pt**

c)- En déduire la nature du triangle ABC **0,5pt**

3)- Soient t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et D l'image du point C par la translation t

a)- Déterminer d l'affixe du point D **0,5pt**

b)- En déduire la nature du quadrilatère $ABDC$ **0,5pt**

4)- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|\overline{z} - 3 - i\right| = |3 + i|$ **1pt**

Problème (12 points)

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 2 - 2x\ln x$

On considère ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $]0, +\infty[$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$g(x)$	‖	↗	$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	↘	

1)- Vérifier que : $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{2}{\sqrt{e}}-2$, puis déduire le signe de $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ sachant que : $\frac{2}{\sqrt{e}}\simeq 1,2$ **2x0,5pt**

2)- En déduire, à partir du tableau précédent, le signe de la fonction g **0,5pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\frac{\ln x}{(x-2)^2}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $2cm$).

1)- Vérifier que : $D_f=]0,2[\cup]2,+\infty[$, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f **0,5pt + 2pts**

2)- Déterminer les branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$ **1,5pt**

3)- a)- Montrer que : $\forall x\in D_f,\ \ f'(x)=\frac{g(x)}{x(x-2)^3}$ **1pt**

b)- En déduire que $f'(x)$ et $x-2$ ont des signes contraires **0,75pt**

c)- Dresser le tableau de variations de f **0, 5pt**

4)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un seul point A que l'on déterminera **0,75pt**

5)- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point A **0,5pt**

6)- Construire la droite (T) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (*on admet qu'il existe un point d'inflexion de* $(\mathscr{C}_f)$ *d'abscisse comprise entre 0,4 et 0,6*) **1,5pt**

7)- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=x$ **0,5pt**

8)- Construire dans le repère précédent $(\mathscr{C}_h)$ la courbe représentative de la fonction h définie par : $h(x)=\frac{\ln|x|}{(|x|-2)^2}$ **1pt**