

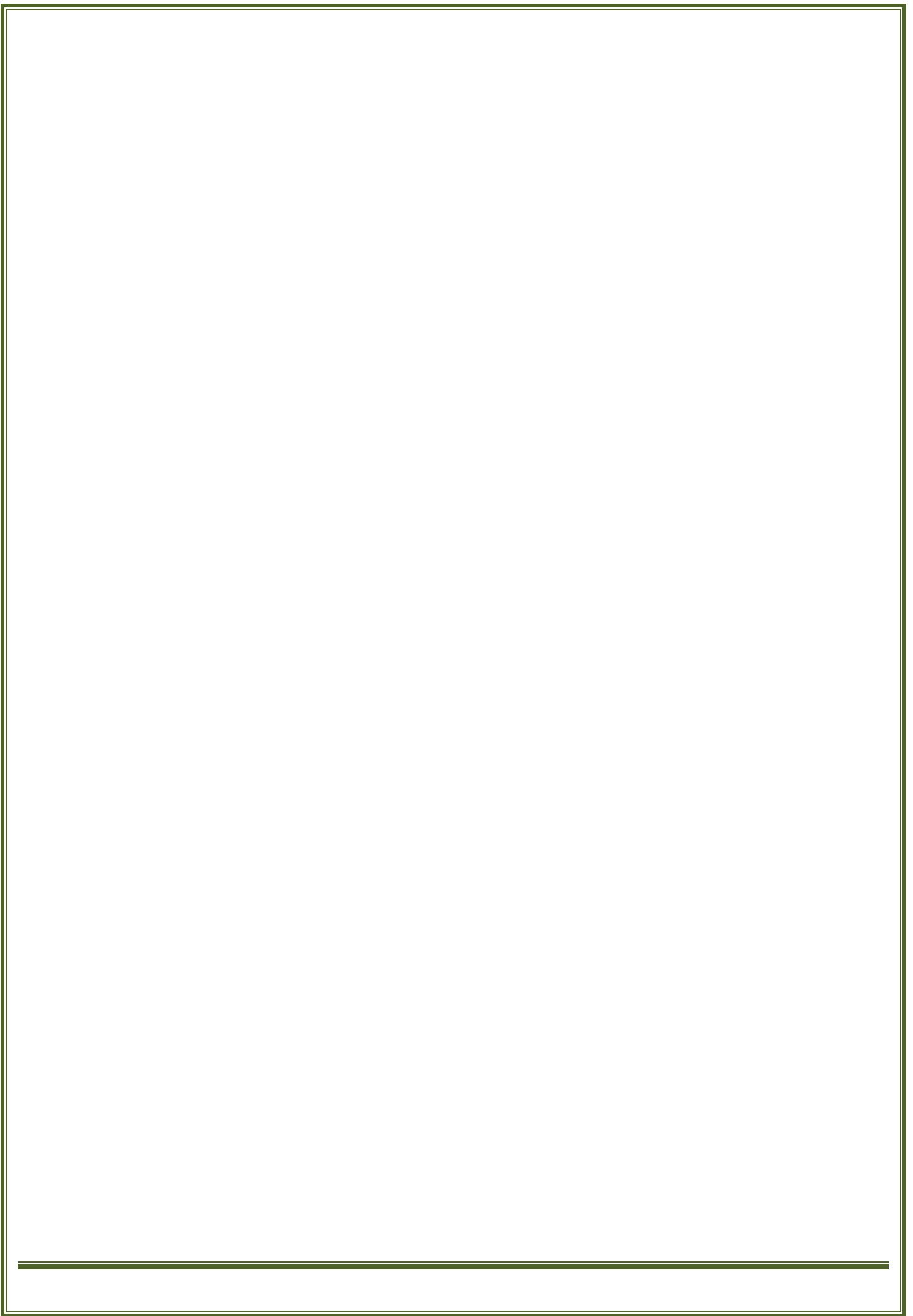
Résumé

Maths Bac

2^{ème} année

Baccalauréat

Sciences expérimentales
Sciences et technologies industrielles



Sommaire

Signe de $ax+b$ – signe de ax^2+bx+c	4
Identités remarquables – Domaine de définition d'une fonction	5
Limites d'une fonction	6
Continuité d'une fonction	8
Dérivabilité d'une fonction	10
Axe de symétrie - Centre de symétrie – Point d'inflexion	12
Branches infinies	13
Fonction réciproque	14
Fonction racine n-ième	16
Suites numériques	18
Fonctions primitives	20
Calcul intégral	22
Fonctions Logarithmes	24
Fonctions Exponentielles	26
Nombres Complexes	28
Equations différentielles	32
Dénombrement	33
Probabilités	34
Géométrie dans l'espace	36
Trigonométrie	38

Signe de $ax+b$

Signe et factorisation de ax^2+bx+c

➤ **Signe de $ax+b$ ($a \neq 0$)**

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$\text{Signe de } (-a)$	0	$\text{Signe de } a$

➤ **Signe et factorisation du trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)**

$\Delta = b^2 - 4ac$	Solution de l'équation $x \in \mathbb{R} \quad P(x) = 0$	Signe de $P(x)$	Factorisation de $P(x)$										
$\Delta < 0$	$S = \emptyset$	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td><td style="text-align: center;">$-\infty$</td><td style="text-align: center;">$+\infty$</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">$P(x)$</td><td style="text-align: center;">Signe de a</td><td></td></tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	Signe de a		On ne peut pas factoriser $P(x)$				
x	$-\infty$	$+\infty$											
$P(x)$	Signe de a												
$\Delta = 0$	$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td><td style="text-align: center;">$-\infty$</td><td style="text-align: center;">$\frac{-b}{2a}$</td><td style="text-align: center;">$+\infty$</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">$P(x)$</td><td style="text-align: center;">Signe de $(-a)$</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">Signe de a</td></tr> </table>	x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$	$P(x)$	Signe de $(-a)$	0	Signe de a	$P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$		
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$										
$P(x)$	Signe de $(-a)$	0	Signe de a										
$\Delta > 0$	$S = \{x_1; x_2\}$ avec: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td><td style="text-align: center;">$-\infty$</td><td style="text-align: center;">x_1</td><td style="text-align: center;">x_2</td><td style="text-align: center;">$+\infty$</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">$P(x)$</td><td style="text-align: center;">Signe de a</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">Signe de $(-a)$</td><td style="text-align: center;">0</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">(on suppose que $x_1 < x_2$)</p>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$P(x)$	Signe de a	0	Signe de $(-a)$	0	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$									
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de $(-a)$	0									

Si x_1 et x_2 sont deux solutions distinctes de l'équation : $x \in \mathbb{R} \quad ax^2 + bx + c = 0$

alors: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Identités remarquables

Domaine de définition d'une fonction

➤ **Identités remarquables :**

Pour tous réels a et b

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

➤ **Domaine de définition d'une fonction :**

Soient P et Q deux polynômes

f une fonction numérique de la variable réelle x définie par :	Domaine de définition de f :
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\right\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\right\}$
$f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0 \text{ et } Q(x) > 0\right\}$
$f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\right\}$

Limites d'une fonction

- **Limites et inverses des fonctions :** $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \sqrt[n]{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Si n est un nombre pair alors:	Si n est un nombre impair alors:
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = -\infty$

- **Limites des fonctions polynômes et rationnelles en : $+\infty / -\infty$**

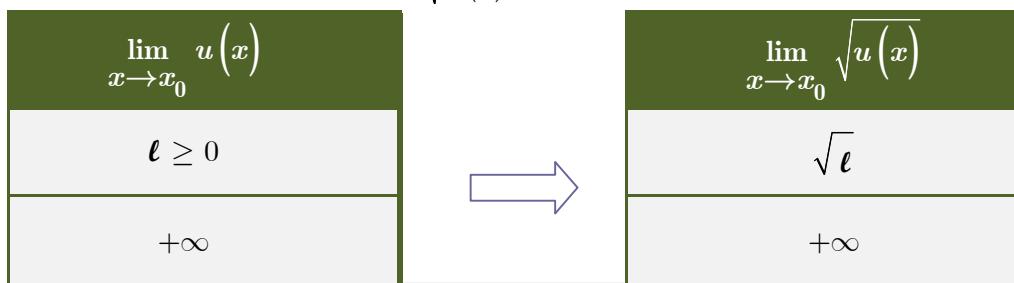
Limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle de son terme de plus haut degré

Limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré

- **Limites des fonctions trigonométriques :**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
---	---	---

- **Limites des fonctions de type :** $x \mapsto \sqrt{u(x)}$



Ces résultats restent valable, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

➤ **Théorème de comparaison :**

$$\left. \begin{array}{l} U(x) \leq f(x) \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} |f(x) - \ell| \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \leq U(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} U(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

➤ **Limites et opérations :**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) + f(x)]$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$		$\ell > 0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \times f(x)]$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Ces résultats restent valable, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

Continuité

➤ Continuité en un point :

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

➤ Continuité à droite - Continuité à gauche :

- f est continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$
- f est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$
- f est continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en x_0

➤ Continuité sur un intervalle :

- f est continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ si f est continue en chaque élément de $]a, b[$
- f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et f est continue à droite en a et à gauche en b

➤ Opérations sur les fonctions continues:

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un réel

- Les fonctions $f + g$, $f \times g$, kf et f^n avec $n \in \mathbb{N}$, sont continues sur I
- Les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I si g ne s'annule pas sur I

Conséquences :

- Les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R}
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition
- La fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$
- Les fonctions : $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur \mathbb{R}

➤ Composé de deux fonctions continues:

Si f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur l'intervalle $f(I)$, alors la fonction gof est continue sur I

➤ L'image d'un intervalle par une fonction continue:

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Cas particulier :

Soit f est continue et strictement monotone sur un intervalle I

Le tableau suivant illustre les différents cas possibles de l'intervalle $f(I)$

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$]a, b]$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$]a, b[$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$[a, +\infty[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$]a, +\infty[$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$]-\infty, a]$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a)]$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$
$]-\infty, a[$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$
\mathbb{R}	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$

➤ Théorème des valeurs intermédiaires :

Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$, alors pour tout réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel α de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(\alpha) = \beta$

Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $[a, b]$

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[a, b]$

➤ Méthode de dichotomie :

Soit f est fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[a, b]$

$$\text{Si } f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

$$\text{Alors: } a < \alpha < \frac{a+b}{2}$$

l'amplitude de cet encadrement est : $\frac{b-a}{2}$.

On poursuit la recherche de α sur l'intervalle $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$

$$\text{Si } f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times f(b) < 0$$

$$\text{Alors: } \frac{a+b}{2} < \alpha < b$$

l'amplitude de cet encadrement est : $\frac{b-a}{2}$.

On poursuit la recherche de α sur l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$

On arrête le processus dès que l'amplitude de l'encadrement de α est inférieur à la précision souhaitée

Dérivabilité

➤ Fonction dérivable en un point:

On dit qu'une fonction f est **dérivable** en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie

Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en x_0 , on le note $f'(x_0)$.

➤ L'équation de la tangente à une courbe :

Soit f fonction est dérivable en x_0

L'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0

est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

➤ Dérivabilité à droite, à gauche en un point :

- On dit que f est **dérivable à droite** en x_0 , si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie

Cette limite est appelé le nombre dérivé de f à droite en x_0 , on le note $f'_d(x_0)$

- On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 , si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie

Cette limite est appelé le nombre dérivé de f à gauche en x_0 , on le note $f'_g(x_0)$

f dérivable en x_0 , si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0
et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

➤ Dérivabilité et continuité :

Si f une fonction est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0

➤ Dérivée des fonctions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	$(k \in \mathbb{R})$
x	1	
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	
x^r	rx^{r-1}	$(r \in \mathbb{Z}^* - \{1\})$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	

➤ **Opérations sur les fonctions dérivées- dérivée d'une fonction composée :**

$(u + v)' = u' + v'$	$(ku)' = k(u)' \quad (k \in \mathbb{R})$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(u^n)' = nu'.u^{n-1}$
$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(uov)' = [u'ov] \times v'$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

➤ **Définition et sens de variation :**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- f est **croissante** sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$
- f est **décroissante** sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$
- f est **constante** sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) = 0$

➤ **Interprétation géométrique et dérivabilité :**

La limite	Dérivabilité en x_0	Interprétation géométrique : (C_f) admet
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a}{(a \neq 0)}$	f est dérivable en x_0	Une tangente au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une tangente horizontale au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a}{(a \neq 0)}$	f est dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une demi-tangente horizontale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le bas
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le haut
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a}{(a \neq 0)}$	f est dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une demi-tangente horizontale à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente verticale à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le haut
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le bas

Axe de symétrie-Centre de symétrie-Point d'inflexion

➤ Axe de symétrie – Point de symétrie :

La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de la courbe (C_f) si :

- $\forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f$
- $\forall x \in D_f \quad f(2a - x) = f(x)$

Le point $I(a, b)$ est un **point de symétrie** de la courbe (C_f) si :

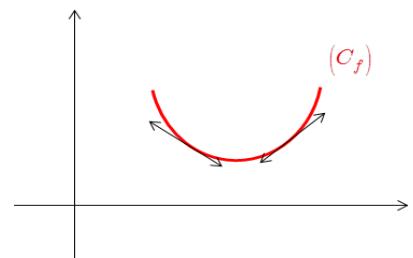
- $\forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f$
- $\forall x \in D_f \quad f(2a - x) + f(x) = 2b$

➤ Concavité et point d'inflexion d'une courbe :

Une fonction est **convexe** sur un intervalle si sa courbe représentative sur cet intervalle, est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes

Si $\forall x \in I \quad f''(x) \geq 0$

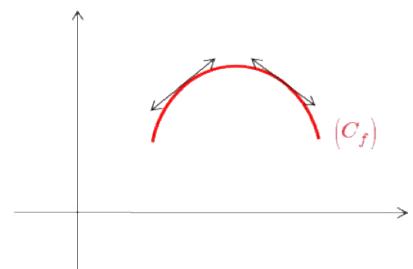
Alors la courbe (C_f) est convexe sur l'intervalle I



Une fonction est **concave** sur un intervalle si sa courbe représentative sur cet intervalle, est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes

Si $\forall x \in I \quad f''(x) \leq 0$

Alors la courbe (C_f) est concave sur l'intervalle I



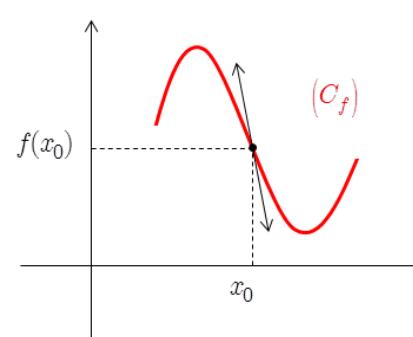
Un **point d'inflexion** d'une courbe (C_f) est le point où la courbe (C_f) change de concavité en ce point

Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0

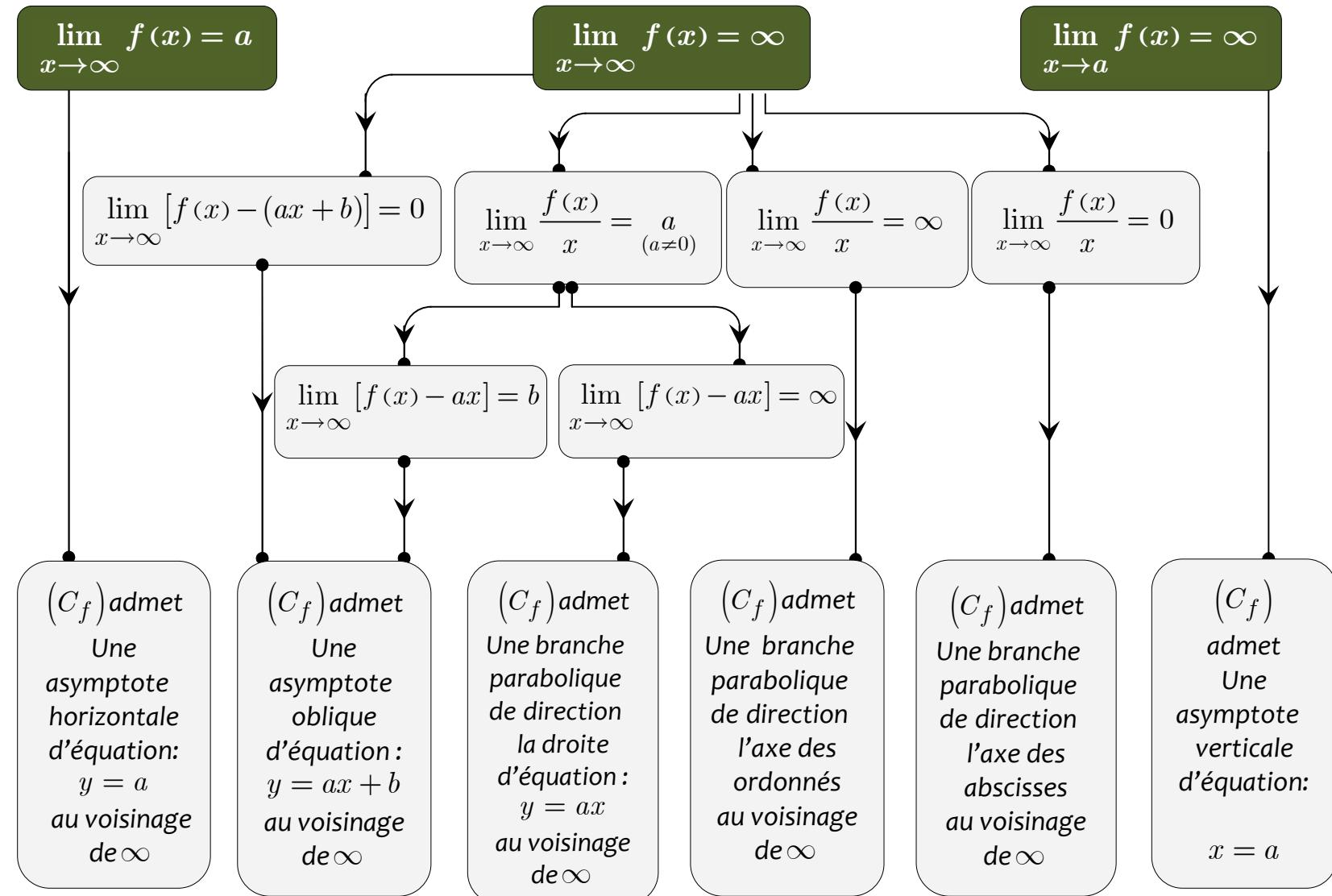
Alors la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse x_0

Si f' s'annule sans changer de signe en x_0

Alors la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse x_0



Branches infinies



Fonction réciproque

➤ Propriété :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Alors f admet **une fonction réciproque**, notée f^{-1} , définie sur l'intervalle $f(I)$

et on a :
$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

➤ Détermination de l'expression de $f^{-1}(x)$:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Soit x un élément de $f(I)$ et y un élément de I tel que: $f^{-1}(x) = y$

On a: $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ et en résolvant l'équation $f(y) = x$ d'inconnue y

On déduit l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de $f(I)$

➤ Continuité de la fonction réciproque :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Alors une fonction réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(I)$

➤ Dérivabilité de la fonction réciproque :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

et x_0 un élément de $f(I)$

si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en y_0

et on a :
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I

alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a :

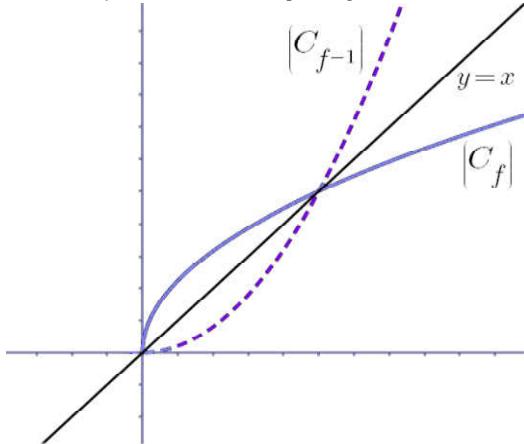
$$\forall x \in f(I) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

➤ **Monotonie de la fonction réciproque :**

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Alors une fonction réciproque f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$
et varie dans le même sens que f

➤ **La courbe représentative de la fonction réciproque :**



Dans un repère orthonormé $\left(C_{f^{-1}}\right)$ est le symétrique de $\left(C_f\right)$ par rapport à la première bissectrice du repère (droite d'équation: $y = x$)

➤ **Remarques:**

La courbe (C_f)	⇒	La courbe $(C_{f^{-1}})$
$A(a, b) \in (C_f)$		$A'(b, a) \in (C_{f^{-1}})$
admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$		admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$
admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$		admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$
admet une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$		admet une asymptote oblique d'équation : $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ (on détermine l'expression de y à partir de la relation: $x = ay + b$)
admet une tangente (ou demi-tangente) verticale		admet une tangente (ou demi-tangente) horizontale
admet une tangente (ou demi-tangente) horizontale		admet une tangente (ou demi-tangente) verticale

Fonction racine n-ième

➤ Définition :

Soit n un entier naturel non nul

La fonction : $x \mapsto x^n$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[0; +\infty[$
elle admet une fonction réciproque définie sur $[0; +\infty[$, nommée racine n-ième
et que l'on note $\sqrt[n]{}$ et on a : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

➤ Propriétés:

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- $\sqrt[n]{x^n} = x$
- $(\sqrt[n]{x})^n = x$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall (m; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[m]{y} = \sqrt[nm]{x \times y}$
- $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[nm]{x^m}$
- $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad (y \neq 0)$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m}$

➤ Ensemble de définition :

L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$

$$\text{est } D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \geq 0 \right\}$$

➤ Limites:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$$

$$\ell \geq 0$$

$$+\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)}$$

$$\sqrt[n]{\ell}$$

$$+\infty$$

Ces résultats restent valables, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

➤ Continuité :

Si f une fonction définie, positive et continue sur un intervalle I

alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I

➤ Dérivée :

Si u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I

Alors la fonction : $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I

et on a : $\forall x \in I \quad \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u(x)]^{n-1}}$

➤ Résolution de l'équation : $x \in \mathbb{R} \quad x^n = a \quad (a \in \mathbb{R})$

	n un entier naturel impair	n un entier naturel pair non nul
$a > 0$	$S = \left\{ \sqrt[n]{a} \right\}$	$S = \left\{ -\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a} \right\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \left\{ -\sqrt[n]{ a } \right\}$	$S = \emptyset$

➤ Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif:

Soit un x réel strictement positif et un r nombre rationnel

On pose $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$)

On a : $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

➤ Remarques :

- $\sqrt[n]{u(x)} = (u(x))^{\frac{1}{n}}$
- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left((u(x))^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \times (u(x))' \times (u(x))^{\frac{1}{n}-1}$

Pour tous réels x et y positifs et pour tous rationnelles r et r'

- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $(x \times y)^r = x^r \times y^r$
- $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$
- $(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$
- $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$

Suites numériques

➤ **Suite arithmétique – Suite géométrique :**

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_p + (n - p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs	$u_p + \dots + u_n = (n - p + 1) \left(\frac{u_p + u_n}{2} \right)$	$u_p + \dots + u_n = u_p \times \left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1} \right)$
a , b et c trois termes consécutifs	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$

➤ **Suite majorée, minorée, bornée :**

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique
• $(u_n)_{n \in I}$ est majorée par un nombre réel $M \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \leq M$
• $(u_n)_{n \in I}$ est minorée par un nombre réel $m \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \geq m$
• $(u_n)_{n \in I}$ est bornée si $(u_n)_{n \in I}$ est majorée et minorée

➤ **Monotonie d'une suite :**

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique
• $(u_n)_{n \in I}$ est croissante $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$
• $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$
• $(u_n)_{n \in I}$ est constante $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

➤ **Limite de la suite (n^α) avec $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:**

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$

➤ **Limite de la suite** $\left(q^n \right)$ avec $q \in \mathbb{R}$:

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
la suite $\left(q^n \right)$ n'admet pas de limite	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

➤ **Critère de convergence d'une suite :**

- Toute suite croissante et majorée est convergente
- Toute suite décroissante et minorée est convergente

$$\begin{cases} |u_n - \ell| \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$$

$$\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$$

$$\begin{cases} u_n \geq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

➤ **Suite de type**: $v_n = f(u_n)$

Si $(u_n)_{n \in I}$ une suite convergente de limite ℓ et si f une fonction continue en ℓ

Alors la suite (v_n) définie par: $v_n = f(u_n)$ est convergente de limite $f(\ell)$

➤ **Suite de type**: $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ où } f \text{ une fonction}$$

Si :

- f une f continue sur un intervalle I
- $f(I) \subset I$
- $a \in I$
- (u_n) une convergente

Alors : la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n \in I}$ est solution de l'équation : $f(x) = x$

Fonctions primitives

➤ Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

On dit que F est **une fonction primitive de f sur I** si :

- F est derivable sur I
- $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

➤ Existence et unicité des primitives:

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

Si f admet une primitive F sur un intervalle I , Alors toute fonction G définie sur I par : $G(x) = F(x) + k \quad (k \in \mathbb{R})$ est aussi une primitive de f sur I

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I

soit x_0 un élément de I et y_0 un réel, Il existe une seule primitive F de f sur I

vérifiant la condition $F(x_0) = y_0$

➤ Propriété de linéarité des primitives :

Si F et G des fonctions primitives respectives de f et g sur un intervalle I

et si k un réel, alors :

- $(F + G)$ est une fonction primitive de $(f + g)$ sur I
- kF est une fonction primitive de kf sur I

➤ **Formulaire: primitives des fonctions usuelles :**

$f(x)$	$F(x)$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
x^n ($n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$
e^x	$e^x + k$
$\sin x$	$\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$

➤ **Primitives des fonctions composés :**

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$
$u'(x) \times [u(x)]^n$ ($n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$)	$\frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + k$
$u'(x) \times e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$u'(x) \times \sin[u(x)]$	$-\cos[u(x)] + k$
$u'(x) \times \cos[u(x)]$	$\sin[u(x)] + k$

Calcul intégral

➤ Intégrale d'une fonction continue sur un segment :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$

L'intégrale de f de a à b est le nombre réel : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

➤ Propriétés :

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Linéarité: $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

$$(k \in \mathbb{R}) \quad \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

Relation de Chasles: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

➤ Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue sur segment $[a; b]$

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ est le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

➤ Intégrale et ordre :

si $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

si $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

➤ Intégration par parties :

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx$$

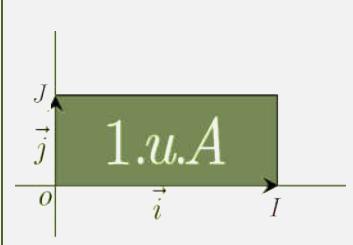
➤ Calcul d'aires :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j})

Soit I et J deux points tels que : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

L'unité d'aire, notée $u.A$, est l'aire du rectangle bâti à partir des points O , I et J

$$1.u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$



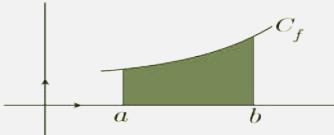
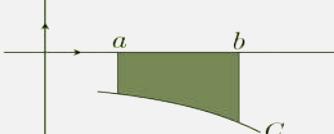
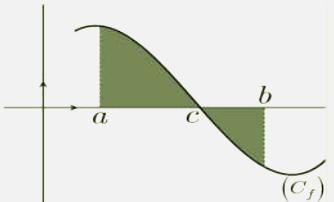
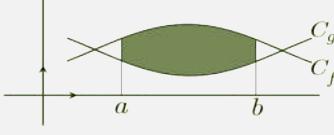
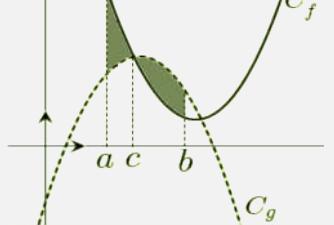
L'aire du domaine délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est:

$$\left(\int_a^b |f(x)| dx \right) . u.A$$

L'aire du domaine délimité par $(C_f), (C_g)$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est:

$$\left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) . u.A$$

➤ Cas particuliers :

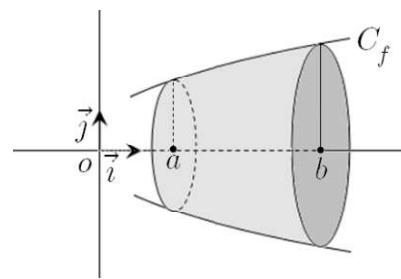
Figure illustrative	Remarque	L'aire du domaine hachuré sur la figure
	f est positive sur $[a; b]$	$\left(\int_a^b f(x) dx \right) . u.A$
	f est négative sur $[a; b]$	$\left(\int_a^b -f(x) dx \right) . u.A$
	<ul style="list-style-type: none"> f est positive sur $[a; c]$ f est négative sur $[c; b]$ 	$\left(\int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx \right) . u.A$
	(C_g) est au dessus de (C_f) sur $[a; b]$	$\left(\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \right) . u.A$
	<ul style="list-style-type: none"> (C_f) est au dessus de (C_g) sur $[a; c]$ (C_f) est au dessous de (C_g) sur $[c; b]$ 	$\left(\int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx \right) . u.A$

➤ Calcul de volumes :

Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe (C_f) sur $[a; b]$, un tour complet autour de l'axe des abscisses est:

$$V = \left[\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right] u.v$$

$u.v$: unité de volume



Fonctions logarithmes

➤ Fonction Logarithme népérienne :

- Définition :

La fonction **logarithme népérien** est la primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$
sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 et notée **In**

- Conséquences et propriétés :

$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$
$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$		$\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(x^r) = r \ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$		

- Domaine de définition :

f une fonction numérique de la variable réelle x définie par :	Domaine de définition de f :
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) > 0\}$
$f(x) = \ln[(u(x))^2]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \neq 0\}$
$f(x) = \ln u(x) $	

- Limites usuelles :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} (\ln x) = -\infty$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} (x^n \ln x) = 0$	
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	

- Continuité :

La fonction In est continue sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I et si u est continue sur I

Alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est continue sur I

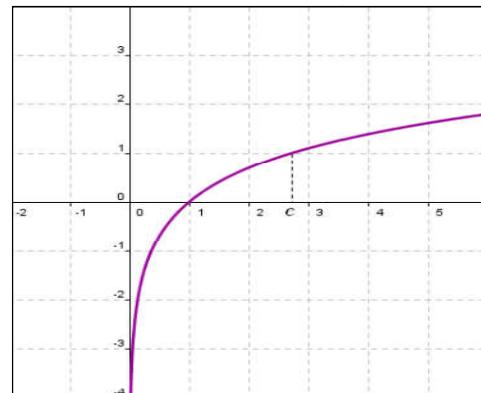
- **Dérivabilité :**

La fonction \ln est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$

et on a : $\forall x \in]0; +\infty[\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

- **Signe et représentation graphique de \ln :**

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+



➤ **Fonction Logarithme de base** $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

- **Définition :**

La fonction **logarithme de base** a est la fonction

définie par : $\forall x \in]0; +\infty[\quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

Cas particulier : si $a=10$, \log_a est le logarithme décimal. On le note \log

- **Conséquences et propriétés :**

$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$ $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ $\log_a(x^r) = r \log_a(x) \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$	$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$
	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$ $\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y$ $\log_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r$

$0 < a < 1$	$a > 1$
$\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x < y$	$\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x > y$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty$
$\forall x \in]0, +\infty[\quad [\log_a(x)]' = \frac{1}{x \ln a}$	

Fonctions exponentielles

➤ Fonction exponentielle népérienne :

- **Définition :**

La fonction **exponentielle népérienne**, notée \exp , est la fonction réciproque de la fonction \ln . On pose : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x$

- **Conséquences et propriétés :**

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad e^x \times e^y = e^{x+y}$
$\forall x \in]0, +\infty[\quad e^{\ln x} = x$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)^r = e^{rx} \quad (r \in \mathbb{Q})$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[$ $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{e^x} = e^{-x}$
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

- **Domaine de définition :**

f une fonction numérique de la variable réelle x définie par :	Domaine de définition de f :
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\}$

- **Limites usuelles :**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^n} \right) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n e^x) =$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$		

- **Continuité:**

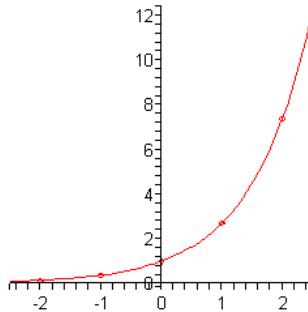
La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur l'intervalle \mathbb{R}
Si u est une fonction continue sur un intervalle I Alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est continue sur I

- **Dérivabilité :**

la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur \mathbb{R}
et on a: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(e^x \right)' = e^x$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I
alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I
et on a: $\forall x \in I \quad \left(e^{u(x)} \right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$

- **Représentation graphique de \exp :**



➤ **Fonction exponentielle de base $a \in]0; +\infty[$:**

- **Définition :**

La fonction exponentielle de base a est la fonction définie par :

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad a^x = e^{x \log(a)}$$

- **Conséquences et propriétés :**

$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad a^x \times a^y = a^{x+y}$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = e^{x \ln a}$ $\log_a(a^x) = x$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(a^x \right)^r = a^{rx} \quad (r \in \mathbb{Q})$	$\forall x \in]0; +\infty[\quad a^{\log_a(x)} = a$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{a^x} = a^{-x}$	$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[$ $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$

$0 < a < 1$	$a > 1$
$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$	$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	$\left(a^x \right)' = (\ln a) \times a^x$

Nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes est : $\mathbb{C} = \{z = a + ib / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

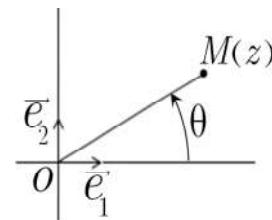
➤ Définition et propriétés :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe ou $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

- **La forme algébrique** du nombre complexe z est : $a + ib$.
- **La partie réelle** du nombre complexe z est : $Re(z) = a$.
- **La partie imaginaire** du nombre complexe z est : $Im(z) = b$.
- Le nombre complexe z est **imaginaire pur** si $Re(z) = 0$.
- **Egalité** de deux nombres complexes : $z = z' \Leftrightarrow Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$
- **Le conjugué** du nombre complexe z est : $\bar{z} = a - ib$
- **Le module** du nombre complexe z est : $|z| = \sqrt{zz} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **L'image** du nombre complexe $z = a + ib$ est le point $M(a, b)$, noté $M(z)$
- **L'affixe** du point $M(a, b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$, noté z_M
- **L'affixe** du vecteur $\vec{u}(a, b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$, noté $z_{\vec{u}}$
- **L'affixe** du vecteur \overrightarrow{AB} est le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- **L'argument** du nombre complexe non nul z est une mesure θ de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$
noté $\arg z$

on a $\arg z \equiv \theta [2\pi]$

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$$



- **La forme trigonométrique** du nombre complexe non nul z est :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = [r, \theta]$$

$$\text{avec } r = |z| \quad \text{et} \quad \arg z \equiv \theta [2\pi]$$

$[r, \theta]$ est une écriture réduite du nombre complexe $r(\cos \theta + i \sin \theta)$

- **La forme exponentielle** du nombre complexe non nul z est : $z = re^{i\theta}$

$$\text{avec } r = |z| \quad \text{et} \quad \arg z \equiv \theta [2\pi]$$

➤ **Propriétés:**

	Conjugué	Module	Argument
Opposé	$\overline{-z} = -\bar{z}$	$ -z = z $	$\arg(-z) \equiv (\pi + \arg z)[2\pi]$
Conjugué	$\overline{\bar{z}} = z$	$ \bar{z} = z $	$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z[2\pi]$
Produit	$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$	$ z \times z' = z \times z' $	$\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$
Puissance	$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$	$ z^n = z ^n$	$\arg(z^n) \equiv n \arg z [2\pi]$
Inverse	$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$	$\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z[2\pi]$
Quotient	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$	$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z')[2\pi]$
Somme	$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$		

	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
Opposé	$-\llbracket r, \theta \rrbracket = \llbracket r, \pi + \theta \rrbracket$	$-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
Conjugué	$\overline{\llbracket r, \theta \rrbracket} = \llbracket r, -\theta \rrbracket$	$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
Produit	$\llbracket r, \theta \rrbracket \times \llbracket r', \theta' \rrbracket = \llbracket rr'; \theta + \theta' \rrbracket$	$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
Puissance	$\llbracket r, \theta \rrbracket^n = \llbracket r^n; n\theta \rrbracket$	$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$
Inverse	$\overline{\llbracket r; \theta \rrbracket} = \llbracket \frac{1}{r}; -\theta \rrbracket$	$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$
Quotient	$\overline{\llbracket r; \theta \rrbracket} = \llbracket \frac{r}{r'}; \theta - \theta' \rrbracket$	$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ • $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)$ • $zz = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2$ • $z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ • $\forall k \in \mathbb{Z} \quad \llbracket r, \theta + 2k\pi \rrbracket = \llbracket r, \theta \rrbracket$ | <ul style="list-style-type: none"> • z est réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$ • z est réel $\Leftrightarrow \arg z = k\pi / k \in \mathbb{Z}$ • z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$ • z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ |
|--|---|

➤ **Formule de Moivre :**

$$(cos\theta + i \sin\theta)^n = cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

➤ **Formule d'Euler :**

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \sin\theta &= \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

➤ **Équations du second degré à coefficients réels :**

L'équation :		Ensemble de solution:
$z \in \mathbb{C}$ $az^2 + bz + c = 0$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$	$\Delta > 0$	$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
	$\Delta = 0$	$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$
	$\Delta < 0$	$S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$

➤ **Nombres Complexes et géométrie:**

Notion complexe :	Notion géométrique :
$AB = z_B - z_A $	la distance AB
$ z - z_A = r \quad (r > 0)$	<ul style="list-style-type: none"> • $AM = r$ • M appartient au cercle de centre A et de rayon r
$ z - z_A = z - z_B $	<ul style="list-style-type: none"> • $AM = BM$ • M appartient à la médiatrice de $[AB]$
$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$	l'milieu de $[AB]$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$	A, B et C trois points alignés
$\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \equiv arg \left(\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$	mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right)$

➤ **Nature d'un triangle:**

Nature du triangle ABC	
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	ABC est un triangle rectangle en A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$	ABC est un triangle isocèle en A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	ABC est un triangle isocèle et rectangle en A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3} \right]$	ABC est un triangle équilatéral

➤ **Écritures complexes des transformations du plan:**

Transformations:	Écriture complexe :
Translation de vecteur \vec{u}	$z' = z + z_{\vec{u}}$
Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

➤ **Reconnaitre une translation, une homothétie ou une rotation à partir de leurs expressions complexes :**

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Soit $M'(z')$ l'image d'un point $M(z)$ par une transformation F

L'expression complexe du transformation F	Nature du transformation F	
$a = 1$	F est une translation → de vecteur u d'affixe $z_u = b$	
$z' = az + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ $(a \neq 0)$	$a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$	F est une homothétie de rapport a et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ (ω vérifie la relation : $\omega = a\omega + b$)
	$a \in \mathbb{C} - \{1\}$ avec $ a = 1$	F est une rotation d'angle : $\theta \equiv \arg a [2\pi]$ et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ (ω vérifie la relation : $\omega = a\omega + b$)

Equations différentielles

- **Résolution de l'équation différentielle :** $y' = ay + b$

Equation différentielle	Solution générale de l'équation différentielle
$y' = ay + b \quad (a \neq 0)$	$y(x) = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

- **Résolution de l'équation différentielle :** $ay'' + by' + cy = 0$

Equation différentielle	Equation caractéristique	L'équation caractéristique admet	Solution générale de l'équation différentielle
$ay'' + by' + cy = 0$	$ar^2 + br + r = 0$	$\Delta > 0$	Deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2
		$\Delta = 0$	Une solution réelle unique r
		$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées $r_1 = p - iq$ et $r_2 = p + iq$

Dénombrement

➤ Cardinal d'un ensemble :

Soit E un ensemble fini

Le **cardinal** de E est le nombre d'éléments de E , on le note $\text{card } E$

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$$

➤ Principe fondamental du dénombrement :

Soit une expérience peut être réalisée en p choix ($p \in \mathbb{N}^*$)

Si le premier choix peut être réalisé en n_1 façons différentes

et le second choix peut être réalisé en n_2 façons différentes

.

.

.

et le p -ème choix peut être réalisé en n_p façons différentes

alors le nombre façons différentes de réaliser cette expérience

est **le produit**: $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$

➤ Les nombres : $n!$, A_n^p et C_n^p

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$	
$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$	$C_n^p = C_n^{n-p}$
$C_n^n = 1$	$C_n^{n-1} = n$

➤ Types de tirages :

On tire p objets parmi n objets

Type de tirage:	Nombre de tirages possible est :	L'ordre :
simultané	C_n^p ($p \leq n$)	n'a pas d'importance
Successif avec remise	n^p	est important
Successif sans remise	A_n^p ($p \leq n$)	est important

Probabilités

➤ Probabilités d'un ensemble fini:

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaire qui le composent, on la note $p(A)$

➤ Propriétés :

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire

Probabilités:	L'événement:
A	$0 \leq p(A) \leq 1$
\bar{A}	$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
$A \cup B$	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (A et B sont incompatibles)

S'il y a équiprobabilité alors pour tout événement A de Ω , on a:

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}}$$

➤ Loi d'une variable de probabilité aléatoire:

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire

Pour définir la loi de probabilité de la variable X sur Ω on suit les étapes suivantes :

- 1) On détermine $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X
- 2) On calcule pour chaque valeur x_i sa probabilité $p_i = p(X = x_i)$ avec $i \in \{1; 2; \dots; n\}$
- 3) On résume la loi de probabilité de la variable X par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

➤ Probabilité conditionnelle :

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire tel que: $p(A) \neq 0$

La probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé est le nombre :

$$p_A(B) = p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

➤ Événements indépendants :

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

➤ **L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire:**

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau suivant:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

<i>L'espérance mathématique de la variable X</i>	$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \dots + x_n \times p_n$
<i>La variance de la variable X</i>	$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
<i>L'écart-type de la variable X</i>	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

➤ **Epreuve répétée :**

Soit p la probabilité d'un événement A , lors d'une expérience aléatoire si on répète n fois l'épreuve dans des conditions identiques alors la probabilité de réalisation de A exactement k fois durant les n épreuves est :

$$C_n^k (p)^k (1-p)^{n-k} \quad (k \leq n)$$

➤ **Loi binomiale :**

Soit p la probabilité d'un événement A , lors d'une expérience aléatoire on répète n fois l'épreuve dans des conditions identiques si la variable aléatoire X , égale au nombre de réalisation de A durant les n épreuves alors la loi de probabilité de la variable X est donnée par :

$$\forall k \in \{0; 1; 2; \dots; n\} \quad p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

On dit que la variable X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p et on a

$$E(X) = n \times p \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p)$$

Géométrie dans l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

➤ Expressions analytiques :

Soient $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ deux vecteurs

- **Produit scalaire :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$

- **Norme :** $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

- **Produit vectoriel :** $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \vec{k}$

➤ Aire d'un triangle :

L'aire d'un triangle ABC est: $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

➤ Distances :

La distance entre deux points A et B est:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

La distance du point M au plan (P) d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est:

$$d(M; (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

La distance du point M à la droite $\Delta(A, \vec{u})$ est: $d(M, (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

➤ Equation cartésienne d'un plan :

$\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal au plan $(P) \Leftrightarrow (P): ax + by + cz + d = 0$

Si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors les points A , B et C ne sont pas alignés

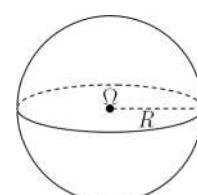
Dans ce cas : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) et l'équation cartésienne du plan (ABC) peut être déterminé à l'aide de l'équivalence suivante :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

➤ Equation cartésienne d'une sphère:

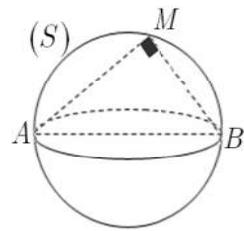
L'équation cartésienne d'une sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$



➤ **Ensemble des points M de l'espace vérifiant :** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

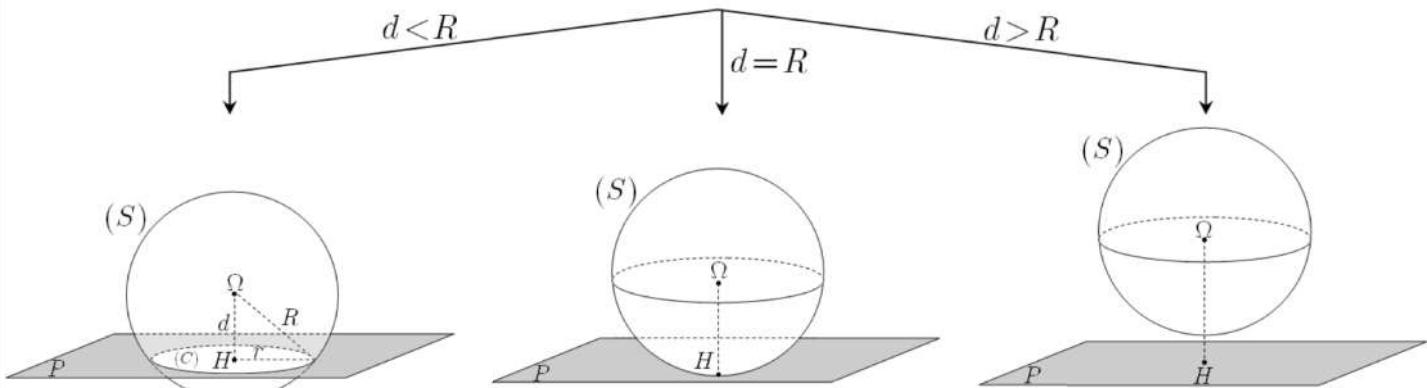
L'ensemble des points de l'espace vérifiant :
 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$



➤ **Intersection d'une sphère et d'un plan :**

Soit la sphère (S) de centre Ω et de rayon R et le plan (P)

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur le plan (P) . On pose : $d = \Omega H = d(\Omega; (P))$



(P) coupe (S) selon un cercle (C)
 de centre H
 et de rayon : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

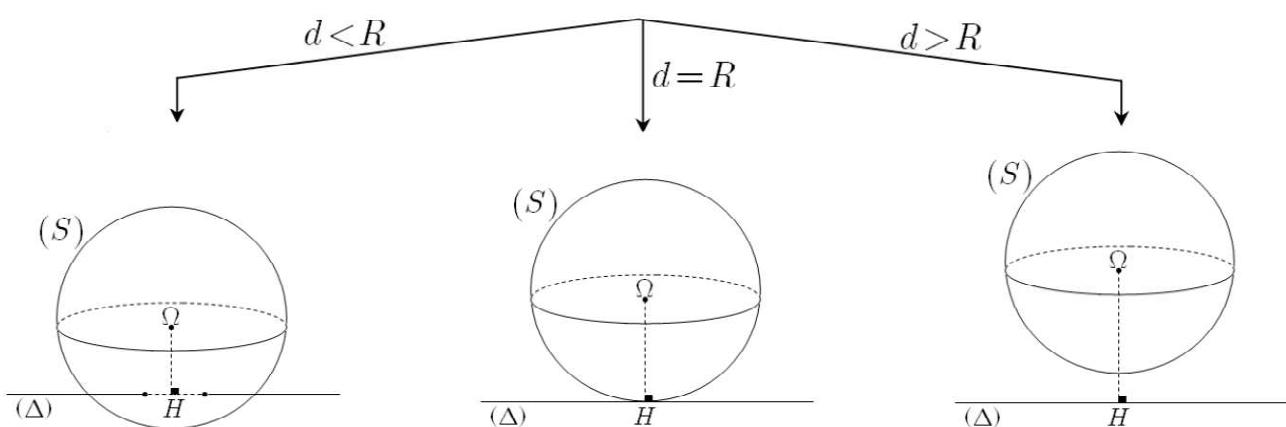
(P) est tangent à (S) en H

(P) ne coupe pas (S)

➤ **Intersection d'une sphère et d'une droite :**

Soit la sphère (S) de centre Ω et de rayon R et la droite (Δ) .

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur la droite (Δ) . On pose : $d = \Omega H = d(\Omega; (\Delta))$



(Δ) coupe (S) en deux points distincts

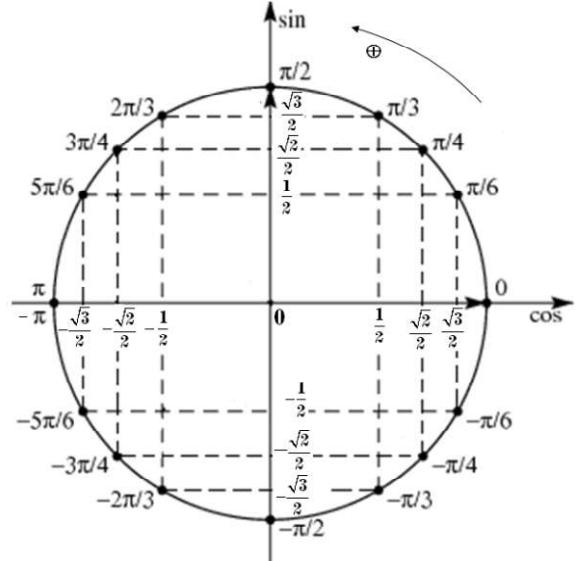
(Δ) est tangente à (S) en H

(Δ) ne coupe pas (S)

Trigonométrie

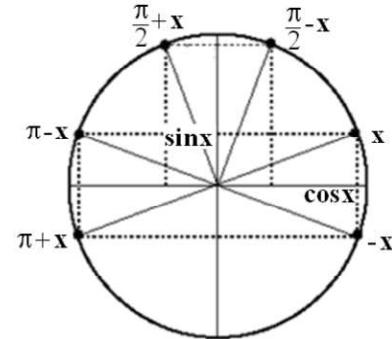
➤ Tableau des valeurs remarquables et cercle trigonométrique:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



➤ Les formules des angles associés :

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
\sin	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
\cos	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$



$-1 \leq \cos x \leq 1$ $-1 \leq \sin x \leq 1$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ $\tan(x + k\pi) = \tan x$
---	---	---

➤ Équations trigonométriques :

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$
- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = (\pi - a) + 2k\pi$
- $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

➤ **Formules d'addition :**

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \times \cos b - \cos a \times \sin b \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}\end{aligned}$$

➤ **Formules de duplication :**

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 a\end{aligned}$$

$$\sin 2a = 2\sin a \times \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\text{on pose: } t = \tan \frac{a}{2}$$

$$\sin a = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\tan a = \frac{2t}{1 - t^2}$$

➤ **Transformation des produits- transformation des sommes :**

$$\begin{aligned}\cos a \times \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \times \sin b &= -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)] \\ \sin a \times \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos a \times \sin b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin p - \sin q &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$

➤ **Transformation de :** $a \cos x + b \sin x \quad (a, b) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned}a \cos x + b \sin x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)\end{aligned}$$

$$\text{Avec } \alpha \text{ un réel tel que : } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$