Cours des mathématiques : 2 Bac science expérimental

Les exercices et les devoirs

Réalisé par : Younes AIT IDDIR

M

Younes AIT IDDIR
Pr. de mathématiques

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

LES LIMITES ET LA CONTINUITÉ :

1.1 Rappel :

1.1.1 Propriétés des limites :

a) Propriété 1 : les limites usuelles en + ∞ et en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

On général :$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$. et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \ ; \textit{si n est pair} \\ -\infty \ ; \textit{si n est impair} \end{cases}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

On a aussi : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

On général on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

b) Propriété 1 : les limites usuelles en 0

- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \ ; \textit{si n est pair} \\ -\infty \ ; \textit{si n est impair} \end{cases}$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Théorème

Soit f une fonction

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to a} = l$$

Ce théorème reste valable si $l \in \mathbb{R}$ ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Les formes indéterminées : " $\frac{0}{0}$ " ; " $\frac{\infty}{\infty}$ " ; "$(+\infty) + (-\infty)$" ; "$0 \times \infty$".

c) Propriété 3 : limite d'une fonction polynôme- limite d'une fonction rationnelle

Soient P et Q deux fonctions polynômes et $a \in \mathbb{R}$, alors on a :

• $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$; si $Q(a) \neq 0$: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$.

• Si ax^n et bx^m sont des termes de plus haut degré de P et Q respectivement (a,b $\in \mathbb{R}$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$) alors :

$\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\infty} ax^n$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^n}{bx^m}$.

d) Propriété 4 : Limites des fonctions irrationnelles

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$, avec $(\forall x \in [a; +\infty[)$: $f(x) \geq 0$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $l \geq 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

e) Propriété 5 : Limites des fonctions trigonométriques

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \ ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \ ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

f) Propriété 6 : Théorème de comparaison

Soit I un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ et $l \in \mathbb{R}$ et soient f ; u et v des fonctions définies sur I :

1). Si $\begin{cases} (\forall x \in I);\ f(x) \geq u(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty \end{cases}$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2). Si $\begin{cases} (\forall x \in I);\ f(x) \leq u(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty \end{cases}$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3). Si $\begin{cases} (\forall x \in I);\ u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l \end{cases}$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

4). Si $\begin{cases} (\forall x \in I);\ |f(x) - l| \leq u(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0 \end{cases}$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

Ces résultats restent valables, en $-\infty$ et en a ($a \in \mathbb{R}$) et à droite en a et à gauche en a.

1.1.2 La série des exercices $n^o 0$:

exercice 1 :

1) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to-\infty} x^4$; $\lim_{x\to+\infty} x^4$; $\lim_{x\to-\infty} x^5$; $\lim_{x\to+\infty} x^5$

b) $\lim_{x\to-\infty} x^{200}$; $\lim_{x\to+\infty} x^{200}$; $\lim_{x\to-\infty} x^{201}$; $\lim_{x\to+\infty} x^{201}$

2) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4}$ b) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}$; ; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \text{ ; } x > 1 \\ \\ f(x) = \dfrac{1}{2x+2} \text{ ; } x \leq 1 \end{cases}$$

1) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

2) Est que la fonction f admet une limite en 0 ?.

Exercice 3 :

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2+\sin(x)}{x}$

a) Montrer que

$(\forall x > 0) : \dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{3}{x}$

b) En déduire : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{\cos(x)-x+1}{x}$

a) Montrer que pour tout $x > 0$:

$-1 \leq g(x) \leq \dfrac{2}{x} - 1$

b) En déduire : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

Exercice 4 : Calculer les limites suivantes :

(1). $\lim_{x\to+\infty} -3x\sqrt{x+1}$ (2). $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x+1}-2\sqrt{x-1}$ (3). $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1}-x$

(4). $\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+1}$ (5). $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-2x$ (6). $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+1}+2x-1$

(7). $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$ (8). $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x}+x$

Exercice 5 : Calculer les limites :

(1). $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}$ (2). $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{3x}$ (3). $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\tan(x)}$ (4). $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\tan^2(x)+2}$

(5). $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan(x)}$ (6). $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x)-\cos(x)}{\sin(3x)+\sin(x)}$ (7). $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$ (8). $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(9). $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (1-\sin(x))\tan(x)$ (10). $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x)$ (11). $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(5x)\cdot\tan(2x)}$ (12). $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

Exercice 6 : Calculer les limites suivantes :

(1). $\lim\limits_{x\to 2} x^2+2x+3$ (2). $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2+2x+3}$ (3). $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2+2x+3}$ (4). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

Exercice 7 : Calculer les limites suivantes :

(1). $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ (2). $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$ (3). $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|2-x|}{x^2-4}$ (4). $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x}$

(5). $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x+1}$ (6). $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^3+x^2+x-1}{x^2+x-2}$

(7). $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+12}-3}{x^2-9}$ (8). $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ (9). $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$ (10). $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2-x}{(x-3)^2}$

Exercice 8 : Calculer les limites suivantes :

(1). $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-x+5}{x-3}$ (2). $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-2x^2+x+1}{5x^4+x-8}$ (3). $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-4x+3}{x^2+x+1}$

(4). $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x+3}$ (5). $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{|1-x^2|}{x-6}$ (6). $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Exercice 9 :

Calculer les limites suivantes :

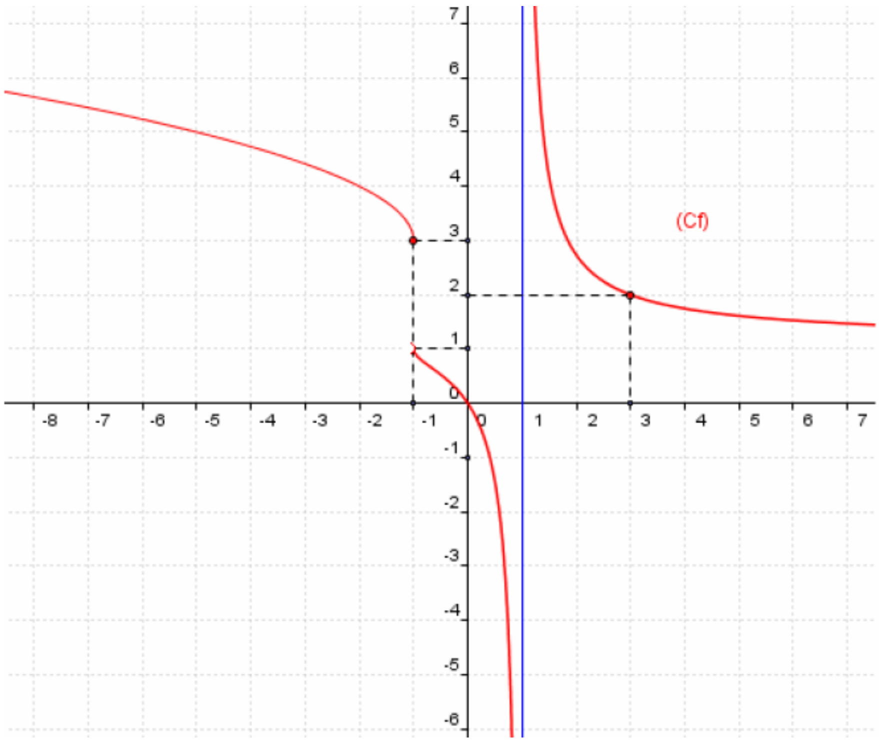
(1). $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-3}{x-2}$ (2). $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+2}{x^2+x-2}$ (3). $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x}{x^2+x-2}$ (4). $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+2}{x^2-x-2}$

1.2 La continuité en un point- la continuité sur un intervalle

1.2.1 La continuité en un point

Activité

Considérons la fonction f dont la représentation graphique (C_f) et le suivant :



1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to1^-} f(x)$; $\lim_{x\to1^+} f(x)$.
2. a) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to-1^+} f(x)$; $\lim_{x\to-1^-} f(x)$ et $f(-1)$

   b) Est-ce -que la courbe (C_f) est continue en le point d'abscisse -1.
3. a) Calculer $f(3)$ et $\lim_{x\to3} f(x)$

   b) Est-ce -que la courbe (C_f) est continue en le point d'abscisse 3.

Définition :

Définition 1.1
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, et $x_0 \in I$.
On dit que la fonction f est continue en x_0 si : $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Exercice :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} \; ; \quad x \neq 1 \\ \\ f(1) = 2 \end{cases}$

Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 1$.

1.2.2 La continuité à droite et la continuité à gauche en un point

Définition :

Définition 1.2
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0; x_0 + r[$ avec $r > 0$.
• On dit que f est continue à droite en a si : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - r; x_0]$ avec $r > 0$.
• On dit que f est continue à gauche en x_0 si : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Propriété :

Proprieté 1.1
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite en x_0 et à gauche en x_0 et
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x) + 1 \; ; \quad x < 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 5} - 2 \; ; \quad x > 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

1). Étudier la continuité de la fonction f à gauche en 2.
2). Étudier la continuité de la fonction f à droite en 2.
3). Est-ce-que la fonction f est continue en 2.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+3} \; ; \quad x > 1 \\ f(x) = x + 1 \; ; \quad x \leq 1 \end{cases}$$

1). Étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 1$.

1.2.3 La continuité sur un intervalle :

Définition :

Définition 1.3
• On dit que f est continue sur un intervalle ouvert $]a; b[$ si f est continue en chaque élément de $]a; b[$
• On dit que f est continue sur un intervalle fermé $[a; b]$ si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ et f est continue à droite en a et à gauche en b

Remarque :
De la même manière on définie la continuité sur $[a; b[$ et sur $]a; b]$ et sur $]-\infty; b]$ et sur $[a; +\infty[$.

1.2.4 La continuité des fonctions usuelles :

Propriétés :

Proprieté 1.2

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle inclue dans son domaine de définition.
- les fonction cos, sin et $x \mapsto |x|$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction tan est continue sur chaque intervalle inclue dans $D_{tan} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \;\; k \in \mathbb{Z}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto x^n$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

1.3 La fonction de la partie entier :

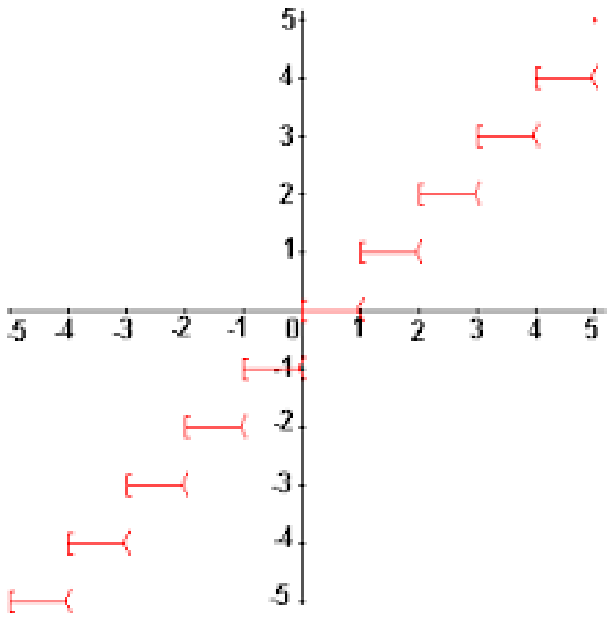
Définition 1.4
On appel la fonction de la partie entier c'est la fonction qui est associe chaque élément x de $\mathbb{R}$ l'unique élément de $\mathbb{Z}$ qui vérifier : $n \leq x < n+1$ ou $n-1 < x \leq n$.

Exemples :

$E(2,1) = 2\,; \quad E(-2.1) = -3 \quad E(15) = 15\,; \quad E(5.7) = 5.$

Résultats :

- $E(x) \leq x < E(x) + 1$



- La fonction de la partie entier est continue à droite en n et non continue à gauche en n.
- La fonction de la partie entier est continue sur $[n; n+1[$.
- La fonction de la partie entier est non continue en n.
- $(\forall k \in \mathbb{Z}) : \quad E(x+k) = E(x) + k$.

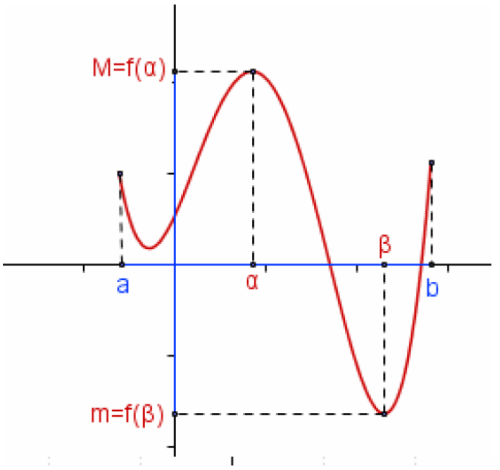
1.4 L'image d'un intervalle par une fonction continue :

1.4.1 l'image d'un intervalle - l'image d'un segment :

Proprieté 1.3
• L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
• L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque :

Si f est continue sur $[a;b]$ alors il existe α et β de $[a;b]$ tel que :
• $m = f(\beta) = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ la valeur minimale de f sur $[a;b]$.
• $M = f(\alpha) = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ la valeur maximale de f sur $[a;b]$. et $f([a;b]) = [m;M]$.



1.4.2 l'image d'un intervalle par une fonction strictement monotone :

Soit f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, Le tableau suivant illustre les différents cas possibles de l'intervalle $f(I)$:

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a,b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;6]$, sa représentation graphique est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		6
Variation de f	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2

Déterminer les images des intervalles suivantes : $f([-1;1])$; $f(]1;6])$; $f(]-\infty;1[)$ et $f(]-\infty;6])$.

1.5 Les opérations sur les fonctions continues

1.5.1 Théorème :

Théorème 1.1
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{R}^*$.
Les fonctions $f+g$; $f \times g$; $k \cdot f$ et $|f|$ sont continues sur I.
Si $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continue sur I.

Exemples :

La fonction $x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ comme produit de deux fonctions continues.
La fonction $x \mapsto -\frac{2}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ comme produit d'une fonction continue et d'un scalaire, donc $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x} - \frac{2}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ comme somme de deux fonction continues.

1.5.2 Composée de deux fonctions continues :

Théorème 1.2
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$ et g une fonction continue sur un intervalle J et $f(I) \subset J$.
Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ alors gof est continue en a.
Si f est continue sur l'intervalle I et g est continue sur l'intervalle $f(I)$ alors gof est continue sur I.

Conséquences :

Soit I un intervalle ouvert et $a \in I$.
Si f est une fonction positive sur I et continue en a alors $\sqrt{f}$ est continue en a.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[$ par : $f(x) = \sqrt{1-x}$.
1). Exprimer f comme la composée de deux fonctions usuelles.
2). Étudier la continuité de f sur $]-\infty;0[$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
1). Exprimer f comme la composée de deux fonctions usuelles.
2). Étudier la continuité de f sur $]-\infty;0[$.

Conséquences :

• Si f est continue et positive sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.
• Si f est continue sur I alors $\cos(f)$ et $\sin(f)$ sont continues sur I.

Exercice :

Montrer que la fonction f est continue sur I dans les cas suivantes :

1) $f(x) = \sqrt{x-2}$; $I = [2;+\infty[$

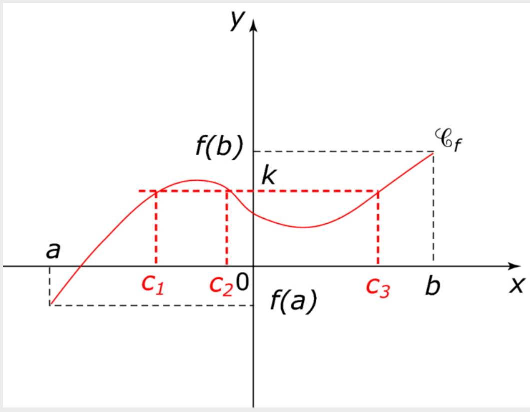
2) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

3) $f(x) = \sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

1.6 Théorème des valeurs intermédiaires

1.6.1 Théorème :

Théorème 1.3
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a;b]$ tel que : $f(c) = k$



• Si f est strictement monotone alors c est unique.

Cas particulier : Si f change de singe sur $[a;b]$ (par exemple si $f(a) \cdot f(b) < 0$) alors il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x^3 - x - 1$
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0;1]$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x^3+5x-1}{x^2+1}$

1) Déterminer $f(1)$ et $f(2)$

2) En déduire que $f(x) = 4$ admet au moins une solution sur $[1;2]$

Remarques :

Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique pour les intervalles : $[a;+\infty[$ et $]-\infty;b]$ ainsi que pour $]a;+\infty[$ et $]-\infty;b[$ et même pour $\mathbb{R}$, en utilisant éventuellement les limites aux bornes des ces intervalles.

1.6.2 Méthode de dichotomie (Calcul approché des solutions d'une équation) :

a) activité :

Soit f la fonction définie sur $[1;3]$ par : $f(x) = x^3 + x - 3$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution c sur l'intervalle $]1;3[$.
2) Vérifier que 2 est le centre de l'intervalle $[1;3]$ et calculer $f(2)$ et en déduire que $1 < c < 2$.
3) Calculer $f(1,5)$ en déduire un autre encadrement de c.
4) Donner une approximation de c sur un intervalle d'amplitude $0,25$.

b) Méthode de dichotomie

Considérons une fonction f strictement croissante sur $[a;b]$ et l'équation $(E) : f(x) = 0$
L'objectif de cette méthode et de trouver une approximation de la solution c de (E) sur $[a;b]$.

- Si $f(a) = 0$ alors a est la solution demandée.
- Si $f(b) = 0$ alors b est la solution demandée.
- Supposons que $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors $c \in]a;b[$.

1^{er} étape : On divise l'intervalle $[a;b]$ en deux intervalles $[a;m]$ et $[m;b]$ de même amplitude $m = \dfrac{a+b}{2}$ étant le milieu de $[a;b]$.

2^{me} étape : On calcule $f(m)$.

1^{er} cas : Si $f(m) = 0$ alors m est la solution demandé.

2^{eme} cas : Si $f(m) > 0$ alors $f(a) \cdot f(m) < 0$ donc $c \in]a;m[$

3^{eme} cas : Si $f(m) < 0$ alors $f(b) \cdot f(m) < 0$ donc $c \in]m;b[$

$\vdots$

Exercice :

1) Montrer que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet une solution α unique sur $[1;2]$.
2) Donner une approximation du nombre α à la précision $0,25$.

1.7 Fonction réciproque

a) Propriétés :

Proprieté 1.4
Si f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors pour $y \in J = f(I)$: l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution sur I.

Définition 1.5
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et soit $J = f(I)$.
• La fonction réciproque de la fonction f est la fonction noté f^{-1} définie de $f(I)$ vers I qui à chaque élément $y \in J = f(I)$ associé l'unique élément $x \in I$ tel que $y = f(x)$. et on a $f^{-1}(y) = x$

b) Remarques :

$(\forall x \in I)(\forall y \in J) : f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

c) Exemple :

La fonction f définie par : $f(x) = 2x+1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Donc la fonction f admet une fonction réciproque de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; sa fonction réciproque est :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y \quad &\Rightarrow \quad f(y) = x \\ &\Rightarrow \quad 2y-1 = x \\ &\Rightarrow \quad y = \frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

et donc $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

d) Exercice :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x-2}$

1) Montrer que f est continue et strictement monotone sur $I = [2;+\infty[$
2) En déduire que f admet une fonction réciproque sur $f(I)$ qu'elle faut déterminer.
3) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in f(I)$.

e) Autres propriétés de la fonction réciproque :

Activité :

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle J qu'il faut déterminer.
2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
3) Construire dans le même repère orthonormé la droite d'équation $(\Delta) : y = x$ et les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

Propriétés

Proprieté 1.5
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

- f^{-1} *est continue sur* $f(I)$.
- f *et* f^{-1} *ont les mêmes variations.*
- (C_f) *et* $(C_{f^{-1}})$ *sont symétriques par rapport à la droite d'équation* $y = x$ *dans un repère orthonormé.*
- $(\forall x \in I) : f^{-1}of(x) = x$
- $(\forall y \in J) : fof^{-1}(y) = y$

f) Rappel (La restriction d'une fonction)

Définition 1.6
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit J un intervalle inclus dans I :
si g une fonction définie sur J tel que : $(\forall x \in J) : f(x) = g(x)$,
alors on dit que g est la restriction de f sur J.

Proprieté 1.6
Si f est continue sur I alors la restriction g est continue sur J.

1.8 La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$:

1.8.1 Introduction :

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, la fonction f définie par : $f(x) = x^n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (La restriction d'une fonction polynôme) et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $(\forall a \in \mathbb{R}^+)$ l'équation $x^n = a$ admet une solution $c \in \mathbb{R}^+$ unique, appelée **racine** n^{eme} de a.

1.8.2 Définition :

Définition 1.7
Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$:
• $(\forall a \in \mathbb{R}^+)$, l'unique solution positive de l'équation $x^n = a$, noté $\sqrt[n]{a}$ est appelée racine n^{eme} de a ou la racine de rang n de a.
• La fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ noté $\sqrt[n]{\ }$ ou $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est appelée la fonction racine de rang n.

Remarques : Soit $a \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$; $\sqrt[1]{a} = a$ et $\sqrt[3]{a}$ est appelée aussi la racine cubique de a.

Exemple :

La fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}^+$ noté $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est appelée fonction racine de rang 3 ou (fonction racine cubique)

3) Propriétés :

Proprieté 1.7
• *La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.*
• $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^+) : b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$
• *La courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et celle de la fonction $x \mapsto x^n$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.*
• *Si f est une fonction positive et continue sur un intervalle I alors $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I.*

Exercice :

1) Résoudre les équations : $x^5 = 3$; $x^4 = 16$; $x^8 = -7$; $x^3 = -27$;
2) a) Résoudre l'équation $\sqrt[5]{3x - 6} = 2$
   b) Résoudre l'inéquation $\sqrt[6]{2x + 8} < 2$

4) Théorème Propriétés algébriques :

Théorème 1.4
Si f est une fonction positive sur un intervalle ouvert I et $a \in I$ et $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$
• Si $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = l \geq 0$ alors $\lim\limits_{x \mapsto a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$
• Si : $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \mapsto a} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$
▷ ces deux propriétés restent valables si $x \to +\infty$ *ou* $-\infty$ *ou* a^+ *ou* a^-

Proprieté 1.8
Soient $x;y \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $n;m \in \mathbb{N}^*$ *:*
• $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x}$ *et* $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n\cdot m]{x^m}$
• $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$ *et* $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$ *et* $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

Exercice 1 :

Simplifier les nombres suivantes : $a = \sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$; $b = \sqrt[8]{16}$ et $c = \sqrt[6]{27}$

Exercice 2 :

I) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{1-x^2}$ est continue sur $I = [-1;1]$.
II) Calculer les limites suivantes :
1) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \sqrt[3]{x^5 - 3x^2 + 7}$; 2) $\lim\limits_{x \mapsto 3} \sqrt[5]{x^2 + 23}$; 3) $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}$

5) Puissance rationnelles : x^r ; $r \in \mathbb{Q}^*$:

Définition 1.8
Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $r \in \mathbb{Q}^*$ ($r = \frac{p}{q}$; $p \in \mathbb{Z}^*$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$)
x^r *est le nombre* $\sqrt[q]{x^p}$ *c'est à dire* $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

Exemple :
$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$; $\sqrt{x^7} = x^{\frac{7}{2}}$; $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$

Proprieté 1.9
Soient x *et* y *deux éléments de* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $r;r' \in \mathbb{Q}^*$
• $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$ • $\dfrac{1}{x^r} = x^{-r}$ • $\dfrac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$ • $\dfrac{x^r}{y^r} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^r$ • $(x^r)^{r'} = x^{r\cdot r'}$ • $x^r \cdot y^r = (x \cdot y)^r$

Exercice :

1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ simplifier les expressions : a) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ b) $x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{1}{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

2) Simplifier le nombre : $A = \dfrac{\sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[6]{108}}{\sqrt[4]{6}}$

3) Donner l'ordre croissante des nombres : $a = \sqrt{5}$; $b = \sqrt[6]{80}$; $d = 3^{\frac{2}{3}}$ et $d = \sqrt[3]{16}$

1.8.3 La série des exercices $n^o 1$:

exercice 1 :

1). On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\tan(x)}{\sqrt{x+1}-1} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$
Montrer que f est continue en 0.
2). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2x}}{x-\sqrt{x}} & ; \quad x \neq 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$
Montrer que f est continue en 1.
3). Montrer que la fonction f définie par :
$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

exercice 2 :

On considère les deux fonctions f et g définies respectivement su $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{4x+1}{5-x} & ; \quad x \leq 2 \\ f(x) = \dfrac{x^3-3x-2}{3(x-2)}; & x > 2 \end{cases}$$
et $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|} & ; \quad x \neq 1 \\ g(1) = 2 \end{cases}$
1). Étudier la continuité de f en 2.
2). Étudier la continuité de g en 1.

exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1} & ; \quad x < 1 \\ f(1) = 3 \\ f(x) = \dfrac{mx-3}{x-1} & ; \quad x > 1 \end{cases}$$
1). Montrer que est continue a gauche en 1.
2). Déterminer la valeur de m sachant que f est continue en 1.

exercice 4 :

Montrer que la fonction f définie par :
$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1} & ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

exercice 5 :

1). Montrer que l' équation $\sqrt{x^3+8x+1} = 2$ admet au moins une solution dans $[0;2]$.
2). Montrer que l' équation $1+\sin(x)-x = 0$ admet une unique solution dans $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.
3). Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3+x-1$.
 a). Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α sur $\mathbb{R}$.

b). Montrer que $\alpha \in]0;1[$.

exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par :
$f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$.
1). Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} sur l'intervalle J que l'on déterminera.
2). Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x dans J.

exercice 7 :

1). Montrer que l'équation $2x^3+5x=4$ admet une unique solution α dans $[-1;1]$.
2). En utilisant la méthode de dichotomie donner un encadrement de α d'amplitude 0.25.

exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $I=[\frac{1}{4};+\infty[$ par :
$f(x)=2x^2-x+1$
Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} sur l'intervalle J que l'on déterminera, et déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x dans J.

exercice 9 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
1). $x^6-3=0$; 2). $x^3+7=0$; 3). $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}=0$.
4). $\sqrt[3]{2+x}+\sqrt[3]{2-x}=\sqrt[3]{4}$; 5). $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=\sqrt[6]{x}$.

exercice 10 :

Calculer les limites suivantes :
1). $\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x+1}-1}$; 2). $\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$; 3). $\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}$.
4). $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x-\sqrt[3]{x^3+x^2}$; 5). $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$; 6). $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$.

exercice 11 :

1). Donner l'ordre croissant des nombres suivantes :
$\sqrt{5}$; $\sqrt[12]{4}$; $\sqrt[6]{3}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[4]{36}$.
2). Montrer que : $\dfrac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}\times\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[4]{2^3}\times\sqrt[12]{2}}=1$.

exercice 12 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$
1). Déterminer D_f et étudier la continuité de f sur D_f.
2). Montrer que f est croissante sur D_f.
3). En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur l'intervalle J que l'on déterminera.
4). Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x dans J.

exercice 13 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et a et b deux élément de $]0;1[$ avec $f(a)=0$ et $f(b)=1$.
Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins un solution sur $]0;1[$.

CHAPITRE 2

LA DÉRIVATION :

2.1 Rappel :

2.1.1 Activités :

Activité 1 :

Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) = x^2$ est dérivable en 1. et déterminer $f'(1)$.

Activité 2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x+1}$

1) Déterminer $f'(0)$ le nombre dérivée de la fonction f en 0.
2) Déterminer une approximation affine au voisinage de 0 de la fonction f.
3) En déduire des valeurs approchées de : $\sqrt{0.998}$ et $\sqrt{1.003}$

Activité 3 :

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = |x|$ et $g(x) = \sqrt{x}$

1) Étudier la dérivabilité de f en 0 et donner l'interprétation géométrique de ce résultat.
2) Étudier la dérivabilité de g en 0 à droite l'interprétation géométrique de ce résultat.

2.1.2 Résumer (Déjà Donné)

Définition :

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. On dit que f est **dérivable** en a s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que : $\lim_{x \mapsto a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$. Le réel l s'appelle le nombre dérivé de f en a qu'on note : $f'(a)$.

La dérivabilité en un point - Interprétation géométrique du nombre dérivé

La limite	La dérivabilité	Interprétation géométrique
$\lim\limits_{x\mapsto a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$	f est dérivable en a et on a : $f'(a)=l$	(C_f) admet une tangente d'équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ au point $A(a;f(a))$.
$\lim\limits_{x\mapsto a^\pm} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$	f n'est pas dérivable en a.	(C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x=a$ au point $A(a;f(a))$.
$\lim\limits_{x\mapsto a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$	f est dérivable à droite en a et on a : $f'_d(a)=l$	(C_f) admet une demi-tangente au point $A(a;f(a))$ d'équation $y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$ et $x\geq a$.
$\lim\limits_{x\mapsto a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$	f est dérivable à gauche en a et on a : $f'_g(a)=l$	(C_f) admet une demi-tangente au point $A(a;f(a))$ d'équation $y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$ et $x\leq a$.

Propriété : f est dérivable en $a \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite en a et à gauche en a et $f'_d(a)=f'_g(a)$.

Définition : (la fonction dérivée)- (la fonction dérivée d'ordre n)

- On dit que f est dérivable sur un intervalle ouvert I si f est dérivable en tout point de I.
- On dit que f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a;b]$ si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ et f est dérivable à droite en a et à gauche en b.
- Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I, alors la fonction dérivée de f noté f' est définie de I vers $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

- si f est dérivable n fois sur l'intervalle I ($n\in\mathbb{N}^*$) alors la fonction dérivée de f d'ordre n noté $f^{(n)}$:

$$\begin{array}{rcl} f^{(n)} : I & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f^{(n)}(x) \end{array}$$

Propriété : (Dérivabilités des fonction usuelles)

- Les fonction $x\mapsto \sin$ et $x\mapsto \cos$ et les fonctions **polynômes** sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction **rationnelle** est dérivable sur tout intervalle de son ensemble de définition.
- la fonction $x\mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ • la fonction $x\mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.
- Si f est **dérivable** et **strictement positive** sur un intervalle I alors la fonction $x\mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur I.

★ Dérivabilité des fonction usuelles :
.

la fonction f	D_f	la fonction f'	$D_{f'}$
$x\mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x\mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto ax$	$\mathbb{R}$	$x\mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$x\mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$x\mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x\mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$x\mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x\mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x\mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x\mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$

★ Les opérations sur les fonctions dérivables :
Soient f est g deux fcts dérivable sur un interv I

la fonction	la fonction dérivée	la condition
$f+g$	$f'+g'$	....
$f\times g$	$f'\cdot g+f\cdot g'$	....
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$	$g(x)\neq 0$ sur I
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$	$g(x)\neq 0$ sur I
$a\cdot f$	$a\cdot f'$	....
f^n	$n\cdot f'\cdot f^{n-1}$	......
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$f>0$ sur I
$x\mapsto f(ax+b)$	$x\mapsto a\cdot f'(ax+b)$	....

Exercice 1 :

Étudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée dans chacune des cas suivantes :
1) $f(x) = x^3 + x^2 + 3x$; $I = \mathbb{R}$
2) $f(x) = (2x+1)(3x+4)$; $I = \mathbb{R}$
3) $f(x) = \dfrac{5x+1}{x+2}$; $I =]-2;+\infty[$ ou $]-\infty;-2[$
4) $f(x) = \sqrt{2x+6}$; $I =]-3;+\infty[$
5) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$; $I = \mathbb{R}$
6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $I = \mathbb{R}$
7) $f(x) = (x^3+x^2+3x)^6$; $I = \mathbb{R}$
8) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$; $I = \mathbb{R}$
9) $f(x) = x^3 + \sin(x)$; $I = \mathbb{R}$
10) $f(x) = \tan(x)$; $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
11) $f(x) = \tan^8(x)$; $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 2 :

Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivantes :
1) $f(x) = x^2 - 4x$
2) $f(x) = x^3 - 3x$
3) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$
4) $f(x) = \dfrac{-3x}{x^2+x+1}$

Exercice 3 :

Déterminer la fonction dérivée seconde de la fonction f dans les cas suivantes :
1) $f(x) = x^3 + 5x^3 + 6x$; 2) $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$; 3) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

2.2 La continuité et la dérivabilité :

Théorème 2.1
Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$, si f est dérivable en a, alors f et continue en a.

Remarque : La réciproque est fausse par exemple la fonction $f : x \mapsto |x|$ et continue en 0 mais non dérivable en 0. $(f'_d(0) \neq f'_g(0))$

Conséquences :

Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

2.3 La composé de fonctions dérivables :

Proprieté 2.1
Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$, et g une fonction définie sur un intervalle J avec $f(I) \subset J$.
• Si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$ alors gof est dérivable en a.
• Si f est dérivable sur I et g dérivable sur $f(I)$ alors gof est dérivable sur I, et on a :
$(\forall x \in I) : (gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

Exemple :

Étudions la dérivabilité de la fonction définie par : $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
on a : $h(x) = gof(x) = g(f(x))$ avec $g(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = x^2+1$
• on a la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme)
• $f(I) = f(\mathbb{R}) = [1;+\infty[\subset \mathbb{R}_+^* = J$
• La fonction g est dérivable sur $J = \mathbb{R}_+^*$
Alors la fonction gof est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$(\forall x \in \mathbb{R})\ (gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times (x^2+1)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

Conséquences :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I :

- Si f est dérivable et strictement positive sur I alors la fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \in I) : \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.
- Si f est dérivable sur I alors $x \mapsto (f(x))^n$ est dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on a : $(\forall x \in I) : (f(x)^n)' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x) \cdot$

Exercice :

Étudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto f(x) = \cos(\sqrt{x^2+1})$ et calculer la fonction dérivée.

2.4 La fonction réciproque d'une fonction dérivable :

Théorème 2.2
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
• Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et on a :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

• Si f est dérivable sur I et $(\forall x \in I : f'(x) \neq 0)$ alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a : $(\forall x \in f(I)) : (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = [1;+\infty[$
2) Calculer $f(\sqrt{3})$ et montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$

2.5 La dérivée des fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$:

Théorème 2.3
La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : (\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$

En effet : $(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \dfrac{1}{n \cdot x^{\frac{n-1}{n}}} = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Exemples : Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}_+^*$:
$x \mapsto \sqrt[3]{x}$; $x \mapsto \sqrt[4]{x}$; $x \mapsto \sqrt[5]{x}$; $x \mapsto \sqrt[6]{x}$; $x \mapsto \sqrt[7]{x}$; $x \mapsto \sqrt[2]{x}$

Théorème 2.4
Si f est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction :
$x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \in I) : \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$

En effet : $(\sqrt[n]{f(x)})' = \left(f(x)^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot f(x)^{\frac{1}{n}-1} \cdot f'(x) = \frac{1}{n} \cdot f(x)^{\frac{1-n}{n}} \cdot f'(x) = \dfrac{f'(x)}{n \cdot f(x)^{\frac{n-1}{n}}} = \dfrac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$

Exemples : Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur I et calculer $f'(x)$:
1). $x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$ $I = \mathbb{R}$. 2). $x \mapsto f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{-x+1}{x+1}}$ $I =]-1;1[$.
3). $x \mapsto f(x) = \sin(2x) \cdot \sqrt[5]{x^3+1}$; $I =]-1;+\infty[$. 4). $x \mapsto f(x) = \sqrt[2]{x^7}$; $I = \mathbb{R}_+^*$.

2.6 La dérivées des fonctions : $x \mapsto x^r$ et $x \mapsto f(x)^r$; $r \in \mathbb{Q}^*$

Soit $r \in \mathbb{Q}^*$:

Théorème 2.5
La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : (x^r)' = rx^{r-1}$

Exemples : Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}_+^*$:
$x \mapsto \sqrt[3]{x^4}$; $x \mapsto \sqrt[4]{x^7}$; $x \mapsto \sqrt[5]{x^3}$; $x \mapsto \sqrt[6]{x^3}$; $x \mapsto \sqrt[7]{x^5}$; $x \mapsto \sqrt[2]{x^9}$; $x \mapsto \cos(3x+1) \cdot \sqrt[2]{x^9}$

Théorème 2.6
Si f est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction
$x \mapsto (f(x))^r$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \in I) : (f(x)^r)' = r \cdot f(x)^{r-1} \cdot f'(x)$

Exemples : Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur I et calculer $f'(x)$:
1). $x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{(x^2+1)^5}$ $I = \mathbb{R}$. 2). $x \mapsto f(x) = \sqrt[4]{\left(\dfrac{-x+1}{x+1}\right)^3}$ $I =]-1;1[$.
3). $x \mapsto f(x) = \sin(2x) \cdot (x^3+1)^{\frac{2}{3}}$; $I =]-1;+\infty[$. 4). $x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt[2]{(2x+1)^7}}$; $I =]-\frac{1}{2};+\infty[$.

Exercice : (Calcule de la limite en utilisant le nombre dérivée) :
En utilisant le nombre dérivée, calculer les limites suivantes :
1). $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$; 2). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x^5 - x)^{100} - 1}{x - 1}$. ; 3). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$. ; 4). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1}$.
5). $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

2.6.1 La série des exercices $n^o 2$:

exercice 1 : (La dérivabilité en un point)

Étudier la dérivabilité de f en a dans chacune des cas suivantes :
1). $f(x) = x^2 + x$; $a = 1$
2). $f(x) = x^2 \cos(x)$; $a = 0$
3). $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = 2$
4). $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 2$.
5). $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$; $a = 1$.

---

exercice 2 : (Utilisation de nombre dérivée)

En utilisant le nombre dérivée, calculer les limites suivantes :
1). $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$; 2). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x^5 - x)^{100} - 1}{x - 1}$.

---

exercice 3 : L'équation de la tangente l'approximation affine - valeur approchée

Soit f la fonction définie par : définie par :
$f(x) = \sqrt[3]{x+2}$.
1). Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2). Déterminer le nombre dérivée de f en 0.
3). Trouver l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
4). Trouver une approximation affine de f au voisinage de 1.
5). Trouver les valeurs approchées des nombres :
$\sqrt[3]{2,001}$ et $\sqrt[3]{1,998}$.

---

exercice 4 :

1). Soit f la fonction $x \mapsto f(x) = |x^2 - 4|$.
a). Montrer que f est dérivable à droite en 2 et à gauche en 2 et déterminer $f'_d(2)$ et $f'_g(2)$.
b). En déduire que f n'est pas dérivable en 2.
2). Montrer que la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ n'est pas dérivable à droite en 0.

---

exercice 5 : (La fonction dérivée)

Étudier la dérivabilité de f et calculer la fonction dérivée dans chacune des cas suivantes :
1). $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$; 2). $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x + 1}$
3). $f(x) = \cos(2x + 3)$; 4). $f(x) = \sin(x^5 + 3x)$
5). $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$; 6). $f(x) = \tan(x)^{10}$.
7). $f(x) = \sqrt{2 - \sin(x)}$; 8). $\sqrt{-x^2 - x + 2}$.

---

exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :
$f(x) = x^2 - 2x$,
1). Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque définie sur $[-1; +\infty[$,
2). Calculer $f(4)$ et $f'(4)$, en déduire que f^{-1} est dérivable en 8 et calculer $(f^{-1})'(8)$.
3). Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1; +\infty[$.
4). Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [-1; +\infty[$.

---

exercice 7 : (La dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$)

Calculer la dérivée des fonction suivantes :
1). $x \mapsto \sqrt[3]{x}$; 2). $x \mapsto \sqrt[4]{x}$; 3). $x \mapsto \sqrt[5]{x}$
4). $x \mapsto \sqrt[6]{x}$; 5). $x \mapsto \sqrt[7]{x}$; 6). $x \mapsto \sqrt[8]{x}$

exercice 8 :

(La dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$)

Étudier la dérivabilité de f et calculer la fonction dérivée dans chacune des cas suivantes :
1). $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$; 2). $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{2-x}{2+x}}$
3). $f(x) = \sqrt[5]{x^2+2}$; 4). $f(x) = \sin(2x) \times \sqrt[4]{x^2+x}$
5). $f(x) = \sqrt[5]{x^2-3x+2}$; 6). $f(x) = \sqrt[7]{x+1}$.

exercice 9 :

(La dérivée de la fonction $x \mapsto x^r$; $r \in \mathbb{Q}^*$)

Calculer la dérivée des fonction suivantes :
1). $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$; 2). $x \mapsto \sqrt[4]{x^7}$; 3). $x \mapsto \sqrt[5]{x^{10}}$
4). $x \mapsto \sqrt[6]{x^3}$; 5). $x \mapsto \sqrt[7]{x^5}$; 6). $x \mapsto \sqrt[8]{x^3}$

exercice 10 :

(La dérivée de la fonction $x \mapsto u(x)^r$; $r \in \mathbb{Q}^*$)

Étudier la dérivabilité de f et calculer la fonction dérivée dans chacune des cas suivantes :
1). $f(x) = \sqrt[3]{(x^3+1)^5}$; 2). $f(x) = \sqrt[4]{(\dfrac{2-x}{2+x})^3}$
3). $f(x) = \sqrt[5]{(x^2+2)^9}$; 4). $f(x) = \sin(2x) \times \sqrt[4]{(x^2+x)^2}$
5). $f(x) = \sqrt[8]{(x^2-3x+2)^6}$; 6). $f(x) = \sqrt[7]{(x+1)^5}$.

exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0]$ par :
$f(x) = \sqrt[3]{1-x}$
1). Montrer que f est continue sur $]-\infty;0]$,
2). a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty;0]$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty;0]$,
b) En déduire que f est strictement décroissant sur $]-\infty;0]$,
3). En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J on déterminera,
4). Calculer $f(-7)$ et $f'(-7)$, en déduire que f^{-1} est dérivable en 2, et déterminer $(f^{-1})'(2)$,
5). Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Rappel :

la fonction f	D_f	la fonction f'	$D_{f'}$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^r \ (r \in \mathbb{Q}^*)$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sqrt{u(x)}$	$u \geq 0$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$u > 0$
$x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \ (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \quad = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sqrt[n]{u(x)} = u(x)^{\frac{1}{n}}$	$u \geq 0$	$x \mapsto \frac{1}{n}u(x)^{\frac{1}{n}-1}u'(x) \quad = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$	$u > 0$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$

2.6.2 Devoir libre $n^o 1$ S_1

Exercice 1

I) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1) Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donner le tableau de variations de la fonction g.
2) Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; 1]; g(x) < 0)$
3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que : $1 < \alpha < 2$
4) Donner une approximation du nombre α sur $]1;2[$ à la précision 0.25.
5) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$, (Résumer le signe de g dans un tableau).

II) Soit f la fonction définie sur : $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2) Montrer que : $\forall x \in]-1;+\infty[; f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x^3)^2}$
3) Donner le tableau de variations de la fonction f sur $]-1;+\infty[$
4) Montrer que : $f(\alpha) = \dfrac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$

Exercice 2

Étudier la dérivabilité de la fonction f et calculer la fonction dérivée dans chacune des cas suivantes :

1). $f(x) = (x^3+x)^8$; 2). $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$; 3). $f(x) = \cos(\sqrt{x^4+2})$; 4). $f(x) = \sqrt[4]{x^2-x}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$

1) Montrer que : $D_f = [1;+\infty[$.
2) Montrer que : $\forall x \in [1;+\infty[$: $f(x) > 0$
3) Déterminer : $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[1;+\infty[$, en déduire que f est décroissante sur $[1;+\infty[$
4) Montrer que : $\forall x \in [1;+\infty[$: $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$

5) a). Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J qu'elle faut déterminera.

b). Calculer $f(4)$ en déduire que f^{-1} est dérivable en $2-\sqrt{3}$ et déterminer $(f^{-1})'(2-\sqrt{3})$.

6) Montrer que : $\forall x \in J\ :\ f^{-1}(x) = \dfrac{x^4+2x^2+1}{4x^2}$.

Exercice 4 (Questions indépendantes)

1). Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que : $(\forall x \in I) : f(x) \neq 0$.
Montrer que $[(\forall x \in I) : f(x) < 0]$ ou $[(\forall x \in I) : f(x) > 0]$.

2). Calculer la limite : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-4}$.

3). Montrer que : a) $\dfrac{\sqrt[8]{64} \times 2^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[6]{72}}{\sqrt[4]{8} \times 3^{-\frac{2}{3}}} = 3$; b) $\dfrac{\sqrt[6]{81} \times 2^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[6]{36}}{2^{\frac{2}{3}} \times 3} = 1$

2.6.3 Correction du devoir libre $n^o 1$ S_1 :

Exercice 1 :

I) Soit g la fonction définie par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$,
1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme), et on a :
$(\forall x \in \mathbb{R}) : g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

Tableau de variation de la fonction g :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	0	+	
Variation de g	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2) D'après le tableau de variation de la fonction g on a : $(\forall x \in]-\infty;1] : g(x) \leq -1)$ donc :
$(\forall x \in]-\infty;1] : g(x) < 0)$

3) Sur $]-\infty;1]$ l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solutions.
Sur $[1;+\infty[$ la fonction g est continue et strictement croissante et on a : $g(1) = -2 < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1;+\infty[$ c-a-d unique α solution sur $\mathbb{R}$.
On a $g(1) = -2 < 0$ et $g(2) = 3 > 0$ alors $\alpha \in]1;2[$.

4) L'approximation de α : on a $1,5$ est le centre de l'intervalle $]1;2[$ et $g(1,5) = -1 < 0$ alors : $\alpha \in]1,5;2[$.
on a aussi $1,75$ est le centre de l'intervalle $]1,5;2[$ et $g(1,75) \simeq 0.53 > 0$ alors : $\alpha \in]1,5;1,75[$.

5) Le signe de $g(x)$: si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$ et si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et $g(\alpha) = 0$:

x	$-\infty$	1	α	2	$+\infty$
g(x)		-	0	+	

II) Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$,

1) On a $\lim\limits_{x \to -1^+} 1+x^3 = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} 1-x = 2$ alors : $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.
et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{x^3} = 0$,

2) La fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ (La restriction d'une fonction rationnelle). et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-x)'(1+x^3)-(1-x)(1+x^3)'}{(1+x^3)} \\ &= \frac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2} \end{aligned}$$

alors le singe de $f'(x)$ est le singe de $g(x)$ sur $]-1;+\infty[$:

x	-1		α		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

4) On a $g(\alpha)=0$ alors $2\alpha^3-3\alpha^2-1=0$ donc : $\alpha^3=\frac{3\alpha^2+1}{2}$.
et donc $f(\alpha)=\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha^3}=\dfrac{1-\alpha}{1+\frac{3\alpha^2+1}{2}}=\dfrac{2-2\alpha}{2+3\alpha^2+1}=\dfrac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$.

Exercice 2 :
1) On a la fonction $x\mapsto x^3+x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme). alors la fonction $x\mapsto f(x)=(x^3+x)^8$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x\in\mathbb{R})$ $f'(x)=8(x^3+x)^7(x^3+x)'=8(x^3+x)^7(3x^2+1)$
2) la fonction $x\mapsto f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ est dérivable sur chaque intervalle de $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$, (fonction rationnelle) et on a :
$f'(x)=\dfrac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$
3) La fonction $x\mapsto x^4+2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $x\mapsto\sqrt{x^4+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $x\mapsto f(x)=\cos(\sqrt{x^4+2})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$f'(x)=\cos(\sqrt{x^4+2})'=(\sqrt{x^4+2})'\cdot\cos'(\sqrt{x^4+2})=\dfrac{(x^4+2)'}{2\sqrt{x^4+2}}\cdot-\sin(\sqrt{x^4+2})=-\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+2}}\sin(\sqrt{x^4+2})$.

4) La fonction $x\mapsto x^2-x$ est dérivable et strictement positive sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$ alors la fonction $x\mapsto f(x)=\sqrt[4]{x^2-x}$ est dérivable sur chaque intervalle $]-\infty;0[$ et $]1;+\infty[$ et on a :
$f'(x)=\dfrac{(x^2-x)'}{4\sqrt[4]{(x^2-x)^3}}=\dfrac{2x-1}{4\sqrt[4]{(x^2-x)^3}}$

Exercice 3 :
Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$.
1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\ et\ x-1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 1\}=[1;+\infty[$.
Soit $x\in[1;+\infty[$ on a : $x>x-1$ donc $\sqrt{x}>\sqrt{x-1}$ alors $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}>0$ c-a-d $f(x)>0$.

3) La fonction f est dérivable sur $]1;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]1;+\infty[$, et on a :
$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\dfrac{-f(x)}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$.
On a pour tout $x\in]1;+\infty[$ $f'(x)<0$, alors f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

4) Soit $x\in[1;+\infty[$: on a $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}^2-\sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=\dfrac{x-(x-1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$.

5) *a*) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ alors f admet une fonction réciproque définie sur $J=f(I)$.

$J = f(I) = f([1;+\infty[) =]\lim_{x\to+\infty};f(1)] =]0;1]$ (car : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} = 0$.)

b) $f(2) = \sqrt{2}-1$ et $f'(2) = \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \neq 0$, alors f est dérivable en $f(2)$ et on a :
$(f^{-1})'(\sqrt{2}-1) = (f^{-1})'(f(2)) = \frac{1}{f'(2)}$.

6) Soit $x \in J$ on a :

$$\begin{aligned}
f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\
&\Leftrightarrow \sqrt{y}-\sqrt{y-1} = x \\
&\Leftrightarrow \sqrt{y-1} = \sqrt{y}-x \\
&\Leftrightarrow y-1 = (\sqrt{y}-x)^2 \\
&\Leftrightarrow y-1 = y-2\sqrt{y}x+x^2 \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{y}x = x^2+1 \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{y} = \frac{x^2+1}{x} \\
&\Leftrightarrow 4y = (\frac{x^2+1}{x})^2 \\
&\Leftrightarrow y = \frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}
\end{aligned}$$

donc $f^{-1}(x) = \frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}$

Exercice 4 :

1) Soit f une fonction continue sur I telle que : $(\forall x \in I) : f(x) \neq 0$.
Montrons que : [$(\forall x \in I) : f(x) < 0$] ou [$(\forall x \in I) : f(x) > 0$]. Par l'absurde supposons que la négation est vrais c-a-d : [$(\exists x \in I) : f(x) \geq 0$] et [$(\exists x \in I) : f(x) \leq 0$],
c-a-d [$(\exists a \in I) : f(x) \geq 0$] et [$(\exists b \in I) : f(x) \leq 0$], et donc $f(a)\cdot f(b) < 0$ et f continue sur I alors d'après T.V.I $(\exists c \in I) : f(c) = 0$ ce qui absurde car $(\forall x \in I) : f(x) \neq 0$, alors notre hypothèse est fausse et donc : [$(\forall x \in I) : f(x) < 0$] ou [$(\forall x \in I) : f(x) > 0$].

2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to2} \frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-4} &= \lim_{x\to2} \frac{x+6-2^3}{(x^2-4)(\sqrt[3]{x+6}^2+2\cdot\sqrt[3]{x+6}+4)} \\
&= \lim_{x\to2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt[3]{x+6}^2+2\cdot\sqrt[3]{x+6}+4)} \\
&= \lim_{x\to2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt[3]{x+6}^2+2\cdot\sqrt[3]{x+6}+4)} \\
&= \frac{1}{4(4+4+4)} = \frac{1}{48}.
\end{aligned}$$

3) b)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[6]{81}\times 2^{\frac{1}{3}}\times\sqrt[6]{36}}{2^{\frac{2}{3}}\times 3} &= \frac{\sqrt[6]{3^4}\times 2^{\frac{1}{3}}\times\sqrt[6]{6^2}}{2^{\frac{2}{3}}\times 3}\\
&= \frac{3^{\frac{4}{6}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 6^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{2}{3}}\times 3}\\
&= \frac{3^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times (2\times 3)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\times 3}\\
&= \frac{3^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\times 3}\\
&= \frac{3\times 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\times 3} = 1
\end{aligned}$$

2.6.4 Devoir Surveiller $n^o 1$ G_1 S_1

Exercice 1 (6 pts)	
Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x^3+1}$	
1). Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$,	0.75
2). $a)$ Monter que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x\in[0;+\infty[$,	1.5
$b)$ En déduire que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$,	0.75
3). En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'elle faut déterminer .	1.5
4). Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.	1.5
Exercice 2 (8.5 pts)	
Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x)=(1-x)\sqrt{1+x}$	
1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.	1
2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en -1 et donner l'interprétation géométrique du résultat trouver. $\left(Calculer\ :\ \lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\right)$	1.5
3) Montrer que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$, et que : $\forall x\in]-1;+\infty[: f'(x)=\dfrac{-3x-1}{2\sqrt{1+x}}$.	1.5
4) Donner le tableau de variation de la fonction f.	1.5
5) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe de f (C_f) en le point d'abscisse 1.	1.25
6) Montrer que l'équation $f(x)=-3$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2;3]$	1.75
Exercice 3 (5.5 pts)	
1) Montrer que la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{5x-2}-2}{x-2} & ;\quad x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{5}{12} & \end{cases}$ est continue en 2.	1.75
2) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\longmapsto+\infty}\sqrt{x^2+4x}-x$.	1.5
3) Donner l'ordre croissante des nombres suivantes : $a=2$; $b=\sqrt[3]{9}$; $c=\sqrt{3}$; $d=\sqrt[6]{80}$	1.5
4) Résoudre l'équation : $x^{\frac{5}{3}}=2$	0.75

2.6.5 Devoir Surveiller $n^o 1$ G_2 S_1

Exercice 1 (6 pts)	
Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0]$ par : $f(x)=\sqrt{1-x^3}$	
1). Montrer que f est continue sur $]-\infty;0]$,	0.75
2). *a)* Monter que f est dérivable sur $]-\infty;0]$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x\in]-\infty;0]$,	1.5
b) En déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$,	0.75
3). En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'elle faut déterminer .	1.5
4). Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.	1.5
Exercice 2 (6.25 pts)	
Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x)=(-x+2)\sqrt{x-1}$	
1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.	1
2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1 et donner l'interprétation géométrique du résultat trouver. $\left(\mathit{Calculer}\ :\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)$	1.25
3) Montrer que f est dérivable sur $]1;+\infty[$, et que : $\forall x\in]1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-3x+4}{2\sqrt{x-1}}$.	1.5
4) Donner le tableau de variation de la fonction f.	1.25
5) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe de f (C_f) en le point d'abscisse 2.	1.25
Exercice 3 (7.75 pts)	
1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+x-1$	
a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;1[$	1.25
b) Donner une approximation de α sur $]0;1[$ à la précision $0,5$ (la méthode de dichotomie).	1
c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^3\geq -x+1$	1
2) Montrer que la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2}\ ;\ x\neq2 \\ f(2)=\dfrac{5}{6}\end{cases}$ est continue en 2.	1.5
3) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\longmapsto+\infty}\sqrt[3]{x^3+x}-x$.	1.5
4) Résoudre l'inéquation : $\sqrt[5]{4x+8}<2$	1.5

2.6.6 Correction du devoir surveiller - 2 - S_1 - G_2

Exercice 1 :

1) La fonction $x\mapsto 1-x^3$ est continue et **positive** sur $]-\infty;0]$ (restriction d'une fonction polynôme) alors la fonction $x\mapsto f(x)=\sqrt{1-x^3}$ est continue sur $]-\infty;0]$.

2) a) La fonction $x\mapsto 1-x^3$ est dérivable et **strictement positive** sur $]-\infty;0]$ (restriction d'une fonction polynôme) alors la fonction $x\mapsto f(x)=\sqrt{1-x^3}$ est dérivable sur $]-\infty;0]$.

   et $(\forall x\in]-\infty;0])$: $f'(x)=\dfrac{(1-x^3)'}{2\sqrt{1-x^3}}=\dfrac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}<0.$

   b) On a $(\forall x\in]-\infty;0])$: $f'(x)<0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

3) La fonction f est **continue** et **strictement décroissante** sur $]-\infty;0]$ alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J,

avec $J = f(]-\infty;0]) = [f(0); \lim_{x\to-\infty} f(x)[= [1;+\infty[$

4) Soit $x \in J = [1;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \qquad (y \in]-\infty;0]) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1-y^3} = x \\ &\Leftrightarrow 1-y^3 = x^2 \\ &\Leftrightarrow -y^3 = x^2-1 \\ &\Leftrightarrow (-y)^3 = x^2-1 \\ &\Leftrightarrow -y = \sqrt[3]{x^2-1} \qquad (Attention : y \leq 0 \; donc \; -y \geq 0) \\ &\Leftrightarrow y = -\sqrt[3]{x^2-1} \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x^2-1}$

Exercice 2 :

1) On a : $\lim_{x\to+\infty} -x+2 = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} (-x+2)\sqrt{x-1} = -\infty$ $(-\infty \times +\infty = -\infty)$.

2) On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1^+} \frac{(-x+2)\sqrt{x-1}}{x-1} \qquad \left(\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right) \\ &= \lim_{x\to1^+} \frac{-x+2}{\sqrt{x-1}} \qquad \left(\frac{1}{0^+}\right) \\ &= +\infty \qquad (car \lim_{x\to1^+} -x+2 = 1 \; et \; \lim_{x\to1^+} \sqrt{x-1} = 0^+) \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1 et (C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x = 1$ dirigé vers le haut.

3) On a $\forall x \in]1;+\infty[: x-1 > 0$ alors la fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ et donc f est dérivable sur $]1;+\infty[$ (comme produit de deux fonctions dérivables). et $(\forall x \in]1;+\infty[)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-x+2)'\sqrt{x-1} + (-x+2)(\sqrt{x-1})' \\ &= -\sqrt{x-1} + (-x+2)\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{-2\sqrt{x-1}\sqrt{x-1} - x + 2}{2\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{-2(x-1) - x + 2}{2\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{-3x+4}{2\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

4)

x	1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
f'(x)	|	+	0	-	
Variation de f			$f(\frac{4}{3})$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				$-\infty$

Le singe de $f'(x)$ c'est le singe de $-3x+4$.

5) $(T) : y = f'(2)(x-2) + f(2)$, (On a $f'(x) = \frac{-3x+4}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(2) = \frac{-2}{2} = -1$) et $f(2) = 0$ donc : $(T) : y = -(x-2)$ c-a-d $(T) : y = -x+2$

Exercice 3 :

1) a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme) en particulier sur $]0;1[$ et on a :
$f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$ alors d'après Théorème des valeurs intermédiaire il existe au moins $\alpha \in]0;1[$ tel que $f(\alpha) = 0$,
on a aussi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc α est unique.

b) $\alpha \in]0;1[$ donc $\alpha \in]0;\frac{1}{2}[$ ou $\alpha \in]\frac{1}{2};1[$
On a $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{-3}{8} < 0$ et $f(1) > 0$ alors : d'après T.V.I $\alpha \in]\frac{1}{2};1[$.

c) On a : $x^3 \geq -x+1 \Leftrightarrow x^3+x-1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [\alpha;+\infty[$

x	$-\infty$	0	α	1	$+\infty$
f(x)		-	0	+	

Donc $S = [\alpha;+\infty[$

2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{5x-1}-3)(\sqrt{5x-1}+3)}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{5x-1}^2-3^2}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{5x-1-9}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{5(x-2)}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{5}{\sqrt{5x-1}+3} \\
&= \frac{5}{\sqrt{9}+3} = \frac{5}{6} = f(2)
\end{aligned}$$

alors f est continue en 2.

3)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x}-x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x}^3-x^3}{\sqrt[3]{x^3+x}^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3+x}+x^2} \qquad \left(a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x-x^3}{\sqrt[3]{x^3+x}^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3+x}+x^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+x}^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3+x}+x^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt[3]{x^3+x}^2}{x}+\sqrt[3]{x^3+x}+x} \qquad \left(\frac{1}{+\infty}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Car $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x}^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{(x^3+x)^2}{x^3}} = +\infty$

4) Pour résoudre une inéquation de la forme $\sqrt[5]{4x+8} < 2$ il faut déterminer l'ensemble de définition de l'inéquation : $D_I = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 4x+8 \geq 0\} = [-2;+\infty[$

et on a : $\sqrt[5]{4x+8} < 2 \Leftrightarrow 4x+8 < 2^5 \Leftrightarrow 4x < 32-8 \Leftrightarrow x < 6$
donc $x \in]-\infty;6]$ et $x \in [-2;+\infty[$ alors $x \in [-2;6]$ c'est à dire $S = [-2;6]$.

Devoir surveiller 1 S_1 Modèle C

Exercice 1 (6.75 pts) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$	
1). Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$,	0.5
2). a) Monter que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x\in[0;+\infty[$,	1.5
b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$,	0.5
3). En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'elle faut déterminer .	1.5
4). Calculer $f(7)$ et $f'(7)$, en déduire que f^{-1} est dérivable en 2, et déterminer $(f^{-1})'(2)$.	1.5
5). Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.	1.25
Exercice 2 (5.5 pts) Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x)=(1-x)\sqrt{1+x}$	
1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.	1
2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en -1 et donner l'interprétation géométrique du résultat trouver. $\left(Calculer\ :\ \lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\right)$	1.5
3) Montrer que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$, et que : $\forall x\in]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-3x-1}{2\sqrt{1+x}}$.	1.5
4) Donner le tableau de variation de la fonction f.	1.5
Exercice 3 (3.5 pts) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+2x-2$	
a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;1]$	1.5
b) (En utilisant la méthode de dichotomie) donner une approximation de α sur $[0;1]$ à la précision $0,5$.	1
c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^3\leq 2-2x$	1
Exercice 4 (4.25 pts)	
1) Montrer que la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2} \quad ; \quad x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{1}{12} \end{cases}$ est continue en 2.	1.5
2) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\longmapsto+\infty}\sqrt{x^2+2x}-x$.	1.5
3) Donner l'ordre croissante des nombres suivantes : $a=2$; $b=\sqrt[3]{10}$; $c=\sqrt{5}$; $d=\sqrt[6]{90}$	1.25

Devoir surveiller 1 S_1 Modèle D :

Exercice 1 (8.25 pts)	
Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$	
1) Montrer que f est continue sur $[1;+\infty[$.	0.75
2) Montrer que f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]1;+\infty[$.	1.5
3) Étudier la dérivabilité de f a droite en 1 et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.	1.5
4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.	1.5
5) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2, et calculer $(f^{-1})'(2)$, (On donne $f(3) = 2$).	1.5
6) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.	1.5

Exercice 2 (5.5 pts)	
Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^3 + 2x - 1$.	
1) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;1[$.	1.5
2) (En utilisant la méthode de dichotomie) donner une approximation de α sur $]0;1[$ à la précision 0.25.	1.5
3) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^3 \geq 1 - 2x$	1
4) Trouver l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.	1.5

Exercice 3 (6.25 pts)	
1) Montrer que la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{5x-2}-2}{x-2} \quad ; \quad x \neq 2 \\ f(2) = \dfrac{5}{12} \end{cases}$ est continue en 2.	1.5
2) Étudier la dérivabilité et calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :	
a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$	0.75
b) $g(x) = \sqrt[3]{x^5}$	1
c) $h(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$	1.25
3) Calculer la limite : $\lim\limits_{x \longmapsto +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x$.	1.75

CHAPITRE 3

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION :

Dans tout le chapitre le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$

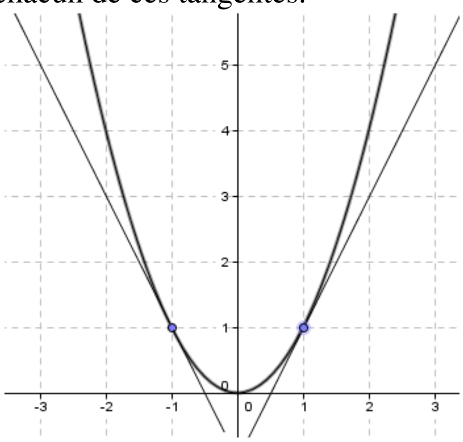
3.1 Concavité d'une courbe - points d'inflexions :

3.1.1 Concavité d'une courbe :

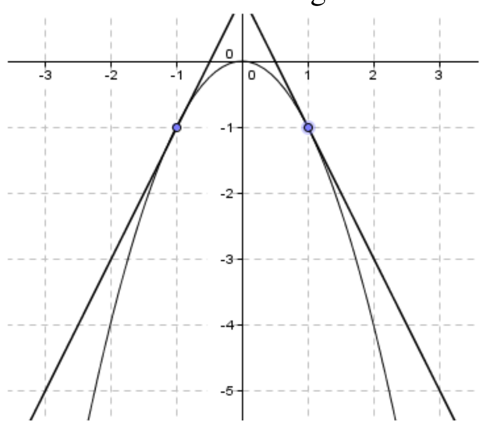
Définitions 3.1
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative,
• On dit que la courbe (C_f) est **Convexe** si (C_f) est entièrement située au **dessus** de chacun de ces tangentes.
• On dit que la courbe (C_f) est **Concave** si (C_f) est entièrement située au **dessous** de chacun de ces tangentes.

exemples :

la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$ est **convexe**. car sa courbe est entièrement située au **dessus** de chacun de ces tangentes.



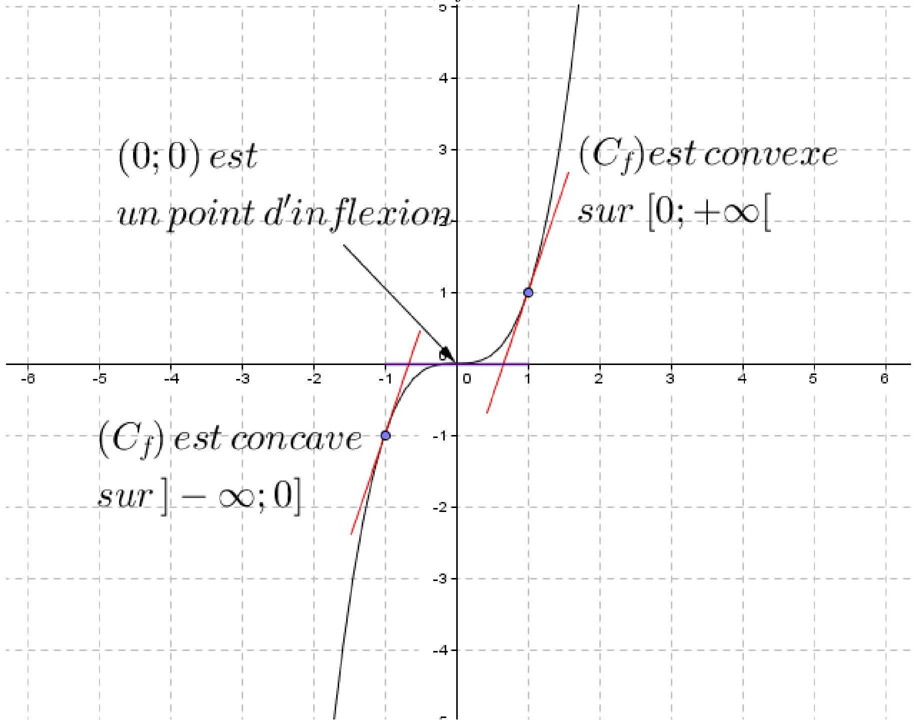
la courbe de la fonction $x \mapsto -x^2$ est **concave**. car sa courbe est entièrement située au **dessous** de chacun de ces tangentes.



3.1.2 Point d'inflexion

Définition 3.1
Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, et $a \in I$, et (C_f) la courbe représentative de f, on dit $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion si la courbe (C_f) change sa convexité au point A.

exemple : la courbe de la fonction $x \mapsto f(x) = x^3$ change sa convexité au point $(0;0)$, donc $(0;0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f).



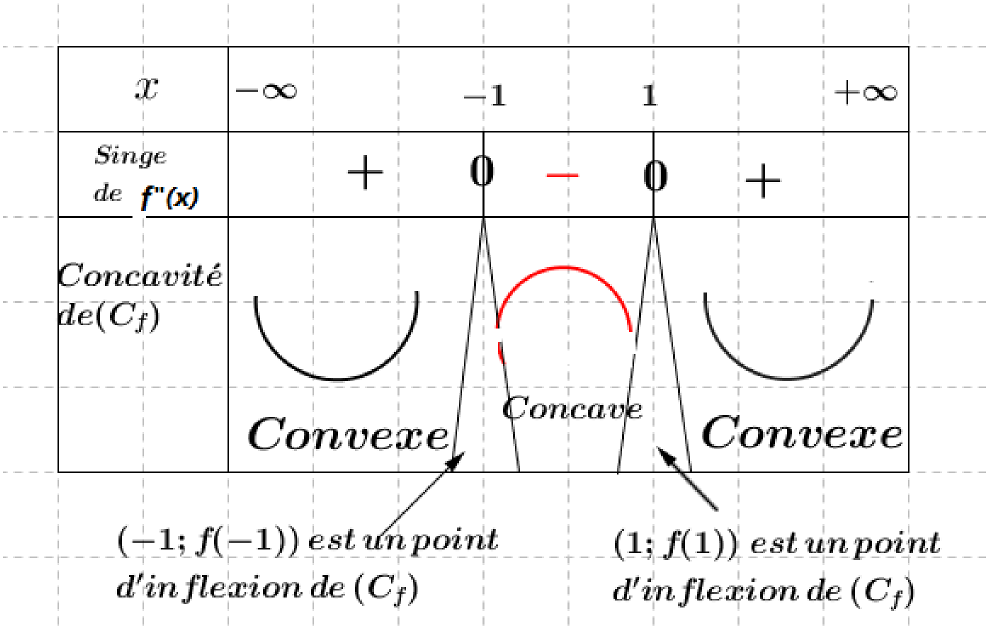
3.1.3 Concavité et dérivée seconde

Proprieté 3.1
Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et (C_f) sa courbe représentative et $a \in I$,

- ▷ Si f'' est positive sur I alors (C_f) est convexe sur I.
- ▷ Si f'' est négative sur I alors (C_f) est concave sur I.
- ▷ Si f'' s'annule en a en changement de signe ; alors le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f)

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2$.
1) Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
2) Étudier la concavité de la courbe (C_f) de la fonction f en précisant les points d'inflexions.
Solution :
1) La fonction f est une polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f'(x) = (\dfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2)' = \dfrac{1}{2}(x^4)' - 3(x^2)' + (2)' = 2x^3 - 6x.$
La fonction f' est une polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ deux fois et :
$f''(x) = (f'(x))' = (2x^3 - 6x)' = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 6(x-1)(x+1).$
2) La concavité de (C_f) : dépend du signe de f"(x) ; on a le tableau de singe de f'' et de la concavité de la courbe (C_f) :



La courbe de la fonction f est **Convexe** sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$, et elle est **concave** sur $[-1;1]$.
(Car : $\forall x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[; f''(x) \geq 0$ et $\forall x \in [-1;1]; f''(x) \leq 0$).
$f(-1) = -\frac{1}{2}$, le point $(-1;-\frac{1}{2})$ est un point d'inflexion de (C_f), car $f''(-1) = 0$ et f'' change le singe en -1. on a aussi :
$f(1) = -\frac{1}{2}$, le point $(1;-\frac{1}{2})$ est un point d'inflexion de (C_f), car $f''(1) = 0$ et f'' change le singe en 1. donc les points d'inflexions sont $A(1;-\frac{1}{2})$ et $B(-1;-\frac{1}{2})$.

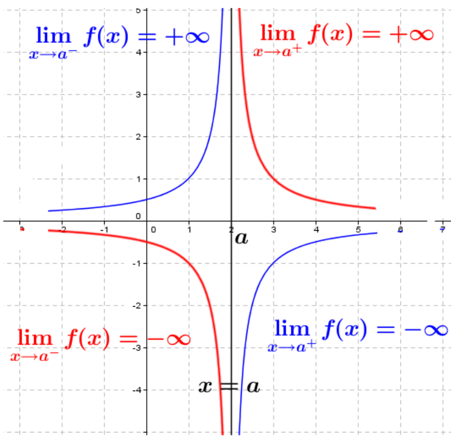
Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \dfrac{2}{3}$.
1) Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) Étudier la concavité de la courbe (C_f) de f en précisant les deux points d'inflexions.

3.2 Les asymptotes :

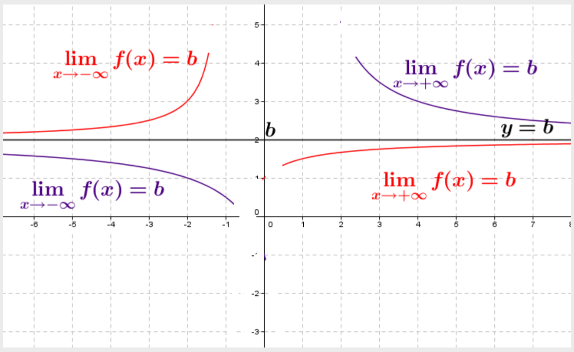
3.2.1 Asymptotes verticales :

Définition 3.2
Si : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$:
alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe (C_f).



3.2.2 Asymptotes horizontales :

Définition 3.3
Si : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$:
alors on dit que la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$



Exercice :

Soif f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

1) Calculer : $\lim_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to1^-} f(x)$, puis en déduire les asymptote à (C_f).

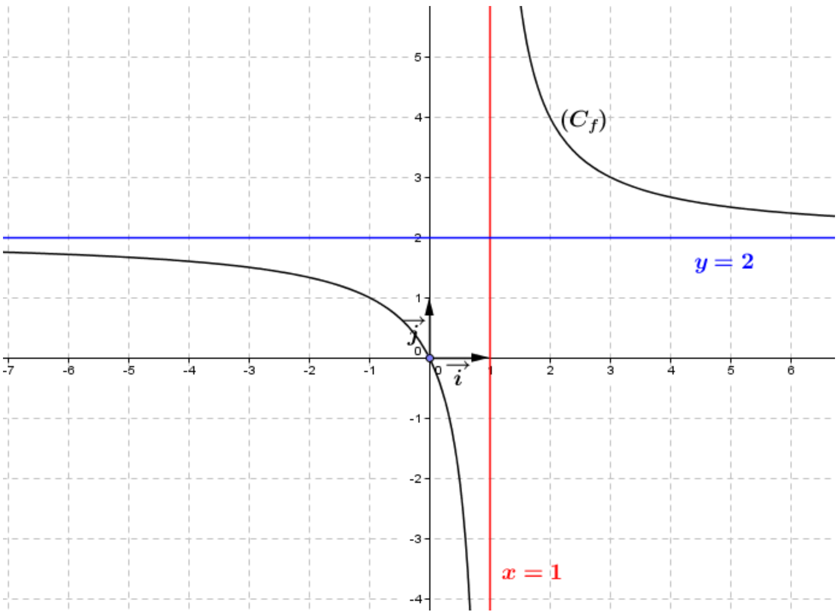
2) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, puis en déduire les asymptote à (C_f).

La solution :

1) On a : $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \dfrac{2x}{x-1} = +\infty$, car $\left(\dfrac{2}{0^+} = +\infty\right)$, ($\lim_{x\to1^+} x-1 = 0^+$ et $\lim_{x\to1^+} 2x = 2$),
et $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \dfrac{2x}{x-1} = -\infty$, car $\left(\dfrac{2}{0^-} = -\infty\right)$, ($\lim_{x\to1^-} x-1 = 0^-$ et $\lim_{x\to1^-} 2x = 2$),
donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (C_f).

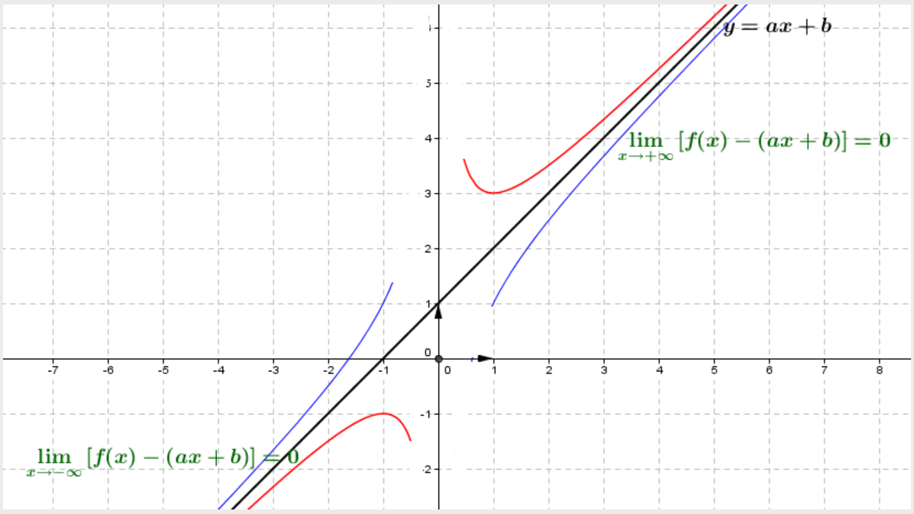
2) On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x-1} = 2$ donc :
la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

- La courbe de la fonction f :



3.2.3 asymptote oblique :

Définition 3.4
Si $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$) où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$, on dit alors que la droite d'équation : $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).



Exercice :

1) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=2x+3+\dfrac{2}{x-1}$.
   • Montrer que la droite d'équation $y=2x+3$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
2) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$.
   a) Déterminer les réels $a;b$ et c tels que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.
   b) En déduire que la courbe (C_f) de la fonction f admet une asymptote oblique à au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Proprieté 3.2
La droite d'équation $y=ax+b$ $(a\neq0)$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) si et seulement s'il existe une fonction h telle que : $f(x)=ax+b+h(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ (respectivement $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$).

Exemples :

1) Voir l'exercice (3.2.3) précédente.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x^2+1}$.

On a : $f(x)=x+1+h(x)$ où $h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Comme $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ et $\lim_{x\to-\infty}h(x)=0$, alors la droite d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Proprieté 3.3
La droite d'équation $y=ax+b$ $(a\neq0)$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ si et seulement si : $\left(\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a \quad et \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b\right)$.
On a la même propriété au voisinage de $-\infty$.

Exemples :

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^3+2x+3}{x^2+1}$.
Montrons que la courbe de la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.
En effet on utilise la propriété, (3.3) on a : $\triangleright \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.
$\triangleright$ Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^3} = 1 = a$.
$\triangleright$ Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-ax]$ c'est à dire $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-x]$ on a : $f(x)-x = \dfrac{x^3+2x+3}{x^2+1} - x = \dfrac{x+3}{x^2+1}$.
Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-x] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0 = b$,
alors la droite d'équation $y = x$ $(a = 1; b = 0)$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{4x^2+6}$. $(D_g = \mathbb{R})$
Montrons que la courbe de la fonction g admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
En effet on utilise la propriété, (3.3) on a : $\triangleright \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+6} = +\infty$.
$\triangleright$ Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+6}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{4x^2+6}{x^2}} = \sqrt{4} = 2 = a$.
$\triangleright$ Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x)-ax]$ c'est à dire $\lim\limits_{x\to-\infty} [g(x)-2x]$ on a :

$$g(x)-2x = \sqrt{4x^2+6}-2x = \frac{4x^2+6-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+6}+2x} = \frac{6}{\sqrt{4x^2+6}+2x}.$$

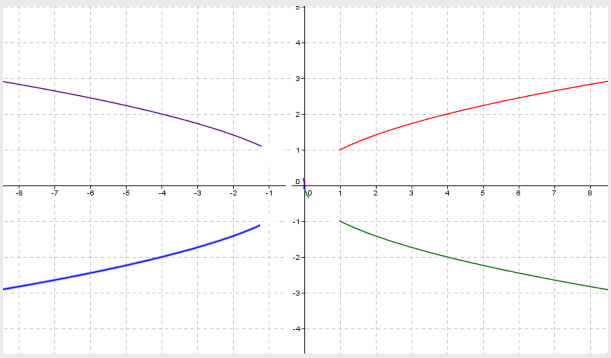
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x)-2x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{\sqrt{4x^2+6}+2x} = 0 = b$,
alors la droite d'équation $y = 2x$ $(a = 2; b = 0)$ est une asymptote oblique à (C_g) au voisinage de $+\infty$.

3.3 Branches paraboliques :

Dans ce paragraphe, on considère une fonction f de la variable réelle x, qui admet une limite infinie au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

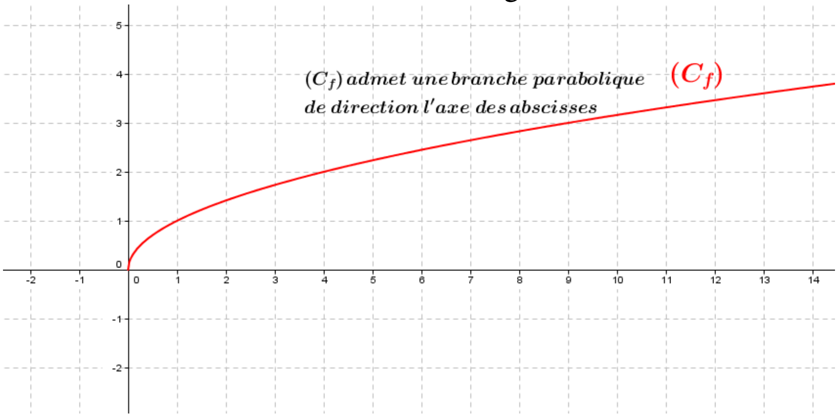
3.3.1 Branche parabolique de direction l'axe des abscisses :

Définition 3.5
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ $\left(ou \ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \right)$ alors on dit que la courbe (C_f) de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des **abscisses** au voisinage de $+\infty$ (ou au voisinage de $-\infty$).



Exemple :

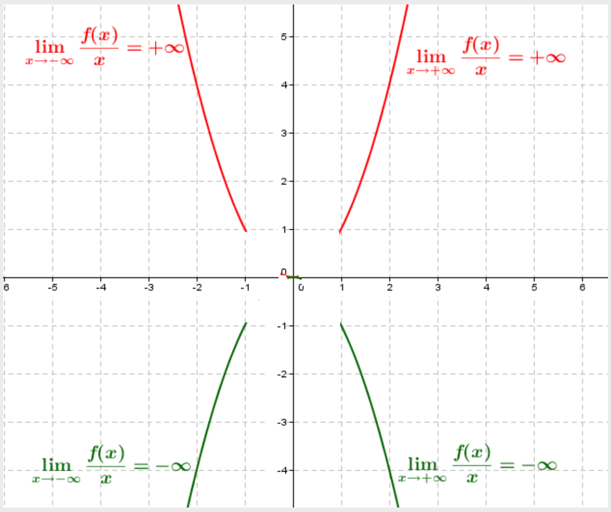
La courbe de la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x}$ admet admet une branche parabolique de direction l'axe des **abscisses** au voisinage de $+\infty$.



En effet : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

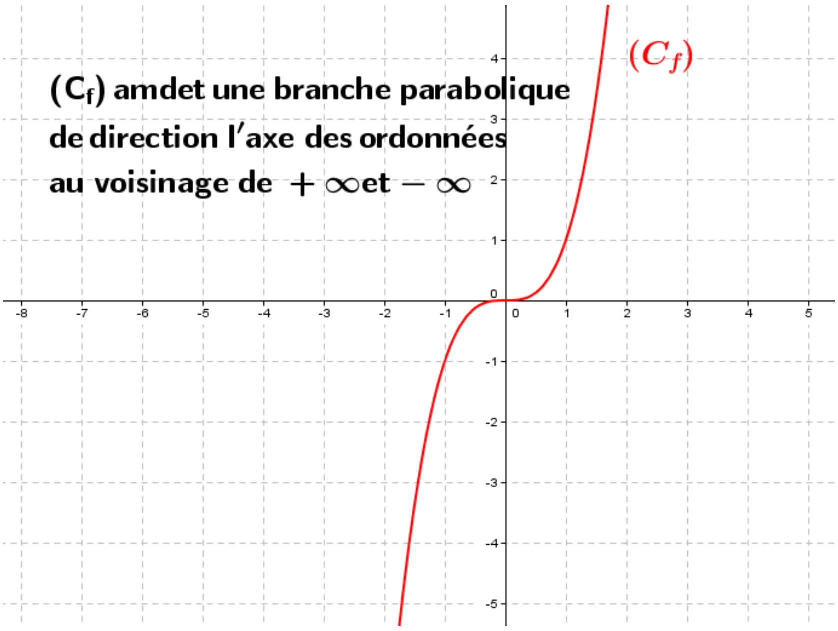
3.3.2 Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées :

Définition 3.6
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ alors on dit que la courbe (C_f) de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des **ordonnées**.



Exemple :

Soit f la fonction définie par : $x \mapsto f(x) = x^3$; on a au voisinage de $+\infty$:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.
et au voisinage de $-\infty$:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.
Donc la courbe (C_f) de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des **ordonnées** au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

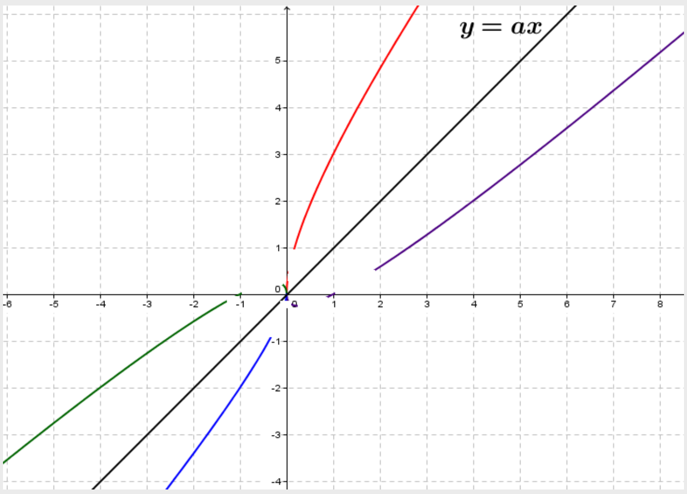


3.3.3 Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ où $a \neq 0$:

Définition 3.7

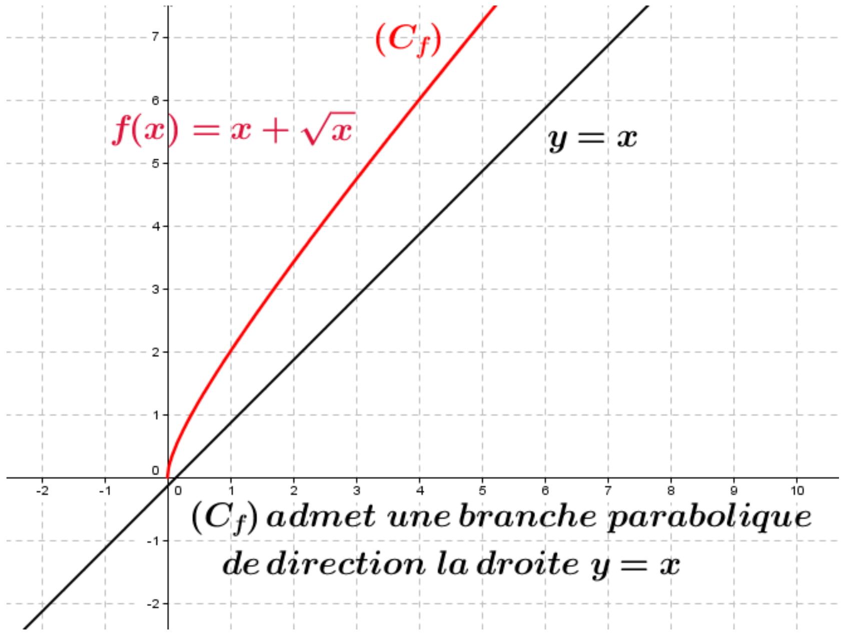
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ où $a \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$
alors on dit que la courbe (C_f) de la fonction f admet une branche parabolique de direction la droite **d'équation : y= ax** au voisinage de $+\infty$.

Remarque : On a la même définition au voisinage de $-\infty$.



Exemple :

Soit f la fonction définie par : $x \mapsto f(x) = x + \sqrt{x}$;
On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{x} = 1 + 0 = 1 = a$;
on a aussi : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = \lim\limits_{x \to +\infty} [x + \sqrt{x} - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$,
Donc la courbe (C_f) de la fonction f admet une branche parabolique de direction la droite **d'équation : y= x** au voisinage de $+\infty$.

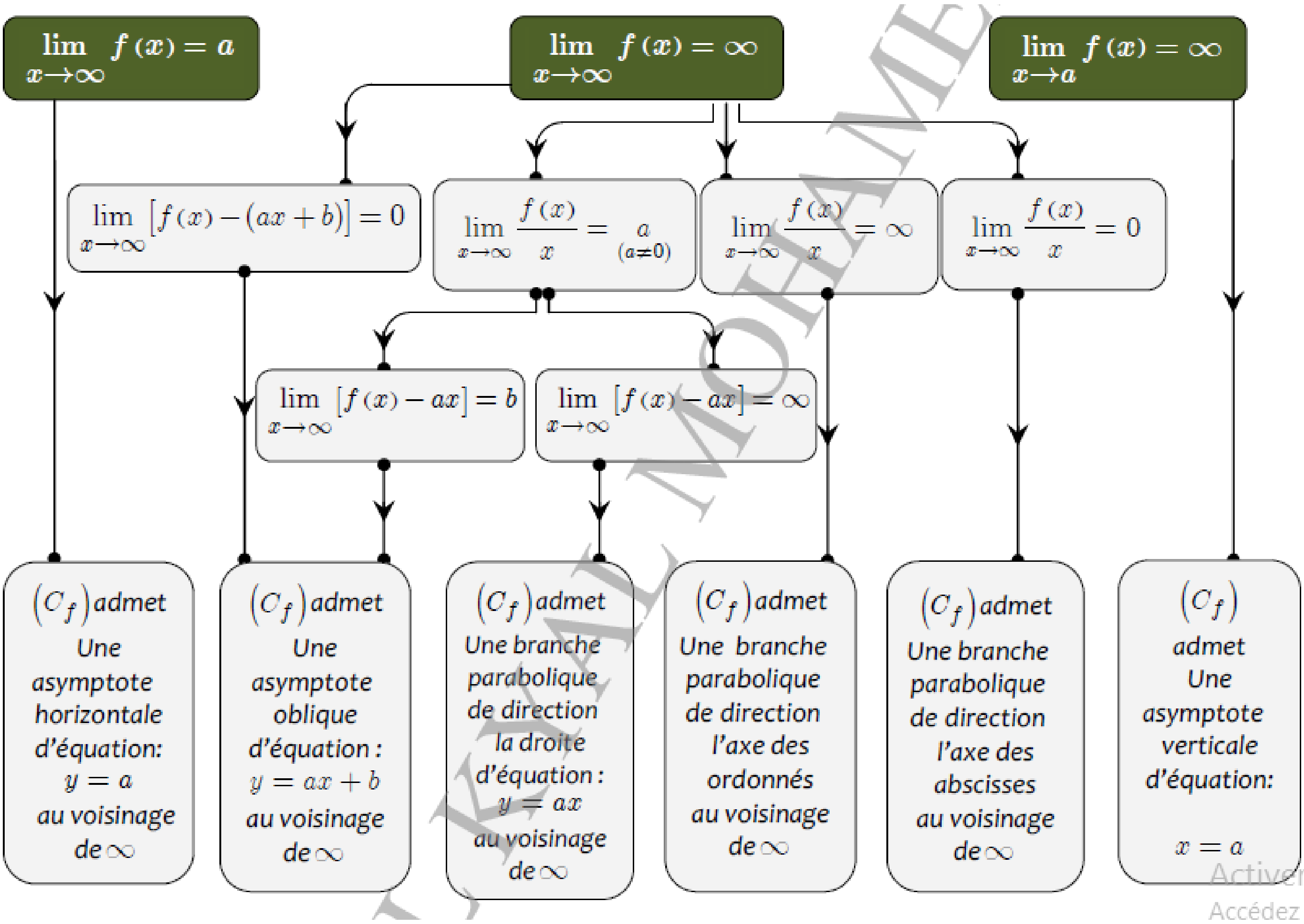


Exercice :

Déterminer la nature de la branche parabolique des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = x^2 + 2x$ 2) $f_2(x) = \sqrt{3x+4}$ 3) $f_3(x) = 2x + \sqrt{x+5}$ 4) $f_4(x) = x^3 - 2x^2$

Résumer des branches parabolique et les asymptotes d'une courbe



3.4 Axe de symétrie - Centre de symétrie :

Proprieté 3.4
Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et (C_f) sa courbe représentative on a :

▷ La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de la courbe (C_f) :

si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D_f) : 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(2a-x) = f(x) \end{cases}$

▷ Le point $\Omega(a;b)$ $(a \in \mathbb{R} \,;\, a \in \mathbb{R})$ est un **centre de symétrie** de la courbe (C_f) :

si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D_f) : 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$

Exemple 1 (axe de symétrie) :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 2x + 1$,
Montrons que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de (C_f) la courbe de f.
En effet on a : $D_f = \mathbb{R}$, $(\forall x \in \mathbb{R}) : 2a - x = 2 - x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(2-x) &= (2-x)^2 - 2(2-x) + 1 \\ &= 4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 1 \\ &= x^2 - 2x + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Exemple 2 (centre de symétrie) :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$,
Montrons que le point $\Omega(1;2)$ $(a = 1\,;\, b = 2)$ est le centre de symétrie de (C_f) la courbe de f.
En effet on a : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$:

$$x \in D_f \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow -x \neq -1 \Rightarrow 2 - x \neq 2 - 1 \Rightarrow 2 - x \neq 1 \Rightarrow 2 - x \in D_f$$

et pour tout $x \in D_f$ on a :

$$\begin{aligned} f(2a-x) = f(2-x) &= \frac{2(2-x)}{2-x-1} \\ &= \frac{4-2x}{-x+1} \\ &= 4 + \frac{4-2x}{-x+1} - 4 \\ &= 4 + \frac{4-2x-4(-x+1)}{-x+1} \\ &= 4 + \frac{4-2x+4x-4)}{-x+1} \\ &= 4 + \frac{2x}{-x+1} \\ &= 4 - \frac{2x}{x-1} \\ &= 2b - f(x) \end{aligned}$$

Remarque 1 :

Soit f une fonction admet la droite $x = a$ comme axe de symétrie :
▷ si f est **croissante** sur $]-\infty;a] \cap D_f$ alors f est **décroissante** sur $]-\infty;a] \cap D_f$.
▷ si f est **décroissante** sur $]-\infty;a] \cap D_f$ alors f est **croissante** sur $]-\infty;a] \cap D_f$

Remarque 2 :

Soit f une fonction admet le point $\Omega(a;b)$ comme centre de symétrie :
▷ si f est **croissante** sur $]-\infty;a] \cap D_f$ alors f est **croissante** sur $[a;+\infty \cap D_f$.
▷ si f est **décroissante** sur $]-\infty;a] \cap D_f$ alors f est **décroissante** sur $[a;+\infty[\cap D_f$

3.5 Plan d'étude d'une fonction : (P-244-maxi-math)

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
Étudier la fonction f et construire (C_f).

Exercice corrigés

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Exercice 1 (9 pts)	
Soient f la fonction définie par : $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$ et C_f sa courbe représentatives dans d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$	
1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.	0.5
b) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	1
c) Calculer : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ En déduire les asymptotes à (C_f).	1.5
2) a) Montrer que $\forall x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$	0.75
b) Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.	1.5
3) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe (C_f) au point $(0; f(0))$	0.75
4) Montrer que le point $A(2;1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f).	0.75
5) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.	0.75
6) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.	1.5

Exercice 2 (11 pts)	
Soit f la fonction définie par : $$f(x)=1+\frac{1-2x}{x^2-x-2}$$	
(1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.	0.5
(2) a) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.	3
b) En déduire les asymptotes à (C_f) la courbe représentative de f.	1.5
(3) Déterminer $f'(x)$ pour tout x de D_f	1
(4) Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.	1.5
(5) a) Déterminer $f''(x)$ pour tout x de D_f	1.25
b) Étudier la concavité de (C_f).	1
c) En déduire que (C_f) admet $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ comme point d'inflexion.	0.5
(6) Montrer que : $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ est un centre de symétrie de (C_f).	0.75

Correction : Exercice 1 :

Soient f la fonction définie par : $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-2}$

1) a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-2\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 2\}=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\dfrac{1}{x-2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x-1+\dfrac{1}{x-2}=-\infty$.

c) On a $\lim\limits_{x\to2^+} x-2=0^+$ alors : $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$ et donc : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$.

On a aussi : $\lim\limits_{x\to2^-} x-2=0^-$ alors : $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$ et donc : $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$.

Alors (C_f) la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation : $x=2$.

2) a) La fonction f est dérivable sur chaque intervalle de $\mathbb{R}-\{2\}$ et $(\forall x\in\mathbb{R}-\{2\})$:

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2-1}{(x-2)^2}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$$

b) Les variations de la fonction f : le signe de f et celui de $(x-1)(x-3)$:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

3) L'équation de la tangente T à la courbe (C_f) au point $(0;f(0))$ est :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ c'est à dire : $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{2}$

4) Montrons que $A(2;1)$ est le centre de symétrie de la courbe (C_f) : on a

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 2 \Leftrightarrow 4-x \neq 2 \Leftrightarrow 4-x \in D_f$$

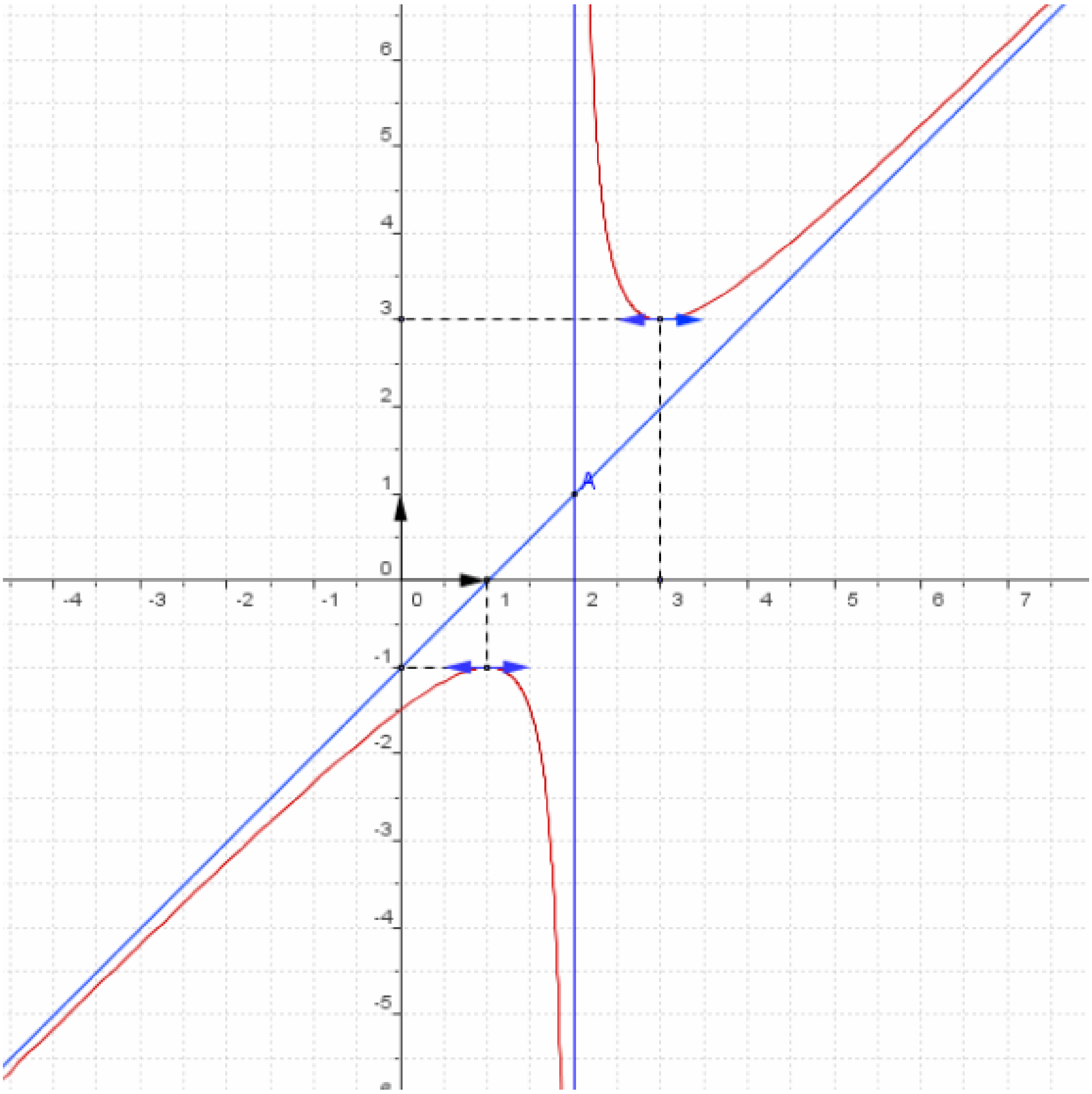
on a aussi : $f(4-x) = 3-x+\dfrac{1}{2-x}$ et $2-f(x) = 2-x+1-\dfrac{1}{x-2} = 3-x+\dfrac{1}{2-x}$
Donc : $f(4-x) = 2-f(x)$: alors $A(2;1)$ est le centre de symétrie de la courbe (C_f)

5) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)-(x-1) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

Alors la droite d'équation $y = x-1$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

6) La courbe de la fonction f :



Exercice 2 :

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x^2-x-2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 2 \ et \ x \neq -1\} = \mathbb{R}-\{2;-1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;2[\cup]2;+\infty[$.

2) a) Les limites aux bornes de D_f : • Les limites en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim_{x\mapsto\pm\infty}\frac{1-2x}{x^2-x-2}=\lim_{x\mapsto\pm\infty}\frac{-2x}{x^2}=\lim_{x\mapsto\pm\infty}\frac{-2}{x}=0$ لأن $\lim_{x\mapsto\pm\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto\pm\infty}1+\frac{1-2x}{x^2-x-2}=1$

$\lim_{x\mapsto 2}1-2x=-3$ $\lim_{x\mapsto 2}x^2-x-2=0$ لدينا

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

- Les limites en 2^- et en 2^+ et en -1^- et en -1^+ :

▷ On a : $\lim_{x\to 2^-}x^2-x-2=0^-$ et $\lim_{x\to 2^-}1-2x=-3$ alors : $\lim_{x\to 2^-}1+\frac{1-2x}{x^2-x-2}=+\infty$ $\left(\frac{-3}{0^-}\right)$

▷ On a : $\lim_{x\to 2^+}x^2-x-2=0^+$ et $\lim_{x\to 2^+}1-2x=-3$ alors : $\lim_{x\to 2^+}1+\frac{1-2x}{x^2-x-2}=-\infty$ $\left(\frac{-3}{0^+}\right)$

▷ On a : $\lim_{x\to -1^-}x^2-x-2=0^+$ et $\lim_{x\to -1^-}1-2x=3$ alors : $\lim_{x\to -1^-}1+\frac{1-2x}{x^2-x-2}=+\infty$ $\left(\frac{3}{0^+}\right)$

▷ On a : $\lim_{x\to -1^+}x^2-x-2=0^-$ et $\lim_{x\to -1^+}1-2x=3$ alors : $\lim_{x\to -1^+}1+\frac{1-2x}{x^2-x-2}=-\infty$ $\left(\frac{3}{0^-}\right)$

c) • $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=1$: alors la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontal de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

• $\lim_{x\to 2^\pm}f(x)=\pm\infty$: alors la droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale de la courbe (C_f).

• $\lim_{x\to -1^\pm}f(x)=\pm\infty$: alors la droite d'équation $x=-1$ est une asymptote verticale de la courbe (C_f).

3) Déterminons $f'(x)$: la fonction f est dérivable sur chaque intervalle de D_f (fct rationnelle) et :

$$f'(x)=\frac{(1-2x)'\left(x^2-x-2\right)-\left(x^2-x-2\right)'(1-2x)}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2\left(x^2-x-2\right)-(2x-1)(1-2x)}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x^2+2x+4+4x^2-4x+1}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-2x+5}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

4) Les variations de f : on a : $f'(x)=\frac{2x^2-2x+5}{(x^2-x-2)^2}$: donc le signe de f est le signe de $2x^2-2x+5$ comme $\Delta=4-40=-36<0$ alors : $2x^2-2x+5>0$: d'où le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	‖	+	
f	1 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

5) a) La fonction f' est dérivable sur chaque intervalle de sa domaine de définition ($D_{f'}=D_f$) (fct rationnelle) c'est à dire que f est dérivable deux fois sur D_f et on a :

$$
\begin{aligned}
f''(x) = ' f'(x))' &= \left(\frac{2x^2-2x+5}{(x^2-x-2)^2}\right)' \\
&= \frac{(2x^2-2x+5)'((x^2-x-2)^2)-(2x^2-2x+5)((x^2-x-2)^2)'}{(x^2-x-2)^4} \\
&= \frac{(4x-2)((x^2-x-2)^2)-(2x^2-2x+5)(2(2x-1)(x^2-x-2))}{(x^2-x-2)^4} \\
&= \frac{-2(2x-1)(x^2-x-2)\left[-(x^2-x-2)+(2x^2-2x+5)\right]}{(x^2-x-2)^4} \\
&= \frac{-2(2x-1)(x^2-x+7)}{(x^2-x-2)^3}
\end{aligned}
$$

b) La concavité de (C_f) :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$-2(2x-1)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x^2-x-2)^3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
La concavité de (C_f)		Convexe		Concave		Convexe		Concave	

$\left(\frac{1}{2};1\right)$ ***est le point d'inflexion de*** (C_f)

c) f'' s'annule en $\frac{1}{2}$ avec un changement de signe alors $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ est un point d'inflexion de (C_f)

6) Montrons que $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ est le centre de symétrie de (C_f) :

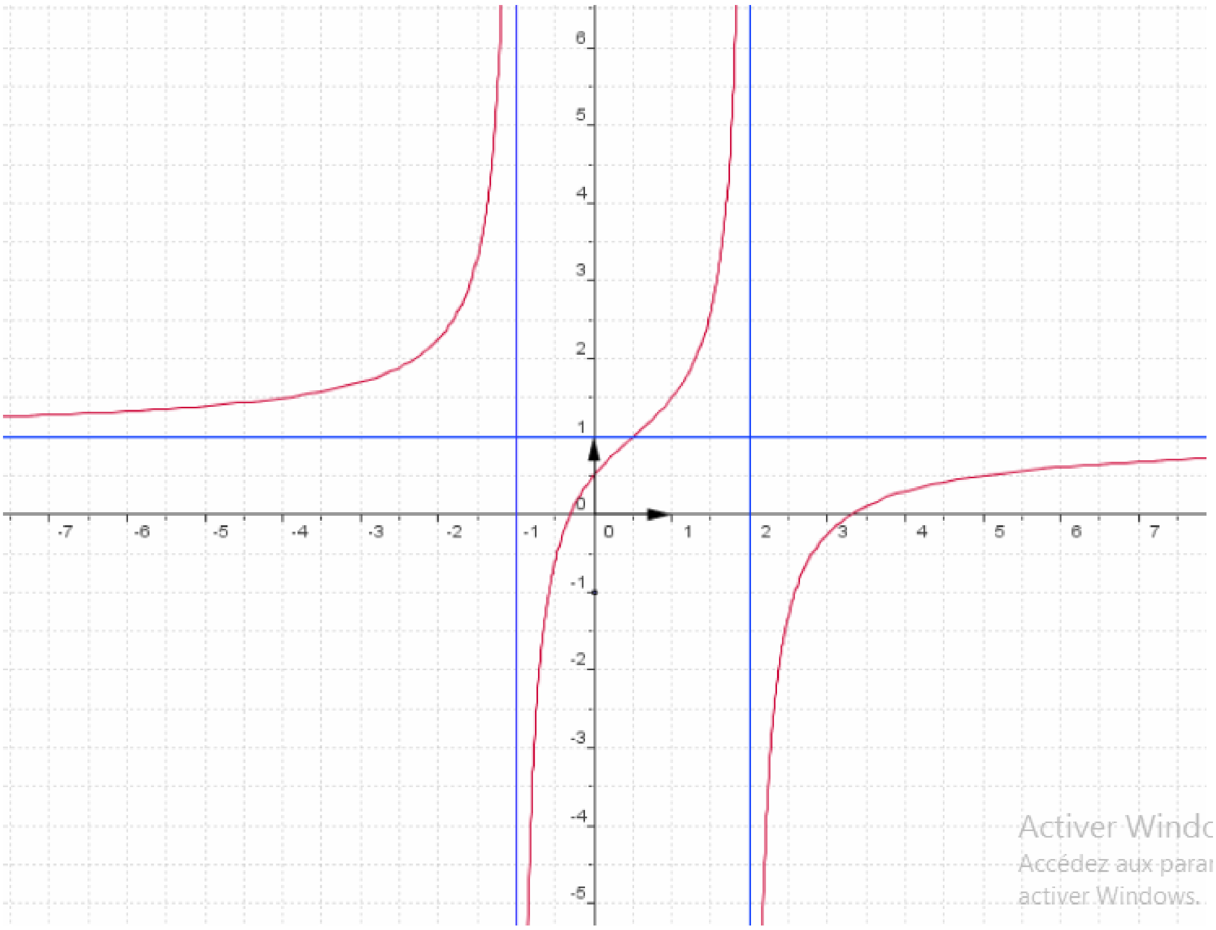
on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}-\{-1;2\} \Leftrightarrow 1-x \in \mathbb{R}-\{-1;2\} \Leftrightarrow 1-x \in D_f$

$$f(1-x) = 1+\frac{1-2(1-x)}{(1-x)^2-(1-x)-2} = 1-\frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

$$2-f(x) = 2-1-\frac{1-2x}{x^2-x-2} = 1-\frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

إذن $f(1-x)=2-f(x)$ ومنه $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ مركز تماثل لـ C_f

7) La courbe de la fonction f :



3.5.1 La série des exercices $n^o 3$:

La concavité - points d'inflexions

exercice 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + \dfrac{2x+6}{x+1}$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Montrer que : $\forall x \in D \ f'(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

3) Montrer que : $\forall x \in D \ f''(x) = \left(\dfrac{2}{x+1}\right)^3$

En déduire la concavité de C_f la courbe de f.

exercice 2 :

Étudier la dérivabilité de f et de f' et déterminer $f''(x)$, en déduire la concavité de (C_f) la courbe de f dans chacune des cas suivantes :

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2$. 2) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 5x + 1$.

3) $f(x) = cos(x) \ : x \in [0, \pi]$. 4) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x^2+1}$.

Les asymptotes

exercice 3 :

Soit f la fonction définie par : $\dfrac{3x}{x^2-1}$

1) Étudier le signe de $x^2 - 1$

2) Calculer les limites :
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-1^+} f(x)$; $\lim_{x\to1^+} f(x)$
3) En déduire les équations des asymptotes à (C_f)

exercice 4 :

Déterminer l'équation de l'asymptote oblique à la courbe de f dans chacune des cas suivantes :
1) $f(x) = -x+1+\frac{1}{x}$ 2) $f(x) = 2x+3+\frac{1}{x-1}$.
3) $f(x) = \frac{x^3+3x^2+1}{x^2}$ 4) $f(x) = x+2+\frac{x-1}{x^2-2}$.

exercice 5 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{-x^3+5x}{x^2+3}$
1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f et calculer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2) Calculer : $\frac{f(x)}{x}$ et $f(x)+x$ au voisinage $+\infty$ et $-\infty$ en déduire l'équation de l'asymptote a (C_f) la courbe de f.
3) Déterminer les positions relatives de (C_f) et l'asymptote.

Branches infinie

exercice 6 :

Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f, et déterminer les limites aux bornes de D_f, et déterminer les branches parabolique de la courbe C_f dans chacune des cas suivantes :
(1). $f_3(x) = \sqrt{x+1}$; (2). $f_2(x) = x^3+4x$
(3) $f(x) = \sqrt{x^2+x}$; (4) $f_4(x) = 3x+2\sqrt{x}$

Élément de symétrie de (C_f)

exercice 7 :

1) Monter que la droite (D) est l'axe de symétrie de (C_f) dans les deux cas :
(a) $f(x) = -3x^2+5x-1$ $D : x = \frac{5}{6}$
(b) $f(x) = \frac{-3}{x^2-4x+7}$ $D : x = 2$

2) Monter que la droite Ω est le centre de symétrie de (C_f) dans les deux cas :
(a) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ $\Omega(-1;2)$
(b) $f(x) = 2x^3+6x^2+3x+3$ $\Omega(-1;4)$

exercice 8 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin(x)$
(1) Montrer qu'il suffit d'étudier la fonction f sur $[-\pi;\pi]$.
(2) Montrer que f est impaire, en déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$
(3) Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est l'axe de symétrie de la courbe de f en déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

exercice 9 : (Les représentations graphiques)
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

(1) Montrer que f est paire.
(2) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x$
(3) En déduire une asymptote à (C_f), (pour $x>0$)
(4) Étudier les variations de f .
(5) Construire la courbe de f.

exercice 10 : (Les représentations graphiques)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^3-3x+3$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(1) a) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
 b) Déterminer les branches parabolique de la courbe (C_f).
(2) Déterminer le tableau de variation de la courbe de f.
(3) a) Étudier la concavité de (C_f) et déterminer les point d'inflexion.
 b) Montrer que $I(0;3)$ est le centre de symétrie de (C_f) et déterminer l'équation de la tangente (T) à C_f en I.
(4) Construire la courbe (C_f) et déterminer en fonction de m, le nombre de solutions de l'équation : $x^3-3x+3=m$
(5) Résoudre les inéquations :
 $(1)\ x^3-3x+3>1$; $(2)\ x^3-3x+3<5$

Correction de l'exercice 10 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^3-3x+3$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(1) a) Déterminons les limites de f aux bornes de D_f :
 On a $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$ (f est un polynôme) donc les bornes de D_f sont $+\infty$ et $-\infty$:
 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$
 b) Déterminons les branches parabolique de la courbe (C_f), On a :
 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ et $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x+3}{x}\pm\infty=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$
 alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
(2) Déterminons le tableau de variation de la courbe de f :
 On a la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), et
 $(\forall x\in\mathbb{R})$: $f'(x)=(x^3-3x+3)'=3x^2-3=3(x^2-1)$, alors le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$ et strictement décroissante. sur $[-1;1]$

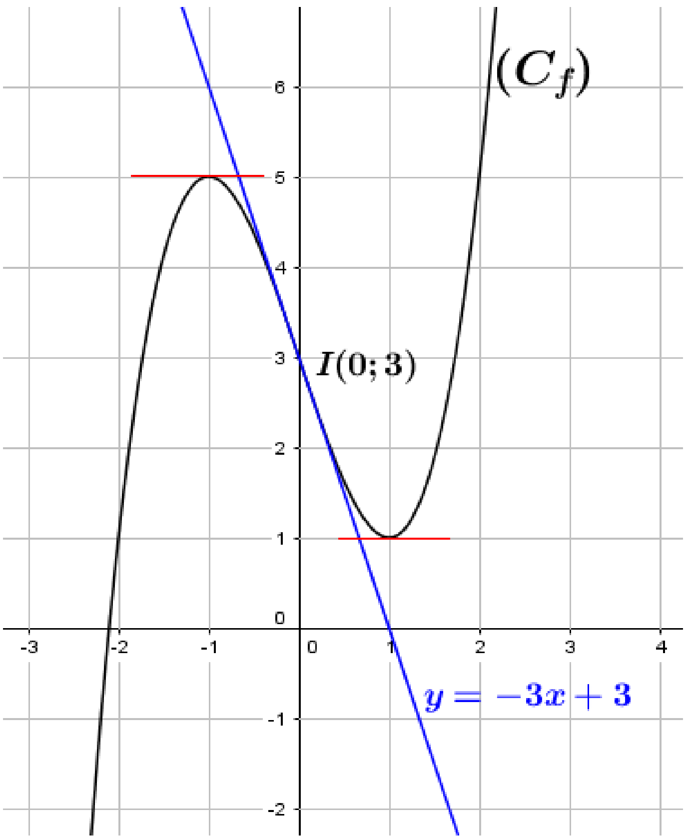
(3) a) Étudier la concavité de (C_f) et déterminer les point d'inflexion : f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ deux fois : et
$(\forall x \in \mathbb{R}) : f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 3)' = 6x$, alors la concavité de (C_f) est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
(C_f)			

(C_f) est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$, le point $(0;f(0))$ c-à-d $(0;3)$ est le seul point d'inflexion de (C_f).

b) Montrons que $I(0;3)$ est le centre de symétrie de (C_f) et déterminer l'équation de la tangente (T) à C_f en I :
On a : $D_f = \mathbb{R}$: $(\forall x \in \mathbb{R}) : -x \in \mathbb{R}$, et $(\forall x \in \mathbb{R})$:
$f(-x) + f(x) = -x^3 + 3x + 3 + x^3 - 3x + 3 = 6 = 2b$ donc $f(-x) = 2b - f(x)$:
Alors $I(0;3)$ le centre de symétrie de (C_f)
On a : $f(0) = 3$ et $f'(x) = 3x^2 - 3$ donc $f'(0) = -3$ alors : l'équation de la tangente (T) à C_f en $I(0;3)$ est : $(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ c-à-d :$(T) : y = -3x + 3$

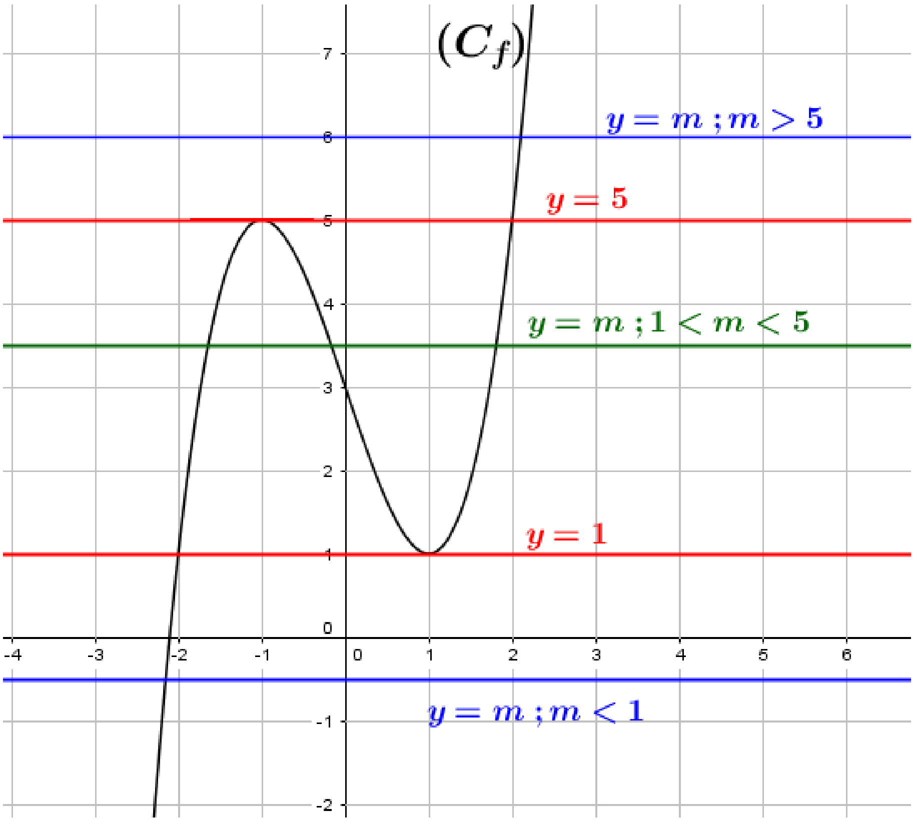
(4) Construire la courbe (C_f) :



5) Graphiquement les solutions de l'inéquation : $x^3 - 3x + 3 \geq 1$
C'est les abscisses des points de la courbe (C_f) où (C_f) est au dessus de la droite : $y = 1$
Graphiquement on a : $S = [-2;+\infty[$. De même on a :
$x^3 - 3x + 3 > 1 \Leftrightarrow x \in]-2;+\infty[\setminus\{1\}$
$x^3 - 3x + 3 > 5 \Leftrightarrow x \in]2;+\infty[$
$x^3 - 3x + 3 \leq 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty;2]$
$x^3 - 3x + 3 < 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty;2[\setminus\{-1\}$

4)b) Déterminons en fonction de m, le nombre de solutions de l'équation : $x^3 - 3x + 3 = m$:
Graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = m$ c'est les abscisses des points d'intersections de la courbe (C_f) et la droite d'équation $y = m$:

- Si : $m > 5$, alors l'équation $f(x) = m$: admet une seule solution.
- Si : $m = 5$, alors l'équation $f(x) = 5$: admet deux solutions, sont -1 et 2.
- Si : $1 < m < 5$, alors l'équation $f(x) = m$: admet trois solutions.
- Si : $m = 1$, alors l'équation $f(x) = 1$: admet deux solutions, sont -2 et 1.
- Si : $m < 1$, alors l'équation $f(x) = m$: admet une seule solution.



CHAPITRE 4

LES FONCTIONS PRIMITIVES :

4.1 Notion de fonction primitive :

Définition 4.1
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f admet une fonction primitive sur I s'il existe une fonction F dérivable sur I telle que : $(\forall x \in I) : F'(x) = f(x)$

Exemples :

- La fonction définie par : $x \mapsto F(x) = x^2$ est une fonction primitive de $x \mapsto f(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$ car : $(\forall x \in \mathbb{R}) : F'(x) = f(x)$
- La fonction définie par : $x \mapsto F(x) = \dfrac{-1}{x^2} + 3$ est une fonction primitive de $x \mapsto f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ sur $\mathbb{R}$ car : $(\forall x \in \mathbb{R}) : F'(x) = f(x)$

Remarque :

Pour montrer qu'une fonction F est une primitive de f sur un intervalle I, il suffit de montrer que :
• F est dérivable sur I et • $(\forall x \in I) : F'(x) = f(x)$.

Théorème 4.1
Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

4.2 Les primitive d'une fonction continue :

Théorème 4.2
Soit f une fonction continue sur in intervalle I.
Si F est une primitive de la fonction f sur I alors toutes les fonctions primitives de f sont définie par : $x \mapsto F(x) + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Théorème 4.3
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe une seule primitive F de f sur I tel que $F(a) = b$.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-1}{x^2} + 8x^3 - 3$

1. Montrer que la fonction définie par : $F(x) = \dfrac{1}{x} + 2x^4 - 3x$ est une fonction primitive de f sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer toutes les fonctions primitives de f sur $]0;+\infty[$
3. Déterminer la fonction primitive G de la fonction f tel que $G(1) = 2$.

4.3 Les opérations sur les fonctions primitive

Théorème 4.4
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si F et G sont respectivement les primitives de f et g sur I alors la fonction $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
La fonction λF est une primitive de λf sur I.

Remarque :

• Si F et G sont respectivement les primitives de f et g sur I alors la fonction $F \times G$ n'est pas une primitive de $f \times g$ sur I.
• $\dfrac{F}{G}$ n'est pas une primitive de $\dfrac{f}{g}$ sur I.

Proprieté 4.1
Si f et g deux fonctions dérivable et leurs dérivées sont continue sur un intervalle I alors :

- La fonction $f \cdot g$ est une primitive de $f'g + fg'$ sur I.
- Si $(\forall x \in I) : g(x) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est une primitive de la fonction $\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ sur I.

4.4 Fonctions primitive des fonctions usuelles :

La fonction f	La fonction primitive F	L'intervalle $I \subset D_F$
$x \mapsto 0$	$x \mapsto \lambda \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + \lambda \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + \lambda$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^r, \quad (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + \lambda$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos(ax+b) \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + \lambda \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax+b) \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + \lambda \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \ (k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto f' \cdot g + f \cdot g'$	$x \mapsto f \cdot g + \lambda, \ (\lambda \in \mathbb{R})$	f et g deux fonctions dérivables sur I
$x \mapsto \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$x \mapsto \frac{f}{g} + \lambda \ (\lambda \in \mathbb{R})$	f et g deux fcts dériv sur I et $g \neq 0$ sur I
$x \mapsto f' \cdot f^n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} f^{n+1} + \lambda, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	f est dérivable sur I
$x \mapsto f' \cdot f^r \ (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1} f^{r+1} + \lambda, \ (\lambda \in \mathbb{R})$	f est dérivable et str positive sur I
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + \lambda, \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$

La série des exercices :

exercice 1 :

I) Soit f la fonction définie par : $f(x) = -x+2$.
1) Montrer que f admet une fonction primitive sur $\mathbb{R}$.
2) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx$ avec a et b dans $\mathbb{R}$.
  a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $F'(x)$.
  b) Déterminer a et b tel que F soit une fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$.
  c) Déterminer toutes les fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$.
II) Déterminer toute les fonctions primitives de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 6x-4$

---

exercice 2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 8x^3 + 3x^2 + 6x$
1) Déterminer toutes les fonctions primitives de f sur $\mathbb{R}$
2) Déterminer la fonction primitive G de la fonction f telle que : $G(1) = 6$.

---

exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x^3 - 5$
1) Montrer que la fonction F définie par :
$F(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^4 - 5x$ est une fonction primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$
2) Déterminer toutes les fonctions primitives de f sur $\mathbb{R}$
3) Déterminer la fonction primitive G de la fonction f telle que : $G(4) = 10$

---

exercice 4 :

1) Montrer que la fonction : $F : x \mapsto x\cos(x)$ est une fonction primitive de $f : x \mapsto \cos(x) - x\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$
2) Soient F et G deux fonctions définies par :
$F(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ et $G(x) = \dfrac{x^2+7x-5}{x-1}$
Montrer que F et G sont deux fonctions primitive de la même fonction f sur $]0;+\infty[$.

---

exercice 5 :

Déterminer la fonction primitive de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et telle que : $F(0) = 1$

---

exercice 6 : $(f' \cdot f^r)$

Déterminer une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivantes :
1) $f(x) = (x+2)^3$ et $I = \mathbb{R}$
2) $f(x) = 2x(x^2+1)$ et $I = \mathbb{R}$
3) $f(x) = 2x(x^2+1)^5$ et $I = \mathbb{R}$;
4) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ et $I =]-1;+\infty[$
5) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$ et $I = \mathbb{R}$;
6) $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x) \quad I = \mathbb{R}$

---

exercice 7 :

Déterminer une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivantes :
1) $f(x) = \cos(3x)$ et $I = \mathbb{R}$;
2) $f(x) = \sin(4x+\pi)$ et $I = \mathbb{R}$
3) $f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$ et $I = \mathbb{R}$;
4) $f(x) = \dfrac{\cos(x) + x\sin(x)}{x^2}$ et $I =]0;+\infty[$
5) $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$ et $I =]-\frac{1}{2};+\infty[$
6) $f(x) = (x^2+x+1)\sqrt{x}$ et $I =]0;+\infty[$

7) $f(x) = 2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x)$ et $I = \mathbb{R}$

---

exercice 8 : (Exercice 18 p.103)

CHAPITRE 5

LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE :

5.1 Rappel :

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et et $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ et $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

1) Suite majorée - suite minorée - suite bornée
- On dit que : $(U_n)_{n\in I}$ est une suite majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que : $(\forall n \in I) : U_n \leq M$
- On dit que : $(U_n)_{n\in I}$ est une suite minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ telle que : $(\forall n \in I) : U_n \geq m$
- On dit que : $(U_n)_{n\in I}$ est une suite bornée s'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ telle que : $(\forall n \in I) : m \leq U_n \leq M$

2) Monotonie d'une suite :
- On dit que $(U_n)_{n\in I}$ est une suite croissante si et seulement si : $(\forall n \in I) : U_{n+1} \geq U_n$.
- ◦ si $(U_n)_{n\in I}$ est une suite croissante alors : $(\forall n \in I) : U_n \geq U_{n_0}$
- On dit que $(U_n)_{n\in I}$ est décroissante si et seulement si : $(\forall n \in I) : U_{n+1} \leq U_n$.
- ◦ Si $(U_n)_{n\in I}$ est une suite décroissante : $(\forall n \in I) : U_n \leq U_{n_0}$

3) Suite arithmétique - suite géométrique :

a) Suite arithmétique
- On dit que $(U_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$: $(\forall n \in I) : U_{n+1} = U_n + r$
- Le nombre r ne dépend pas de n est s'appelle la raison de la suite $(U_n)_{n\in I}$
- Si $(U_n)_{n\in I}$ est suite arithmétique alors : $(\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2) : U_n = U_p + (n-p)\cdot r$
- Calcule de la somme : $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = \dfrac{n-p+1}{2}(U_p + U_n)$ avec : $n \geq p$.

b) Suite géométrique :
- On dit que $(U_n)_{n\in I}$ est une Suite géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$: tel que $(\forall n \in I) : U_{n+1} = q \cdot U_n$
- Le nombre q ne dépend pas de n est s'appelle la raison de la suite $(U_n)_{n\in I}$
- Si $(U_n)_{n\in I}$ est une Suite géométrique alors : $(\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2) : U_n = U_p \cdot q^{(n-p)}$
- Calcule de la somme : $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \cdot \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ avec : $n \geq p$ et $q \neq 1$.

Exercice 1 :

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$

1) Calculer U_2 et U_3.

2) Montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 3.
3) Étudier la monotonie de $(U_n)_{n\geq 1}$, en déduire qu'elle est minorée par 2.
4) Soit $(V_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $V_n = U_n - 3$
   a) Montrer que $(V_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique et déterminer V_n en fonction de n.
   b) Calculer la somme : $S = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$
   c) En déduire : $S' = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \end{cases}$

1) Montrer que (U_n) est minorée par 0 et majorée par 4.
2) Montrer que (U_n) est croissante.
3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4 - U_n)$
   b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - U_n \leq 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

5.2 Suite convergente - Suite divergente :

5.2.1 Limite finie d'une suite :

Définition 5.1
Soient $p \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{R}$.
On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geq p}$ a pour limite l quand n tend vers $+\infty$ ou la suite $(U_n)_{n\geq p}$ converge vers l si pour tout réel positif r l'intervalle $]l-r; l+r[$ contient tous les termes de la suite $(U_n)_{n\geq p}$ à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n = l$
C'est à dire que pour tout réel strictement positif r on a : $U_n \in]l-r; l+r[$ à partir d'un certain rang.

Remarque :

Une suite est **convergente** si elle a une limite finie.

Théorème 5.1
Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(U_n)_{n\geq p}$ une suite numérique.

- *Si la suite $(U_n)_{n\geq p}$ est converge vers l alors l est unique.*
- $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} |U_n - l| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n - l = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n = l$

Théorème 5.2
$(\forall p \in \mathbb{N}^*) : \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0\,;\quad \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Exercice 1 : Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est converge vers 0.

Exercice 2 : Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par $U_n = \dfrac{3n^2+1}{n^2+1}$ est converge vers 3.

5.2.2 Limite infinie d'une suite :

Définition 5.2
Soit $p \in \mathbb{N}$.
On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geq p}$ a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ si pour tout réel positif A, l'intervalle $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite $(U_n)_{n\geq p}$ à partir d'un certain rang c'est à dire : $(\forall A > 0) : U_n > A$ à partir d'un certain rang.

On définie de manière analogue la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

Remarque :

- Une suite $(U_n)_{n\geq}$ est **divergente** si elle a une limite infinie ou si elle n'a pas de limite.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} -U_n = +\infty$.

Théorème 5.3
Les suites $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ et $(n^p)_{n\geq 0}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ sont divergentes et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

5.3 Opérations sur les limites

- **Limite de somme de deux suites :**

$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I**	

- **Limite de produit de deux suites :**

$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**0**	
$\lim\limits_{x\to+\infty} (u_n v_n)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I**	

- **Limite de l'inverse d'une suite :**

$\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$	$l \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{v_n}$	$\frac{1}{l}$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$

- **Limite de quotient de deux suites :**

$\lim\limits_{+\infty} u_n$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ $l>0$	$-\infty$ $l<0$	$+\infty$ $l>0$	$-\infty$ $l<0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{+\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I**	

Exercice :

Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ dans les cas suivantes :

1) $U_n = n - 2\sqrt{n}$
2) $U_n = \dfrac{2n^2+3n+1}{n^2+1}$
3) $U_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n}}$
4) $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

5.4 Limite de suites par comparaison (Critères de convergence) :

5.4.1 Convergence et comparaison :

Théorème 5.4
Soient $(U_n)_{n\geq p}$ et $(V_n)_{n\geq p}$ deux suites numériques :

- Si $V_n \geq U_n$ pour $n \geq p$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
- Si $\begin{cases} \forall n \geq p : |V_n - l| \leq U_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l$
- Si $\begin{cases} \forall n \geq p : V_n \leq U_n \leq W_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

Conséquences 5.1
Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(U_n)_{n\geq p}$ une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$.

- Si la suite $(U_n)_{n\geq p}$ est majorée par M alors $l \leq M$.
- Si la suite $(U_n)_{n\geq p}$ est minorée par m alors $l \geq m$.
- Si $\forall n \geq p \quad U_n \geq 0$ ou $U_n > 0$ alors $l \geq 0$

5.4.2 Divergence et comparaison :

Théorème 5.5
Soient (U_n) et (V_n) deux suites numériques :

- Si $\begin{cases} \forall n \geq p : V_n \geq U_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$
- Si $\begin{cases} \forall n \geq p : V_n \leq U_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$

Exercice 1 : Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $U_n = 3 + \dfrac{\sin(n)}{n}$
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$

Exercice 2 : Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n \geq n$.
2) En déduire la limite de la suite (U_n).

5.4.3 Convergence et la monotonie :

Théorème 5.6
Toute suite suite croissante et majorée **converge** .
Toute suite suite décroissante et minorée **converge** .

5.4.4 Divergence et la monotonie :

Théorème 5.7
Toute suite suite croissante non majorée **tend vers** $+\infty$.
Toute suite suite décroissante non minorée **tend vers** $-\infty$.

Exercice :

Soient $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2-U_n} \end{cases}$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n < 1$.
2) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
3) En déduire que $(U_n)_{n\geq 0}$ est converge.

5.5 Les suites particulier :

5.5.1 Suite de la forme : $U_n = f(n)$ et $U_n = n^r$

Théorème 5.8
Soient $p \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur l'intervalle $[p; +\infty[$
Si $(U_n)_{n\geq p}$ est suite définie par $U_n = f(n)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lambda$
($\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\lambda = +\infty$ ou $\lambda = -\infty$)

Exemple :

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{2x+1}{x-1}}_{f(x)} = 2 \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{2n+1}{n-1}}_{U_n} = 2$$

Proprieté 5.1
Soit $r \in \mathbb{Q}^*$:

- *Si $r > 0$, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = +\infty$.
- *Si $r < 0$, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = 0$.

Exemples :

- La suite (U_n) définie par $U_n = n^{\frac{2}{3}}$ est divergente car $\dfrac{2}{3} > 0$.
- La suite (U_n) définie par $U_n = n^{-\frac{1}{2}}$ est divergente car $-\dfrac{1}{2} < 0$.

5.5.2 La suite de la forme : $U_n = a^n$

Proprieté 5.2
Soit $a \in \mathbb{R}$:

- Si : $a > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.
- Si : $a = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 1$.
- Si : $-1 < a < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$.
- Si : $a \leq -1$ alors la suite $(a^n)_n$ est diverge, ($\lim\limits_{n \to +\infty} a^n$ n'existe pas).

Exercice :

Calculer les limites suivantes :
1) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{2})^n$; 2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$; 3) $\lim\limits_{n \to +\infty} (-2)^n$; 4) $\lim\limits_{n \to +\infty} (1{,}01)^n$.

5.5.3 La suite de la forme : $V_n = f(U_n)$:

Théorème 5.9
Soit $p \in \mathbb{N}$, et soient f une fonction définie sur un intervalle I.
Si $(U_n)_{n \geq p}$ est une suite convergente de limite l et $\forall n \geq p : U_n \in I$ et si f continue vers en l alors la suite $(V_n)_{n \geq p}$ définie par : $V_n = f(U_n)$ est converge vers $f(l)$.

C'est à dire si : $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l \\ f \text{ continue en } l \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = f(l)$.

Exemple : Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \cos\left(\dfrac{\pi n + 2}{4n + 3}\right)$,
on a la suite définie par $U_n = \dfrac{\pi n + 2}{4n + 3}$ converge vers $\dfrac{\pi}{4}$ et la fonction cos continue en $\dfrac{\pi}{4}$
alors la suite (V_n) est converge vers $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5.5.4 La suite de la forme : $U_{n+1} = f(U_n)$:

Activité :

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{4}U_n + 3 \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $3 \leq U_n \leq 4$.
2) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = U_n - 4$.
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
   b) Déterminer V_n en fonction de n en déduire U_n en fonction de n.
   c) En déduire $\lim_{n \to +\infty} U_n$
3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{4}x + 3$
   a) Vérifier que f est continue sur $[3;4]$.
   b) Montrer que : $f([3;4]) \subset [3;4]$.

c) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[3;4]$, (Que remarquez vous ?)

Théorème 5.10
Soit $p \in \mathbb{N}$, et f une fonction continue sur un intervalle I avec $f(I) \subset I$ et $(U_n)_{n\geq p}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_p \in I \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad ; \quad \forall n \geq p \end{cases}$
Si $(U_n)_{n\geq p}$ est converge vers $l \in I$, alors l est la solution de l'équation $f(x) = x$.

Exercice 1
Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+3}$
et soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) Vérifier que f est continue sur $[0;1]$ et montrer que $f([0;1]) \subset [0;1]$.
2) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0;1]$.
3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $U_n \in [0;1]$.
4) Montrer que (U_n) est croissante en déduire qu'elle est convergente.
5) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 2
Soient f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x+2$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $[2;3]$ et que : $f([2;3]) \subset [2;3]$.
2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $2 \leq U_n \leq 3$.
3) Étudier la monotonie de $(U_n)_{n\geq 1}$, en déduire qu'elle est converge.
4) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

5.5.5 La série des exercices :

exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :
1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n^2+2}{3n^2+6}$; 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1}$; 3) $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2)^n$; 4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\frac{\pi n^2+2}{3n^2+6})$
5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3n^2+2}-n$; 6) $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\frac{1}{5})^n$; 7) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n$; 8) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[5]{n^3}$; 9) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[4]{n^{-7}}$.

exercice 2 :

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{1}{6}U_n+5 \end{cases}$$

1) Calculer U_1 et U_2.
2) Montrer que $U_n < 6$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ (par récurrence)
3) Montrer que $(U_n)_{n\geq 0}$ est croissante en déduire qu'elle est bornée.
4) Soit $(V_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $V_n = U_n - 6$
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
   b) Calculer V_n en fonction de n, en déduire U_n en fonction de n.
   c) Calculer les sommes en fonction de n :

$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ et $T_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

5) Montrer que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

---

exercice 3 :

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 5 - \dfrac{9}{U_n + 1} \end{cases}$$

1) Montrer que (U_n) est minorée par 2.

2) Montrer que (U_n) est décroissante en déduire qu'elle est convergente.

3) Soit (V_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = \dfrac{1}{U_n - 2}$

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.

b) Déterminer V_n puis U_n en fonction de n.

c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

---

exercice 4 :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = \frac{2}{3}$ et $U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{2U_n + 3}$

1) Montrer que $0 < U_n < 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) Monter que que $(U_n)_{n\geq 0}$ est croissante en déduire qu'elle est convergente.

3) Soit $(V_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

b) Déterminer V_n puis U_n en fonction de$n$.

c) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

4) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+3}$

a) Vérifier que f est continue sur $[0;1]$

b) Montrer que f est croissante sur $[0;1]$

c) Déterminer $f([0;1])$

d) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0;1]$

e) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

5) a) Calculer : $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ en fonction n.

b) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

---

exercice 5 :

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \dfrac{8(U_n - 1)}{U_n + 2}$

1) Montrer que $2 < U_n < 4$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ (par récurrence)

2) Étudier la monotonie $(U_n)_{n\geq 0}$ en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - U_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - U_n)$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - U_n \leq (\frac{4}{5})^n$

c) Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3) Soit $(V_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $V_n = \dfrac{U_n - 4}{U_n - 2}$

a)Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

b) Déterminer V_n puis U_n en fonction de n.

c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

5) a) Calculer : $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ en fonction de n.

b) Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

---

exercice 6 : (Rattrapage 2015/2016)

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{16}U_n + \dfrac{15}{16}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > 1$

2) Vérifie que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} - U_n = -\dfrac{15}{16}(U_n - 1)$

3) En déduire que (U_n) est croissante puis déduire qu'elle est convergente.

4) a) Soit $V_n = U_n - 1$ Montre que (V_n) est une suite géométrique de la raison $\frac{1}{16}$ Déterminer V_n en fonction de n.

b) Montrer que : $U_n = 1 + (\frac{1}{16})^n$ pour tous n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de (U_n)

---

exercice 7 : (Normale 2015/2016)

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{3 + U_n}{5 - U_n}$

1) Vérifier que : $U_{n+1} - 3 = \dfrac{4(U_n - 3)}{2 + (3 - U_n)}$ puis montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n < 3$

2) a) Montrer que $V_n = \dfrac{U_n - 1}{3 - U_n}$ est une suite géométrique de la raison $\frac{1}{2}$ puis déduire que $V_n = (\frac{1}{2})^n$

b) Montrer que : $U_n = \dfrac{1 + 3V_n}{1 + V_n}$ Déterminer U_n en fonction de n en déduire sa limite.

---

exercice 6 : (Rattrapage 2016/2017)

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 17$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{4}U_n + 12$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > 16$

2) Montrer que (U_n) est décroissante en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Soit $V_n = U_n - 16$ Montrer que (V_n) est une suite géométrique

b) Déduire que $U_n = 16 + (\frac{1}{4})^n$ pour tous n de $\mathbb{N}$

c) Déterminer la limite de la suite (U_n)

d) Déterminer le plus petit entier n tel que $U_n < 16,0001$

Devoir libre $n^o 2$ S_1 :

Exercice 1

I) Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. .

b) Déterminer les branches infinies de la courbe (C_f). .

2) a) Montrer que : $\forall x\in]-1;+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{\sqrt{2}(x+2)}{2\sqrt{(1+x)}^3}$.

b) Donner le tableau de variations de la fonction f. .

c) Déterminer $f([0;1])$.

3) Montrer que : $f(x)-x=\dfrac{x(1-x)}{(\sqrt{1+x})(\sqrt{2}+\sqrt{1+x})}$ en déduire les positions relatives de (C_f) et la droite $D: y=x$.

4) Déterminer l'équation (Δ) de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0. .

5) Calculer $f''(x)$ pour tout x de $]1;+\infty[$ en déduire la concavité de (C_f) sur $]1;+\infty[$. .

6) Tracer la courbe (C_f) On prenons $\sqrt{2}\simeq 1,4$.

7) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^-1 définie sur un intervalle à déterminer. .

b) Tracer $(C_{f^{-1}})$ la courbe de f^{-1} dans le même repère. .

II) Considérons la suite (U_n) définie par : $U_0=\frac{1}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N}: U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}:\ 0<U_n<1$.

b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}:\ \dfrac{U_{n+1}}{U_n}>1$.

c) En déduire que (U_n) est convergente et déduire sa limite.

Exercice 2

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\dfrac{3U_n+4}{U_n+3}\end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}): 0<U_n<2$. .

2) Vérifier que : $U_{n+1}-U_n=\dfrac{(2+U_n)(2-U_n)}{3+U_n}$. .

3) En déduire que : (U_n) est convergente. .

4) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $V_n=\dfrac{U_n-2}{U_n+2}$

a) Montrer que : (V_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{5}$ et de premier terme $V_0=-\frac{1}{3}$.

b) Déterminer V_n en fonction de n en déduire que $U_n=2\cdot\dfrac{3-(\frac{1}{5})^n}{3+(\frac{1}{5})^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

c) Déterminer la limite de la suite (U_n) .

Exercice 3 (Questions indépendants)

I) Calculer la limite de la suite (U_n) dans les cas suivantes :

1) $U_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; 2) $U_n=\dfrac{4^n-(-1)^n}{4^n-3^n}$; 3) $U_n=n^{\frac{2}{3}}$; 4) $U_n=\dfrac{n^6-n^4}{n^7+n^3}$; 5) $U_n=\cos\left(\dfrac{4^n+2}{5^n+3^n}\right)$

II) Déterminer toutes les primitives de f sur l'intervalle I dans les suivantes :

1) $f(x)=x(x^2-6)^7$; $I=\mathbb{R}$; 2) $f(x)=\cos(x)\cdot\sin(x)^3$; $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=x\sqrt{x^2+2}$; $I=\mathbb{R}$; 4) $f(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+5)^2}$; $I=\mathbb{R}$

Correction du devoir libre $n^o 2\ S_1$

Exercice 1 :

I) Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}$,

1) a) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{2}}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}=+\infty$$

(car $=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}=0^+$).

et on a : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}=-\infty$, (car : $\lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt{1+x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}x\sqrt{2}=-\sqrt{2}<0$).

b) On a : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$: alors (C_f) admet une asymptote verticale d'équation : $x=-1$.

on a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}=0$: donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

2)a) La fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$, (quotient de deux fonctions) et $\forall x\in]-1;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
f'(x)=\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}\right)' &= \frac{(x\sqrt{2})'(\sqrt{1+x})-x\sqrt{2}(\sqrt{1+x})'}{\sqrt{1+x}^2}\\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+x}-x\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}^2}\\
&= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{1+x}^2-\sqrt{2}x}{2\sqrt{1+x}^2\sqrt{1+x}} \qquad \left(\dots\dots\dots\dots\times\frac{2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}}\right)\\
&= \frac{2\sqrt{2}(1+x)-\sqrt{2}x}{2\sqrt{1+x}^3}\\
&= \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}x-\sqrt{2}x}{2\sqrt{1+x}^3}\\
&= \frac{\sqrt{2}(x+2)}{2\sqrt{1+x}^3}
\end{aligned}$$

b) On a $(\forall x\in]-1;+\infty[)$: $f'(x)=\dfrac{\sqrt{2}(x+2)}{2\sqrt{1+x}^3}>0$ alors la fonction f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$:

Tableau de variations :

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) La fonction f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ en particulier sur $[0;1]$: alors on a : $f([0;1])=[f(0);f(1)]=[0;1]$

3)

$$\begin{aligned} f(x)-x=\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}-x &= \frac{x(\sqrt{2}-\sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x}}\left(\frac{\sqrt{2}^2-\sqrt{1+x}^2}{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}\right) \\ &= \frac{x(2-(1+x))}{\sqrt{1+x}(\sqrt{2}+\sqrt{1+x})} \\ &= \frac{x(1-x)}{\sqrt{1+x}(\sqrt{2}+\sqrt{1+x})} \end{aligned}$$

$$\left(Car : a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\right)$$

- Les positions relatives de la courbe (C_f) et la droite (D) : $y=x$.
  - ▷ Si : $f(x)-x\geq 0$ alors (C_f) est en dessus de la droite (D) : $y=x$.
  - ▷ Si : $f(x)-x\leq 0$ alors (C_f) est en dessous de la droite (D) : $y=x$.
  - ▷ Les points d'intersections de (C_f) et (D) sont les solutions de l'équation : $f(x)=x$.

On a le signe de $f(x)-x$ c'est le signe de $x(1-x)$:

x	-1		0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
Les positions relatives de (C_f) et (D)	‖	(C_f) est en dessous de (D)		(C_f) est en dessus de (D)		(C_f) est en dessous de (D)	

$(0;0)$ *est un point d'intersection de* (C_f) *et* (D)

$(1;1)$ *est un point d'intersection de* (C_f) *et* (D)

- ● (C_f) *est en dessous de* (D) *sur les intervalles* $]-1;0[$ *et* $]1;+\infty[$
- ● (C_f) *est en dessus de* (D) *sur l'intervalle* $]0;1[$
- ● *Les points d'intersections de* (C_f) *et* (D) *sont :* $(0;0)$ *et* $(1;1)$

4) La tangente de la courbe (C_f) en $(0;0)$ est :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ c'est à dire : $y=\sqrt{2}x$ $\left(Car\ f(0)=0\ et\ f'(0)=\frac{\sqrt{2}(0+2)}{2\sqrt{1+0}^3}=\sqrt{2}\right)$.

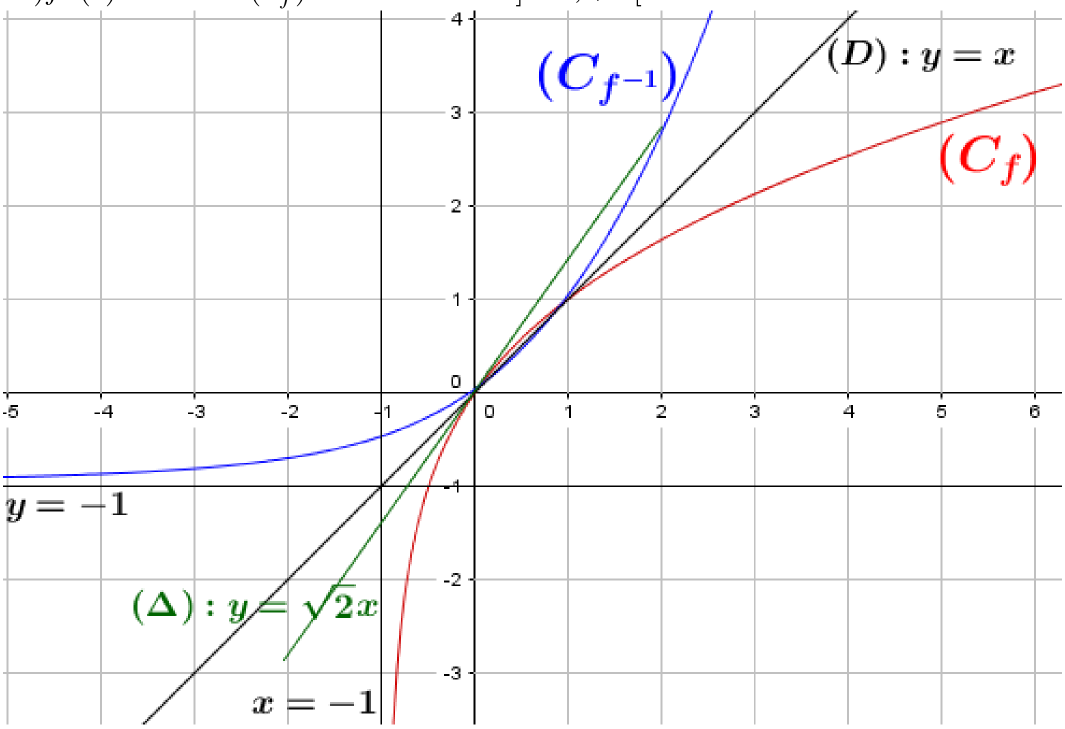
5) Calcule de $f''(x)$: La fonction f' est dérivable sur $]-1;+\infty[$ (quotient de deux fonctions dérivable) donc f est dérivable deux fois sur $]-1;+\infty[$ est : $(\forall x\in]-1;+\infty[)$:

$$
\begin{aligned}
f''(x) = \left(f'(x)\right)' &= \left(\frac{\sqrt{2}(x+2)}{2\sqrt{1+x}^3}\right)' \\
&= \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{1+x}^3) - \sqrt{2}(x+2)(2\sqrt{1+x}^3)'}{(2\sqrt{1+x}^3)^2} \\
&= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{1+x}^3 - \sqrt{2}(x+2) \times 2 \times \frac{3(1+x)^2}{2\sqrt{1+x}^3}}{4(1+x)^3} \\
&= \frac{2\sqrt{2}(1+x)^3 - \sqrt{2}(x+2) \times 3(1+x)^2}{4(1+x)^3\sqrt{1+x}^3} \\
&= \frac{2\sqrt{2}(1+x) - 3\sqrt{2}(x+2)}{4(1+x)^3\sqrt{1+x}^3} \\
&= \frac{2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}x}{4(1+x)^3\sqrt{1+x}^3} \\
&= \frac{-4\sqrt{2} - \sqrt{2}x}{4(1+x)^3\sqrt{1+x}^3} = \frac{-\sqrt{2}(x+4)}{4(1+x)^3\sqrt{1+x}^3}
\end{aligned}
$$

x	-1	$+\infty$
$f''(x)$		$-$
(C_f)		Concave

On a : $(\forall x \in]-1;+\infty) f''(x) < 0$ alors (C_f) est concave sur $]-1;+\infty[$:

6) La courbe (C_f) :



7) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-1;+\infty[$: donc admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur : $J = f(]-1;+\infty[) =]\lim_{x\to -1^+} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

b) Voir la courbe : (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétrique par rapport à la droite $(D) : y = x$.

$II)$ Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ 0 < U_n < 1$.

Pour $n = 0$ on a : $0 < U_0 = \frac{1}{2} < 1$. Supposons que : $0 < U_n < 1$ et montrons que : $0 < U_{n+1} < 1$: On a : $0 < U_n < 1 \Rightarrow f(0) < f(U_n) < f(1)$ car f est strictement croissante sur $[0;1]$, et par suite $0 < U_{n+1} < 1$

Car $f(U_n) = U_{n+1}$; $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$, alors d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < 1$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{f(U_n)}{U_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+U_n}}$

On a : $0 < U_n < 1$ alors : $1+U_n < 2$ donc : $\sqrt{1+U_n} < \sqrt{2}$ donc : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+U_n}} > 1$ et par suite : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} > 1$

On a donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} > U_n$ c'est à dire (U_n) est une suite croissante.

c) On a : (U_n) est une suite croissante et puisqu'elle est majorée alors elle est convergente.

D'autre part : On a $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \in [0;1] \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ et f continue sur $[0;1]$ et $f([0;1]) = [0;1] \subset [0;1]$.

alors la limite de la suite (U_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[0;1]$ on a : l'équation admet deux solutions 0 et 1, et puisque la suite (U_n) est croissante et $U_0 = \frac{1}{2}$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$.

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n+4}{U_n+3} \end{cases}$

1) • Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > 0$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 1 > 0$ supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$, on a :

$U_n > 0 \Rightarrow 3U_n + 4 > 0\, et\, U_n + 3 > 0$ et donc $U_{n+1} = \dfrac{3U_n+4}{U_n+3} > 0$, alors $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > 0$.

• Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n < 2$

Pour $n = 0$ on a : $U_0 = 1 < 2$, supposons que : $U_n < 2$ et montrons que : $U_{n+1} < 2$, on a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - 2 &= \frac{3U_n+4}{U_n+3} - 2 \\ &= \frac{3U_n+4-2U_n-6}{U_n+3} \\ &= \frac{U_n-2}{U_n+3} \end{aligned}$$

on a donc $U_n < 2 \Rightarrow U_{n+1} < 2$ alors d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n < 2$

et par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < 2$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} U_{n+1}-U_n=\frac{3U_n+4}{U_n+3}-U_n &= \frac{3U_n+4-U_n^2-3U_n}{U_n+3} \\ &= \frac{4-U_n^2}{U_n+3} \\ &= \frac{(2-U_n)(2+U_n)}{U_n+3} \end{aligned}$$

3) On a $2-U_n>0$ alors : $U_{n+1}-U_n>0$ et donc (U_n) est croissante et puisqu'elle est majorée alors elle est convergente.

4) Posons : $V_n=\dfrac{U_n-2}{U_n+2}$ on a :

$$\begin{aligned} V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-2}{U_{n+1}+2} &= \frac{\frac{3U_n+4}{U_n+3}-2}{\frac{3U_n+4}{U_n+3}+2} \\ &= \frac{\frac{3U_n+4-2U_n-6}{U_n+3}}{\frac{3U_n+4+2U_n+6}{U_n+3}} \\ &= \frac{U_n-2}{5U_n+10} \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{U_n-2}{U_n+2}\right)=\frac{1}{5}V_n. \end{aligned}$$

donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{5}$ et du premier terme : $V_0=\dfrac{U_0-2}{U_0+2}=-\dfrac{1}{3}$.

b) V_n en fonction de n : on a : $V_n=V_0\times q^n=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

Déterminons U_n en fonction de n :

$$\begin{aligned} V_n=\frac{U_n-2}{U_n+2} &\Rightarrow V_n(U_n+2)=U_n-2 \\ &\Rightarrow V_n\cdot U_n+2V_n-U_n+2=0 \\ &\Rightarrow U_n(V_n-1)=-2V_n-2 \\ &\Rightarrow U_n=\frac{-2V_n-2}{V_n-1} \\ &\Rightarrow U_n=2\times\frac{V_n+1}{1-V_n} \\ &\Rightarrow U_n=2\times\frac{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n+1}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n} \qquad \left(Car:\ V_n=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) \\ &\Rightarrow U_n=2\times\frac{-\left(\frac{1}{5}\right)^n+3}{3+\left(\frac{1}{5}\right)^n} \qquad \left(............\times\frac{3}{3}\right) \end{aligned}$$

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n=0$ car :$-1<\frac{1}{5}<1$, et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=2\times\dfrac{0+3}{3+0}=2$.

Devoir surveiller $n^o 2$ S_1

Exercice 1 (12.5 pts)	
Partie A :	
Soit f la fonction définie par : $f(x) = x(\sqrt{x}-2)^2$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$	
1) Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement les résultats,	1.5
2) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat,	1.25
3) a) Montrer que : $f'(x) = 2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)$	1
b) Donner le tableau de variations de la fonction f.	1.25
4) Montrer que le point $A\left(\dfrac{9}{4};\dfrac{9}{16}\right)$ est un point d'inflexion de (C_f).	1.25
5) a) Montrer que : $f(x)-x = \dfrac{x(x-1)(x-9)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}$	1
b) En déduire les positions relatives de (C_f) et la droite $D : y = x$	0.75
6) Tracer la courbe (C_f) ($\\|\vec{i}\\| = 1cm$)	1.25
Partie B :	
Considérons la suite (U_n) définie par : $U_0 = \dfrac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N} :\ U_{n+1} = f(U_n)$	
a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} :\ \dfrac{1}{4} < U_n < 1$	1
b) Montrer que : (U_n) est croissante en déduire qu'elle est convergente.	1.5
c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.	0.75
Exercice 2 (6 pts)	
Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n+2}{U_n+2} \end{cases}$	
1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ 1 \leq U_n < 2$.	1
2) a) Vérifier que : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n+1)(2-U_n)}{2+U_n}$.	1
b) Étudier la monotonie de (U_n)	0.75
c) En déduire que (U_n) est convergente.	0.5
3) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $V_n = \dfrac{U_n+1}{U_n-2}$	
a) Montrer que : (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$	0.75
b) Déterminer V_n en fonction de n.	0.5
c) Monter que $U_n = \cdot\dfrac{2V_n+1}{V_n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$	0.75
d) Déterminer la limite de la suite (U_n)	0.75
Exercice 3 (1.5)	
Déterminer toutes les primitives de f sur l'intervalle I dans les cas suivantes :	
1) $f(x) = 3x^2(x^3-6)^5$; $I = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \sqrt[5]{2x-2}$; $I =]1;+\infty[$	1.5

Devoir surveiller 2 S_1 **;** G_2

Exercice 1 (9 pts)	
Soient f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{2}{x}$ et C_f sa courbe représentatives dans d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$	
1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.	0.5
b) Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ En déduire la nature de l'asymptote à (C_f).	1.5
c) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	0.5
d) Montrer que la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.	1
2) a) Montrer que, $(\forall x \in D_f)$: $f'(x) = \frac{x^2-4}{2x^2}$	0.75
b) Donner le tableau de variations de la fonction f.	1
3) a) Montrer que, $(\forall x \in D_f)$: $f''(x) = \frac{4}{x^3}$	0.75
b) En déduire la concavité de la courbe (C_f).	0.75
4) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $(0; f(0))$	0.75
5) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.	1.5
Exercice 2 (7 pts)	
Soit (U_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{U_n+2} \end{cases}$	
1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 \leq U_n < 2$.	1
2) Montrer que : $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n+1)(2-U_n)}{2+U_n}$, en déduire la monotonie de (U_n).	1.75
3) En déduire que la suite (U_n) est converge.	0.5
4) On pose : $V_n = \frac{U_n+1}{U_n-2}$	
a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison : $q = 4$ et de premier terme : $V_0 = -2$	1.25
b) Déterminer V_n en fonction de n en déduire que : $U_n = \frac{4 \times 4^n - 1}{2 \times 4^n + 1}$	1.75
c) Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$	0.75
Exercice 3 (4 pts)	
1) Déterminer une primitive de la fonction f dans les cas suivantes : a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; b) $f(x) = (2x+1)^3$ et c) $f(x) = 2x\sqrt[4]{x^2+5}$	2
2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^3 + x^2 + 1$	
a) Déterminer tout les primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.	1
b) Déterminer G la primitive de la fonction g qui vérifier : $G(2) = \frac{8}{3}$	1

Exercice 1 :

1) a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\} = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2}x - 2 + \frac{2}{x} = +\infty$; (car : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2}x - 2 = -2$).

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{2}x - 2 + \frac{2}{x} = -\infty$; (car : $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{2}x - 2 = -2$).

(C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{2}x - 2 + \frac{2}{x} = +\infty$; (car : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{2}x - 2 = +\infty$).

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{2}x - 2 + \frac{2}{x} = -\infty$; (car : $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{2}x - 2 = -\infty$).

d) On a : $\lim\limits_{x\to \pm\infty} [f(x) - (\frac{1}{2}x - 2)] = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0$, alors la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

2) a) f est dérivable sur chaque intervalle de D_f (Somme de fonctions dérivable) et $(\forall x \in D_f)$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2 + \frac{2}{x}\right)' = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)' + \left(\frac{2}{x}\right)' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}.$$

b) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) f' est dérivable sur chaque intervalle de D_f (Somme de fonctions dérivable) donc f est dérivable deux fois sur chaque intervalle de D_f et $(\forall x \in D_f)$:

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}\right)' = -\frac{2\times -2x}{x^4} = \frac{4}{x^3}$$

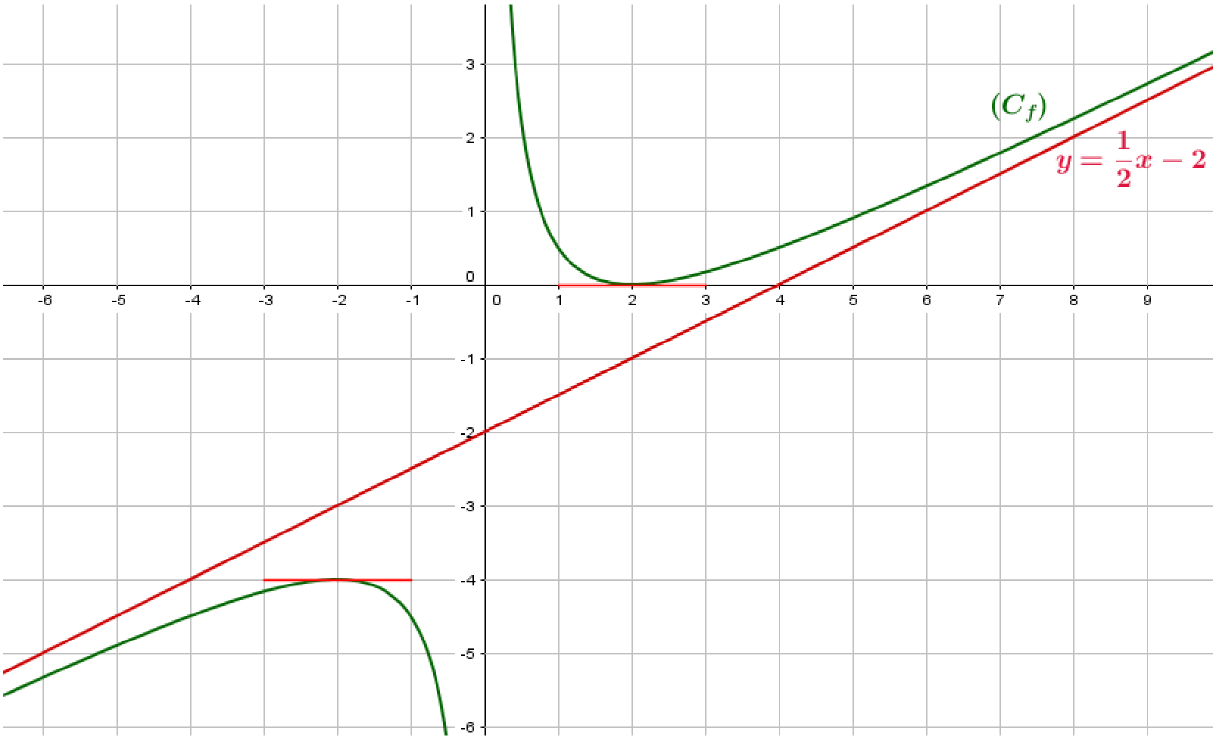
b) La concavité de la courbe (C_f) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	||	$+$
(C_f)	Concave	||	Convexe

4) L'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $(1; f(1))$.

$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{-3}{4}(x-1) + \frac{1}{2}$ donc : $y = \frac{-3}{4}x - \frac{1}{4}$.

5) La courbe de f : (C_f) :



Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{U_n + 2} \end{cases}$

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 \leq U_n \leq 2$.
Pour $n = 0$ on a : $1 \leq U_0 = 1 \leq 2$: vraie.
Supposons que : $1 \leq U_n \leq 2$ et montrons que : $1 \leq U_{n+1} \leq 2$.
On a : $1 \leq U_n \leq 2$ alors : $5 \leq 3U_n + 2 \leq 8$ et $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{U_n + 2} \leq \frac{1}{3}$ et donc : $1 \leq \frac{5}{4} \leq \frac{3U_n + 2}{U_n + 2} \leq \frac{8}{3}$
alors on a : $1 \leq U_{n+1}$. Pour l'autre inégalité il faut calculer la différence, en effet :
$U_{n+1} - 2 = \frac{3U_n + 2}{U_n + 2} - 2 = \frac{3U_n + 2 - 2U_n - 4}{U_n + 2} = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$. et comme $U_n \leq 2$ alors : $U_{n+1} \leq 2$.
D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 \leq U_n \leq 2$.

2) $U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n + 2}{U_n + 2} - U_n = \frac{3U_n + 2 - U_n^2 - 2U_n}{U_n + 2} = \frac{-U_n^2 + U_n + 2}{U_n + 2} = \frac{(U_n + 1)(2 - U_n)}{U_n + 2}$,
(car : $(U_n + 1)(2 - U_n) = 2U_n - U_n^2 + 2 - U_n = -U_n^2 + U_n + 2$).
On a : $U_n + 2 > 0$; $U_n + 1 > 0$ et $2 - U_n \geq 0$, alors $U_{n+1} - U_n \geq 0$ et donc (U_n) est croissante.

3) (U_n) est croissante et majorée par 2 alors (U_n) est converge.

4) a) $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} + 1}{U_{n+1} - 2} = \dfrac{\frac{3U_n + 2}{U_n + 2} + 1}{\frac{3U_n + 2}{U_n + 2} - 2} = \dfrac{\frac{3U_n + 2 + U_n + 2}{U_n + 2}}{\frac{3U_n + 2 - 2U_n - 4}{U_n + 2}} = \dfrac{4U_n + 4}{U_n - 2} = 4\left(\dfrac{U_n + 1}{U_n - 2}\right) = 4V_n$,
Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme :
$V_0 = \frac{U_0 + 1}{U_0 - 2} = \frac{2}{-1} = -2$.

b) On a :

$$\begin{aligned} V_n = \frac{U_n+1}{U_n-2} &\Leftrightarrow V_n(U_n-2) = U_n+1 \\ &\Leftrightarrow V_nU_n - 2V_n - U_n = 1 \\ &\Leftrightarrow U_n(V_n-1) = 2V_n+1 \\ &\Leftrightarrow U_n = \frac{2V_n+1}{V_n-1} \end{aligned}$$

On a : $V_n = V_0 \times q^n = -2 \times 4^n$, alors : $U_n = \dfrac{2V_n+1}{V_n-1} = \dfrac{2\times -2\times 4^n+1}{-2\times 4^n-1} = \dfrac{-4\times 4^n+1}{-2\times 4^n-1} = \dfrac{4\times 4^n-1}{2\times 4^n+1}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4^n\left(4-\dfrac{1}{4^n}\right)}{4^n\left(2+\dfrac{1}{4^n}\right)} = \dfrac{4-0}{2+0} = 2$, (car : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0\,;\ \ -1 < \dfrac{1}{4} < 1$).

Exercice 3 :

1) a) (0,5 pts) :
La fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ est **continue** sur $\mathbb{R}^+$, alors elle admet des primitives sur $\mathbb{R}^+$,
une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ est : $F(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$.

b) (0,75 pts) :
La fonction $x \mapsto f(x) = (2x+1)^3 = \dfrac{1}{2}(2x+1)'(2x+1)^3$ est **continue** sur $\mathbb{R}$, alors f admet des primitives sur $\mathbb{R}$,
une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ est : $F(x) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}(2x+1)^4 = \dfrac{1}{8}(2x+1)^4$

c) (0,75 pts) :
La fonction $x \mapsto f(x) = 2x\sqrt[4]{x^2+5} = (x^2+5)'(x^2+5)^{\frac{1}{4}}$ est **continue** sur $\mathbb{R}$, alors f admet des primitives sur $\mathbb{R}$,
une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est : $F(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{4}+1}(x^2+5)^{\frac{1}{4}+1} = \dfrac{4}{5}(x^2+5)^{\frac{5}{4}}$.

2) a) Les primitives de la fonction **continue** g sur $\mathbb{R}$ sont définies par : $x \mapsto \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 + x + \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

b) Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned} G(2) = \frac{8}{3} &\Leftrightarrow \frac{2^4}{4} + \frac{2^3}{3} + 2 + \lambda = \frac{8}{3} \\ &\Leftrightarrow 4 + \frac{8}{3} + 2 + \lambda = \frac{8}{3} \\ &\Leftrightarrow \lambda = -6 \end{aligned}$$

D'où : $x \mapsto G(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 + x - 6$.

Devoir surveiller 2 S_1 ; G_1 :

Exercice 1 (9 pts)	
Soient f la fonction définie par : $f(x) = x+1+\dfrac{1}{x+1}$	
et C_f sa courbe représentatives dans d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$	
1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.	0.5
b) Calculer : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ En déduire la nature de l'asymptote à (C_f).	1.5
c) Calculer : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$	0.5
d) Montrer que la droite d'équation : $y = x+1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.	1
2) a) Montrer que, $(\forall x \in D_f)$: $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$	1
b) Donner le tableau de variations de la fonction f.	1
3) a) Montrer que, $(\forall x \in D_f)$: $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$	1
b) En déduire la concavité de la courbe (C_f).	1
4) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.	1.5
Exercice 2 (7 pts)	
Soit (U_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n+2}{U_n+2} \end{cases}$	
1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $U_n > 2$	1
2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n+1)(2-U_n)}{U_n+2}$, en déduire la monotonie de (U_n).	1.75
3) En déduire que la suite (U_n) est converge.	0.5
4) On pose : $V_n = \dfrac{U_n-2}{U_n+1}$	
a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison : $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme : $V_0 = \dfrac{1}{4}$	1.25
b) Déterminer V_n en fonction de n en déduire que : $U_n = \dfrac{2+\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}$	1.75
c) Calculer : $\lim\limits_{n\to +\infty} U_n$	0.75
Exercice 3 (4 pts)	
1) Déterminer une primitive de la fonction f dans les cas suivantes :	
a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$; b) $f(x) = x(x^2+5)^3$ et c) $f(x) = 2x\sqrt{x^2+5}$	2
2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = 4x^3+3x^2+1$	
a) Déterminer tout les primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.	1
b) Déterminer G la primitive de la fonction g qui vérifier : $G(1) = 5$	1

Exercice 1 :

1) a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x+1+\dfrac{1}{x+1} = +\infty$; (car : $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} x+1 = 0$).

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} x+1+\dfrac{1}{x+1} = -\infty$; (car : $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1}{x+1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} x+1 = 0$).

(C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x+1+\dfrac{1}{x+1} = +\infty$; (car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x+1 = +\infty$).

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x+1+\dfrac{1}{x+1} = -\infty$; (car : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x+1 = -\infty$).

d) On a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, alors la droite d'équation : $y = x+1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

2) a) f est dérivable sur chaque intervalle de D_f (Somme de fonctions dérivable) et $(\forall x \in D_f)$:

$$f'(x) = \left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)' = (x+1)' + \left(\frac{1}{x+1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

b) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

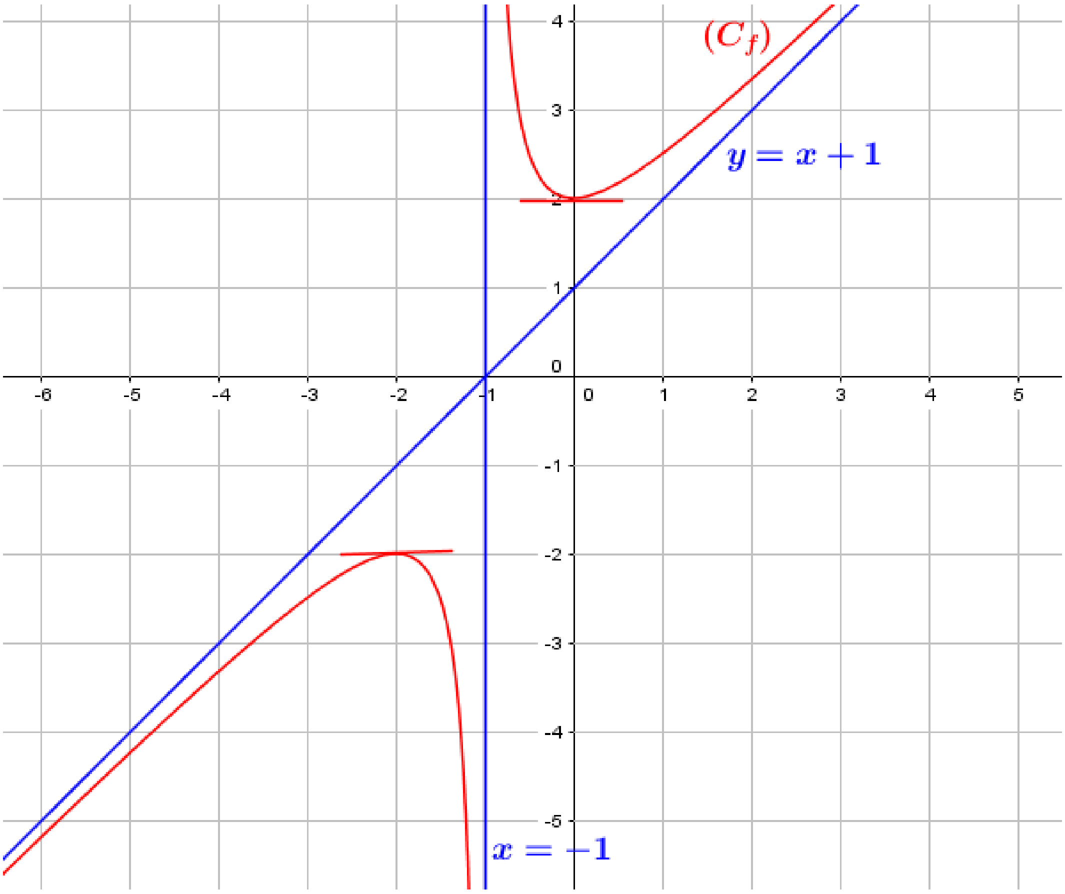
3) a) f' est dérivable sur chaque intervalle de D_f (Somme de fonctions dérivable) donc f est dérivable deux fois sur chaque intervalle de D_f et $(\forall x \in D_f)$:

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right)' = -\frac{-2 \times (x+1)'(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

b) La concavité de la courbe (C_f) :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	||	$+$
(C_f)	Concave	||	Convexe

4) La courbe de f : (C_f) :



Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{U_n + 2} \end{cases}$

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $U_n > 2$.
Pour $n = 0$ on a : $U_0 = 1 > 2$: vraie.
Supposons que : $U_n > 2$ et montrons que : $U_{n+1} > 2$.
Il faut calculer la différence, en effet :
$U_{n+1} - 2 = \dfrac{3U_n + 2}{U_n + 2} - 2 = \dfrac{3U_n + 2 - 2U_n - 4}{U_n + 2} = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 2}$. et comme $U_n > 2$ alors : $U_{n+1} > 2$.
D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $U_n > 2$.

2) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{3U_n + 2}{U_n + 2} - U_n = \dfrac{3U_n + 2 - U_n^2 - 2U_n}{U_n + 2} = \dfrac{-U_n^2 + U_n + 2}{U_n + 2} = \dfrac{(U_n + 1)(2 - U_n)}{U_n + 2}$,
(car : $(U_n + 1)(2 - U_n) = 2U_n - U_n^2 + 2 - U_n = -U_n^2 + U_n + 2$).
On a : $U_n + 2 > 0$; $U_n + 1 > 0$ et $2 - U_n < 0$, alors $U_{n+1} - U_n < 0$ et donc (U_n) est décroissante.

3) (U_n) est décroissante et minorée par 2 alors (U_n) est converge.

4) a) $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{3U_n + 2}{U_n + 2} - 2}{\dfrac{3U_n + 2}{U_n + 2} + 1} = \dfrac{\dfrac{3U_n + 2 - 2U_n - 4}{U_n + 2}}{\dfrac{3U_n + 2 + U_n + 2}{U_n + 2}} = \dfrac{U_n - 2}{4U_n + 4} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{U_n - 2}{U_n + 1}\right) = \dfrac{1}{4}V_n$,

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $V_0 = \dfrac{U_0 - 2}{U_0 + 1} = \dfrac{1}{4}$.

b) On a :

$$\begin{aligned} V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1} &\Leftrightarrow V_n(U_n+1) = U_n - 2 \\ &\Leftrightarrow V_nU_n + V_n - U_n = -2 \\ &\Leftrightarrow U_n(V_n - 1) = -V_n - 2 \\ &\Leftrightarrow U_n = \frac{-V_n - 2}{V_n - 1} \\ &\Leftrightarrow U_n = \frac{2 + V_n}{1 - V_n} \end{aligned}$$

On a : $V_n = V_0 \times q^n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$, alors : $U_n = \frac{2+V_n}{1-V_n} = \frac{2+\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{2+V_n}{1-V_n} = \frac{2+\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}} = \frac{2+0}{1-0} = 2$, (car : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$; $-1 < \frac{1}{4} < 1$).

Exercice 3 :

1) a) (0,5 pts) :
La fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$ est **continue** sur $\mathbb{R}^+$, alors elle admet des primitives sur $\mathbb{R}^+$,
une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ est : $F(x) = \frac{1}{\frac{1}{5}+1}x^{1+\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}$.

b) (0,75 pts) :
La fonction $x \mapsto f(x) = x(x^2+5)^3 = \frac{1}{2}(x^2+5)'(x^2+5)^3$ est **continue** sur $\mathbb{R}$, alors f admet des primitives sur $\mathbb{R}$,
une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ est : $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}(x^2+5)^4 = \frac{1}{8}(x^2+5)^4$

c) (0,75 pts) :
La fonction $x \mapsto f(x) = 2x\sqrt{x^2+5} = (x^2+5)'(x^2+5)^{\frac{1}{2}}$ est **continue** sur $\mathbb{R}$, alors f admet des primitives sur $\mathbb{R}$,
une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est : $F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x^2+5)^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}}$.

2) a) Les primitives de la fonction **continue** g sur $\mathbb{R}$ sont définies par : $x \mapsto x^4 + x^3 + x + \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

b) Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned} G(1) = 5 &\Leftrightarrow 1+1+1+\lambda = 5 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 2 \end{aligned}$$

D'où : $x \mapsto G(x) = x^4 + x^3 + x - 2$.

Devoir surveiller 2 s_1 Modèle B

Exercice 1 (11.5 pts) **Partie 1**	
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 4 - \sqrt{x^2+7}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$	
1) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$ puis interpréter ce résultat géométriquement.	1.25
2) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 4$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.	1
3) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R};\ f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+7} - x}{\sqrt{x^2+7}}$	1
b) En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$.	0.5
4) a) Montrer que : $f(x) - x = \dfrac{9 - x^2}{4 + \sqrt{x^2+7}}$	1
b) Étudier les positions relatives de la courbe (C_f) et la droite (D) : $y = x$	1.25
5) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R};\ f''(x) = \dfrac{-7}{(\sqrt{x^2+7})^3}$ En déduire la concavité de (C_f) sur $\mathbb{R}$.	1
6) Construire la courbe (C_f) et les asymptotes, et la droite (D) (On donne $f(3) = 3$ et $f(-3) = -3$)	1.5
Partie 2	
Soit (U_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$	
1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}:\ -3 \leq U_n \leq 3$	1
2) Étudier la monotonie de la suite (U_n) sur $\mathbb{N}$	1
3) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite. ($I = [-3;3]$).	1
Exercice 2 (6.5 pts)	
Soit (U_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\begin{cases} U_0 = \dfrac{2}{3} \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{2U_n + 3} \end{cases}$	
1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 < U_n < 1$.	1
2) Montrer que : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2(1-U_n)(1+U_n)}{2U_n + 3}$, en déduire la monotonie de (U_n).	1.5
3) En déduire que la suite (U_n) est converge.	0.5
4) On pose : $V_n = \dfrac{U_n + 1}{U_n - 1}$	
a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison : $q = 5$ et de premier terme : $V_0 = -5$	1.25
b) Déterminer V_n en fonction de n en déduire que : $U_n = \dfrac{-5 \times 5^n + 1}{-5 \times 5^n - 1}$	1.5
c) Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$	0.75
Exercice 3 (2 pts) 1) Déterminer une primitive de la fonction f dans les cas suivantes :	
a) $f(x) = (2x+1)^4$; b) $f(x) = x^2(x^3+1)^3$.	1
2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x\sqrt{x}$.	
a) Déterminer tout les primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.	0.5
b) Déterminer G la primitive de la fonction g qui vérifier : $G(1) = 0$	0.5

Devoir surveiller 2 s_1 Modèle C

Exercice 1 (13.5 pts) **Partie 1**	
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x+2-\sqrt{x^2+1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$	
1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ puis interpréter ce résultat géométriquement.	1
2) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x+2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.	1
3) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R};\ f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}$	1
b) En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$.	0.5
4) a) Montrer que : $f(x)-x = \dfrac{3-x^2}{2+\sqrt{x^2+1}}$	0.75
b) Étudier les positions relatives de la courbe (C_f) et la droite (D) : $y = x$	1
5) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R};\ f''(x) = \dfrac{-1}{(\sqrt{x^2+1})^3}$ En déduire la concavité de (C_f) sur $\mathbb{R}$.	1.25
6) Construire la courbe (C_f) et les asymptotes, et la droite (D) (On donne $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ et $f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ et $\sqrt{3} \simeq 1,7$)	1.5
7) a) Déterminer toutes les primitives de la fonction h définie par : $h(x) = xf(x)$	1
b) Déterminer H la primitive de la fonction h qui vérifier : $H(0) = 1$	0.75
c) Déterminer une primitive de la fonction g définie par : $g(x) = (x^2+1)\sqrt{x}$	0.75
Partie 2	
Soit (U_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$	
1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $-\sqrt{3} \leq U_n \leq \sqrt{3}$	1
2) Étudier la monotonie de la suite (U_n) sur $\mathbb{N}$	1
3) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite. ($I = [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$).	1
Exercice 2 (6.5 pts)	
Soit (U_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{4} \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n+3}{3U_n+4} \end{cases}$	
1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 < U_n < 1$.	1
2) Montrer que : $U_{n+1}-U_n = \dfrac{3(1-U_n^2)}{3U_n+4}$, en déduire la monotonie de (U_n).	1.5
3) En déduire que la suite (U_n) est converge.	0.5
4) On pose : $V_n = \dfrac{U_n+1}{U_n-1}$	
a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison : $q = 7$ et de premier terme : $V_0 = -7$	1.25
b) Déterminer V_n en fonction de n en déduire que : $U_n = \dfrac{-7^{n+1}+1}{-7^{n+1}-1}$	1.5
c) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	0.75

Devoir surveiller 2 s_1 Modèle D

Exercice 1 (11.5 pts) **Partie 1**	
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+3-\sqrt{x^2+5}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$	
1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ puis interpréter ce résultat géométriquement.	1.25
2) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=2x+3$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.	1
3) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+5}-x}{\sqrt{x^2+5}}$	1
b) En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$.	0.5
4) a) Montrer que : $f(x)-x=\dfrac{4-x^2}{4+\sqrt{x^2+5}}$	1
b) Étudier les positions relatives de la courbe (C_f) et la droite (D) : $y=x$	1.25
5) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=\dfrac{-5}{(\sqrt{x^2+5})^3}$ En déduire la concavité de (C_f) sur $\mathbb{R}$.	1
6) Construire la courbe (C_f) et les asymptotes, et la droite (D) (On donne $f(2)=2$ et $f(-2)=-2$)	1.5
Partie 2	
Soit (U_n) la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$	
1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}:\ -2\leq U_n\leq 2$	1
2) Étudier la monotonie de la suite (U_n) sur $\mathbb{N}$	1
3) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite. ($I=[-2;2]$).	1
Exercice 2 (6.5 pts)	
Soit (U_n) la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $\begin{cases} U_0=\dfrac{2}{3} \\ U_{n+1}=\dfrac{3U_n+2}{2U_n+3}\end{cases}$	
1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $0<U_n<1$.	1
2) Montrer que : $U_{n+1}-U_n=\dfrac{2(1-U_n)(1+U_n)}{2U_n+3}$, en déduire la monotonie de (U_n).	1.5
3) En déduire que la suite (U_n) est converge.	0.5
4) On pose : $V_n=\dfrac{U_n-1}{U_n+1}$	
a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison : $q=\dfrac{1}{5}$ et de premier terme : $V_0=-\dfrac{1}{5}$	1.25
b) Déterminer V_n en fonction de n en déduire que : $U_n=\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^n-5}{-\left(\frac{1}{5}\right)^n-5}$	1.5
c) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	0.75
Exercice 3 (2 pts) 1) Déterminer une primitive de la fonction f dans les cas suivantes :	
a) $f(x)=(3x+1)^4$; b) $f(x)=x^2(x^3+8)^3$.	1
2) Soit g la fonction définie par : $g(x)=x\sqrt{x}$.	
a) Déterminer tout les primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.	0.5
b) Déterminer G la primitive de la fonction g qui vérifier : $G(1)=-\dfrac{1}{3}$	0.5

CHAPITRE 6

LES FONCTIONS LOGARITHMES :

6.1 Fonction logarithme népérien :

6.1.1 Introduction :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$,
On a f est continue sur $]0;+\infty[$ donc elle admet des primitives sur $]0;+\infty[$.

Définition 6.1
La fonction primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 est appelé la fonction **logarithme népérien** noté ln .

Remarque :

On a $ln(1) = 0$ et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $ln'(x) = \frac{1}{x}$.

6.1.2 Propriétés de la fonction logarithme népérien :

Activité :

1) Montrer que la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Soit F la fonction définie par : $F(x) = \ln(ax)$ tel que $a \in \mathbb{R}_+^*$.
   a) Montrer que F est une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) En déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
   c) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : \ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$.
3) a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
   b) Montrer que $(\forall (a;b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2) : \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
   c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ln(a^n) = n\ln(a)$.

Remarques :

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0;+\infty[$.
- $\ln(1) = 0$.
- La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exercice :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln(x) + \ln(x-1)$
2) $g(x) = \ln(x^2 - x)$
3) $h(x) = \ln\left(\dfrac{x-4}{x-1}\right)$

Proprieté 6.1
La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Conséquences :

Soient $x; y \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$
- $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- Tableau de signe de la fonction ln :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	|	$-$	0	$+$	

Proprietés algébriques 6.1
Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln(y)$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

En générale : pour tous $x_1; x_2; \cdots; x_n \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\ln(x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \cdots + \ln(x_n)$ c'est à dire : $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$.
- $(\forall r \in \mathbb{Q}) : \ln(x^r) = r\ln(x)$: cas particulier $\ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$.

Remarques :
Soient $a; b \in \mathbb{R}_-^*$: alors $a \cdot b > 0$:

- $\ln(a \cdot b) = \ln(|a|) + \ln(|b|)$.
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(|a|) - \ln(|b|)$.

Exercice 1 :

Soient $a;b \in \mathbb{R}_+^*$: on pose $\alpha = \ln(a)$ et $\beta = \ln(b)$.
Exprimer $\ln(a^2 \cdot b^5)$ et $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{a^7 \cdot b}}\right)$ en fonction de α et β.

Exercice 2 :

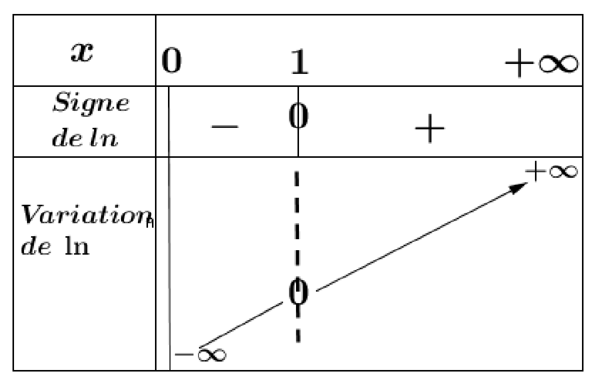
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1) $\ln(2x-1) - \ln(x) = 0$
2) $\ln(x^2 - x) = \ln(4x-6)$
3) $\ln(3x+2) \leq 0$
4) $\ln(x+2) + \ln(x) > \ln(3)$

6.1.3 Limite aux bornes - branches infinies :

Proprieté 6.2

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$; • $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$; • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
- La courbe de la fonction ln admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.
- L'axe des ordonnée $(x = 0)$ est une asymptote verticale à la courbe de la fonction ln.
- Tableau de variation de ln :



Exercice : Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

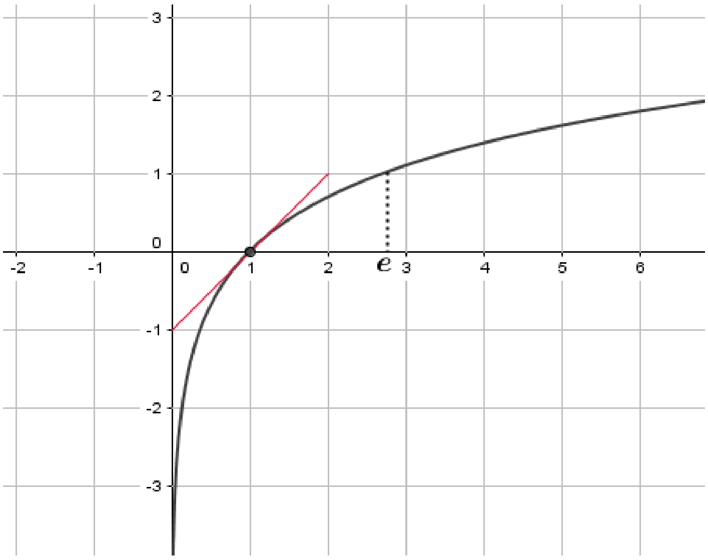
6.1.4 Le nombre :

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ alors : l'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution noté e. On a $\ln(e) = 1$ $(e \simeq 2,71828)$
On a aussi : $(\forall r \in Q) : \ln(e^r) = r$.

6.1.5 La concavité de la fonction ln :

La fonction ln est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\ln''(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ alors la courbe de la fonction ln est concave.

6.1.6 La courbe de la fonction $\ln$:



x	0		1		e		$+\infty$
Signe de $\ln$	||	$-$	0		$+$		
Variation de $\ln$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

6.1.7 Limites important :

Proposition 1

▷ • $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$; • $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$; • $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

▷ • $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$; • $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$; • $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$:

(Changement de variable on pose $t = \frac{1}{x}$)

▷ • $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$; • $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(h+1)}{h} = 1$: *(Le nombre dérivé de la fonction $\ln$ en 1.)*

6.1.8 Dérivée logarithmique - primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Théorème 6.1

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I :

• Si u est strictement positive sur I alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et on a : $(\ln(u(x)))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Conséquences 6.1

Les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont : $x \mapsto \ln(|u(x)|) + k$ / $k \in \mathbb{R}$

Exercice 1 :

Étudier la dérivabilité de la fonction f et déterminer f' dans chacune des cas suivantes :

1) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$; 2) $f(x) = \ln(x^2+1)$; 3) $f(x) = \ln(x^2-4)$

Exercice 2 :

Déterminer les primitives de f dans chacune des cas suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{2}{2x+1}$; 2) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}$; 3) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

6.2 Fonction logarithme de base a :

6.2.1 Définition et propriétés :

Définition 6.2
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, on appelle fonction logarithme de base a la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :
$\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Remarque : $\log_e(x) = \ln(x)$; $\log_a(a) = 1$; $(\forall r \in \mathbb{Q}) : \log_a(a^r) = r$.

Exemple : $\log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)} = k \cdot \ln(x)$ avec $k = \dfrac{1}{\ln(2)}$.

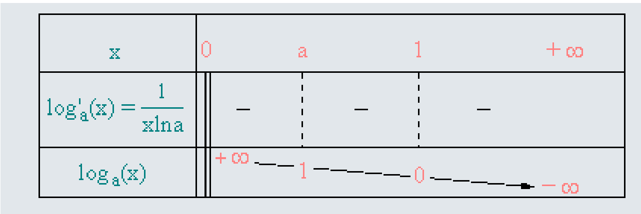
Proprieté 6.3
Soient $x; y \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

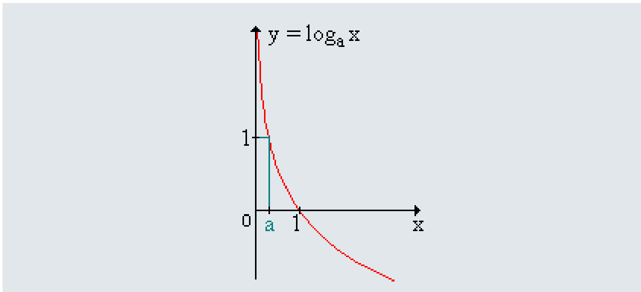
- $\log_a(1) = 0$; $\log_a(a) = 1$ et $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ et $(\forall r \in \mathbb{Q}) : \log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$
- $\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y$

6.2.2 Étude de la fonction logarithme de base a :

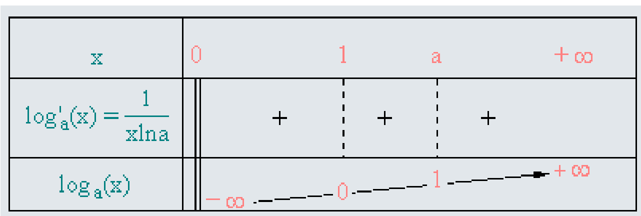
Théorème 6.2
La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et
$(\forall x \in]0;+\infty[) : (\log_a(x))' = \left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \dfrac{1}{x\ln(a)}$

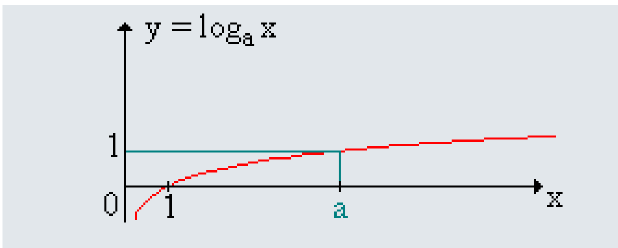
▷ Si $0 < a < 1$ alors $(\log_a(x))' < 0$ donc $\log_a$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
• Tableau de variation et la courbe :





▷ Si $a > 1$ alors $(\log_a(x))' > 0$ donc $\log_a$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
• Tableau de variation et la courbe :





Exemples :

Si : $a = 2 : \log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)} = \dfrac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x)$:
Donner le tableau de variation de $\log_2$ et tracer sa courbe.

Si : $a = \frac{1}{2} : \log_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(\frac{1}{2})} = -\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)} = -\log_2(x)$:
Donner le tableau de variation de $\log_{\frac{1}{2}}$ et tracer sa courbe.

6.2.3 Fonction logarithme décimal :

Définition 6.3
On appelle fonction **logarithme décimal**, noté $\log_{10}$ ou log, la fonction définie par :
$\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Remarque : $\log_{10}(10) = 1$; $\log_{10}(1) = 0$; $(\forall r \in \mathbb{Q}) : \log_{10}(10^r) = r$.

Exercice 1 :

Développer les expressions suivantes :
$A = \log_2(8) - \log_2(\sqrt[3]{32}) + \log_2(9) - \log_2(3)$
$B = \log\left(\dfrac{1}{10}\right) \times \log(10^{25}) + \log(\dfrac{1}{1000})$
$C = \log_2(\sqrt{2}) + \log_{\sqrt{2}}(4)$

Exercice 2 :

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1) $\log_2(x-4) + \log_2(2x-1) = \log_2(4)$
2) $\log_x(4) = \log_4(x)$
3) $1 < \log_3(x) < 2$
4) $\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2) - \log_{\frac{1}{3}}(x) < \log_3(x)$

Exercice 3 :

Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \log(x^2+x+1)$; 2) $f(x) = \log(x^2-4)$; 3) $f(x) = \log\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

6.2.4 La séries des exercices $n^o 6$:

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \ln(x^2-3x+2)$; 2) $f(x) = \dfrac{3x}{1-\ln(x)}$; 3) $f(x) = \ln(\ln(x))$; 4) $f(x) = \sqrt{1-(\ln(x))^2}$.

Exercice 2

1) Résoudre les équations suivantes (après avoir déterminer son ensemble de définition) :

a) $\ln(x-2) + \ln(x-1) = \ln(3)$

b) $\ln(|x-2|)+\ln(|x-1|)=\ln(6)$

c) $2\ln(2x-1)-3\ln(1-x)=0$

d) $\log_2(x-4)+\log_2(2x-1)=\log_2(10)$

e) $\log(2x-10)=2$

2) Résoudre les inéquations suivantes (après avoir déterminer son ensemble de définition) :

a) $\ln(5x+10)\leq 0$

b) $\ln(3x-2)\leq \ln(x-1)$

c) $\log(5x-10)\leq 3$

Exercice 3

Étudier la dérivabilité de la fonction f et calculer $f'(x)$ dans les cas suivantes :

1) $f(x)=\ln(2x-\sqrt{x-1})$

2) $f(x)=\ln(1-\ln(x))$

3) $f(x)=\log(x^2-1)$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=\sqrt{x}-\ln(x)$

1) Étudier les variations de la fonction f et en déduire que f admet un minimum sur $]0;+\infty[$.

2) En déduire le signe de f puis montrer que : $(\forall x>1):0<\dfrac{\ln(x)}{x}<\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

3) Déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $f(x)=1-\dfrac{1}{x}+\ln(x)$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Calculer $f(1)$ en déduire le signe de $f(x)$.

2) Soit g la fonction définie par : $g(x)=(x-1)\ln(x)$:

a) Déterminer D_g et calculer les limites de g aux bornées de D_g.

b) Montrer que : $(\forall x\in D_g):g'(x)=f(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de g.

d) Étudier les positions relatives de (C_g) et la droite $(D):y=x-1$.

e) Étudier les branches infinies de la courbe (C_g).

f Tracer la courbe (C_g) dans un repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 6 :

Exercice 1

I) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2(x) + 2\ln(x)$.

Le tableau suivant est le tableau de variations de la fonction g sur $]0;+\infty[$:

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$\|$ $\qquad$ $+$
$g(x)$	$\|$ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

1) Calculer $g(1)$.

2) À partir de tableau de variations déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$.

II) Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x^2} + \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2$ et (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que la droite $(D) : y = x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer les positions relatives de la droite (D) et (C_f).

2) Montrer que : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, et interpréter géométriquement le résultat.

3) a) Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[) : f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

b) Montrer que f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

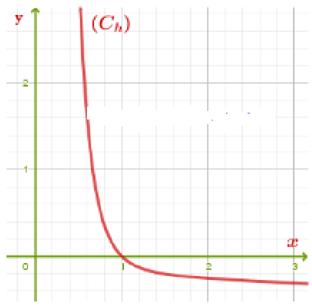
c) Déterminer le tableau de variations de la fonction f.

4) Construire la courbe (C_f) ($\|\vec{i}\| = 1$ cm).

III) Soit h la fonction définie par : $h(x) = f(x) - x$

1) a) Montrer que $h(1) = 0$.

b) À partir de (C_h) la courbe de la fonction h
Déterminer le signe de $h(x)$ sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$
en déduire que $f(x) \leq x$ sur $[1;+\infty[$



2) On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = e$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq U_n \leq e$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Solution de l'exercice 6 :

I) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^3-1-2\ln^2(x)+2\ln(x)$.

Le tableau suivant est le tableau de variations de la fonction g sur $]0;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	|	+	
$g(x)$	| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

1) $g(1)=1^3-1-2\ln^2(1)+2\ln(1)=1-1-0+0=0$.

2) À partir de tableau de variations la fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $g(1)=0$ alors :

- Si $x\in]0;1]$: $0<x\leq 1\Rightarrow g(x)\leq g(1)$ c'est à dire : $g(x)\leq 0$ donc g négative sur $]0;1]$.
- Si $x\in[1;+\infty[$: $x\geq 1\Rightarrow g(x)\geq g(1)$ c'est à dire : $g(x)\geq 0$ donc g positive sur $[1;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	|	-	0	+	

II) Soit f la fonction définie par : $f(x)=x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x^2}+\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x^2}+\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2=+\infty$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2=0$

b) Montrons que la droite (D) : $y=x-\dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x^2}+\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2=0$$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2=0$

c) Déterminons les positions relatives de la droite (D) et (C_f) :

Il faut étudier le signe de la différence, on a : $f(x)-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2x^2}+\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2>0$

car : $\dfrac{1}{2x^2}>0$ et $\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2>0$ pour tous $x\in\mathbb{R}_+^*$:

alors la courbe (C_f) est en dessus de la droite (D) sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) On a : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)\times\dfrac{1}{x}=-\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2=+\infty$ et comme :

$\lim\limits_{x\to0^+}x-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{2x^2}=+\infty$ alors :

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ et (C_f) admet une asymptote verticale d'équation : $x=0$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ somme de fonctions dérivables et $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$:

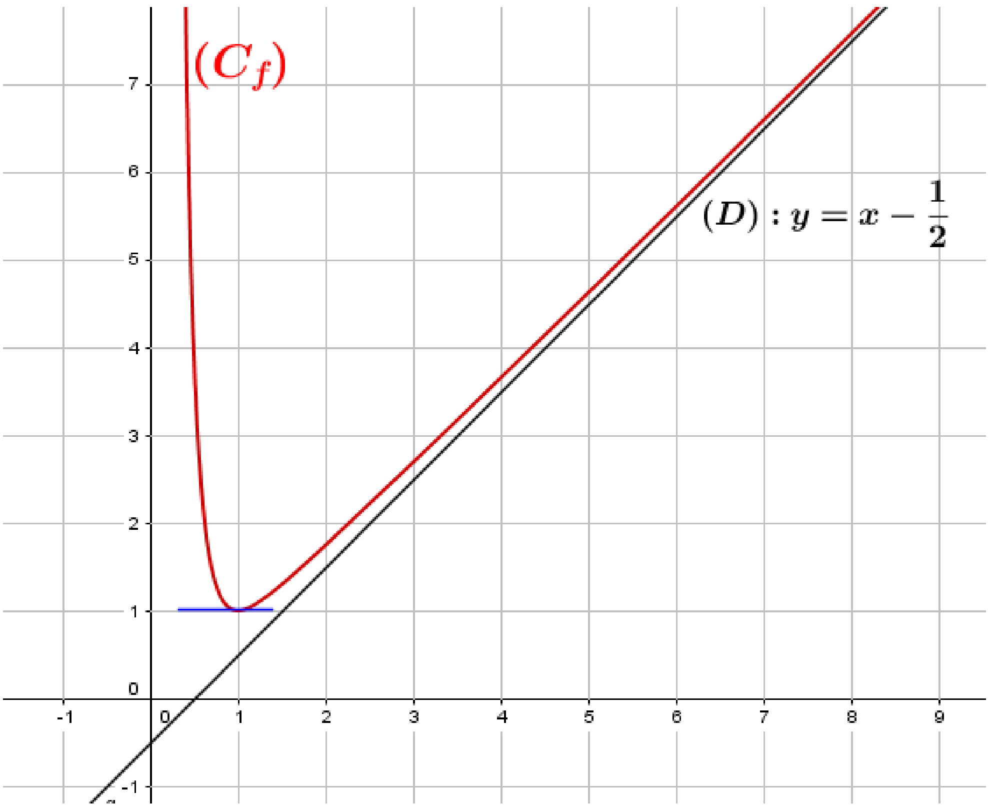
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\right)' \\
&= 1 - \frac{(2x^2)'}{(2x^2)^2} + 2 \times \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \times \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' \\
&= 1 - \frac{4x}{4x^4} + \frac{2\ln(x)}{x} \times \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} \\
&= 1 - \frac{1}{x^3} + \frac{2\ln(x)}{x} \times \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \\
&= 1 - \frac{1}{x^3} + \frac{2\ln(x) - 2\ln^2(x)}{x^3} \\
&= \frac{x^3 - 1 - 2\ln^2(x) + 2\ln(x)}{x^3} \\
&= \frac{g(x)}{x^3}
\end{aligned}$$

b) On a : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : x^3 > 0$ alors le signe de f' est le signe de g : g est négative sur $]0;1]$ alors f est décroissante sur $]0;1]$. et g est positive sur $[1;+\infty[$ alors f croissante sur $[1;+\infty[$.

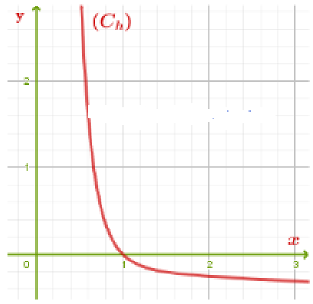
c) Le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) La courbe (C_f) de la fonction f :



$III)$ Soit h la fonction définie par : $h(x) = f(x) - x$
1) a) Montrer que $h(1) = 0$.
b) À partir de (C_h) la courbe de la fonction h
Déterminer le signe de $h(x)$ sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$
en déduire que $f(x) \leq x$ sur $[1;+\infty[$



a) On a : $h(1) = f(1) - 1 = 0$
b) Á partir de la courbe (C_h) on a : h est positive sur $]0;1]$ donc : $f(x) - x \geq 0$ c'est à dire : $f(x) \geq x$ sur $]0;1]$.
et h est négative sur $[1;+\infty[$ donc : $f(x) - x \leq 0$ c'est à dire : $f(x) \leq x$ sur $[1;+\infty[$.

2) Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = e$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq U_n \leq e$.
• Pour $n = 0$ on a : $1 \leq U_0 = e \leq e$ vraie,
• Supposons que : $1 \leq U_n \leq e$ et montrons que : $1 \leq U_{n+1} \leq e$
on a : $1 \leq U_n \leq e$ et f croissante sur $[1;+\infty[$ donc croissante sur $[1;e]$ donc : $f(1) \leq f(U_n) \leq f(e)$
c'est à dire : $1 \leq U_{n+1} \leq f(e) \leq e$, $f(e) \leq e$ car $(\forall x \in [1;+\infty[) : f(x) \leq x$ et $e \in [1;+\infty[$
Alors d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq U_n \leq e$.

b) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n \in [1;e]$ donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n \in [1;+\infty[$ et donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) : f(U_n) \leq U_n$
c'est à dire : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} \leq U_n$ alors (U_n) est décroissante.

c) On a : (U_n) est décroissante et minorée par 1 donc convergente, et on a f est continue et croissante sur $[1;e]$ et $f([1;e]) = [f(1);f(e)] \subset [1;e]$, alors la limite de la suite (U_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1;e]$, on a : $f(x) = x \Leftrightarrow x = 1 \in [1;e]$ d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

Devoir surveiller 3 S_1 G_1

Exercice 1 (13.5 pts)	
<u>PartieA</u> :	
Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=2x\sqrt{x}-2+\ln(x)$	
1) a) Montrer que : $g'(x)=3\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ pour tous x de $]0;+\infty[$.	1
b) En déduire que la fonction g est croissante sur $]0;+\infty[$.	0.5
2) Calculer : $g(1)$ En déduire le signe de $g(x)$ pour tous x de $]0;+\infty[$.	1
<u>PartieB</u> :	
Soit f la fonction définie sur : $I=]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$	
et (C_f) sa courbe représentatives dans un repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$.	
1) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et donnée l'interprétation géométrique de ce résultat.	1
b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln(x)}{\sqrt{x}}=0$ (Posé : $t=\sqrt{x}$).	1
c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ et donnée l'interprétation géométrique de ce résultat.	1.5
2) a) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ pour tous x de $]0;+\infty[$.	1.5
b) En déduire que la fonction f est croissante sur : $[1;+\infty[$ et décroissante sur : $]0;1]$.	1
3) Montrer que : $(\forall x\in]0;1])$: $f(x)\geq x$ et $(\forall x\in[1;+\infty[$: $f(x)\leq x$, en déduire les positions relatives de (C_f) et la droite (D) : $y=x$.	1
4) Construire la droite (D) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.	1.5
<u>Partie C</u> :	
Soit (U_n) la suite définie par : $U_0=e$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$: $U_{n+1}=f(U_n)$	
1) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $1\leq U_n\leq e$.	1
b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.	0.75
c) En déduire que la suite (U_n) est convergente.	0.5
2) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	0.75
Exercice 2 (6.5 pts)	
1) Résoudre les équations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :	
(E_1) : $\ln(x+1)=\ln(-x+6)$	1
(E_2) : $\ln(x+1)+\ln(x+2)=\ln(6)$	1.5
(E_3) : $\ln(x)=6$	0.5
2) Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :	
(I_1) : $\ln(x+1)>\ln(-x+6)$	1
(I_2) : $\ln(x+1)+\ln(x+2)>\ln(6)$	1.5
3) Déterminer tous les primitives de la fonction f telle que : $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x+5}$	1

Devoir 3 S_1 G_2

Exercice 1 (15 pts) **Partie A** :	
Soit f la fonction définie sur : $I =]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2$ et (C_f) sa courbe représentatives dans un repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$.	
1) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et donnée l'interprétation géométrique de ce résultat.	1
2) a) Vérifier que : $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln(x) - 1\right)\ln(x)$	0.5
b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	0.75
c) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $\frac{(\ln(x))^2}{x} = 4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2$	0.5
puis déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$	0.5
d) Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation (Δ) : $y = x$	1.25
3) a) Vérifier que : $(\forall x \in]0;1])$: $(x-1)+\ln(x) \leq 0$ et : $(\forall x \in [1;+\infty[)$: $(x-1)+\ln(x) \geq 0$.	1
b) Montrer que : $f'(x) = \frac{x-1+\ln(x)}{x}$ pour tous x de $]0;+\infty[$.	1.25
c) Donner le tableau de variations de la fonction f.	0.75
4) a) Montrer que : $f''(x) = \frac{2-\ln(x)}{x^2}$ pour tous x de $]0;+\infty[$.	1.25
b) En déduire la concavité de (C_f), et que : $A(e^2; f(e^2))$ est un point d'inflexion de (C_f).	1
5) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln(x)-1)^2$ et déduire la position relative de (C_f) et la droite (Δ) : $y = x$.	1
6) Construire la droite (D) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.	1.5
Partie B :	
Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $U_{n+1} = f(U_n)$	
1) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 \leq U_n \leq e$.	0.75
b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.	0.75
c) En déduire que la suite (U_n) est convergente.	0.5
2) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	0.75
Exercice 2 (5 pts)	
1) Résoudre les équations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :	
(E_1) : $\ln(x+2) = \ln(-x+4)$	0.75
(E_2) : $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(20)$	1
(E_3) : $\ln(x) = 6$	0.5
2) Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :	
(I_1) : $\ln(x+2) > \ln(-x+4)$	0.75
(I_2) : $\ln(x+3) + \ln(x+2) > \ln(20)$	1.25
3) Déterminer tous les primitives de la fonction f telle que : $f(x) = \frac{4x+5}{2x^2+5x+2}$	0.75

CHAPITRE 7

LES NOMBRES COMPLEXES :

7.1 Généralités :

7.1.1 L'ensemble $\mathbb{C}$ et la forme algébrique d'un nombre complexe :

Théorème 7.1
Nous admettons qu'il existe un ensemble (noté $\mathbb{C}$) des nombres complexes, qui possède des propriétés suivantes :

1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
2) $\mathbb{C}$ contient un nombre non réel noté i tel que : $i^2 = -1$.
3) L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
4) Tout nombre complexe z s'écrit de **façon unique** : $z = a + ib$ avec a et b sont des nombres réels.

Définition 7.1

- L'écriture $z = a + ib$ où $a; b \in \mathbb{R}$ est appelée forme algébrique de z.
- Le réel a est appelé la partie réelle de z noté : $\mathcal{R}e(z)$
- Le réel b est appelé la partie imaginaire de z noté : $Im(z)$
- L'ensemble des nombres complexes est : $\mathbb{C} = \{a + ib \,/\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ } et \text{ } i^2 = -1\}$
- $z = \underbrace{a}_{=\mathcal{R}e(z)} + i \underbrace{b}_{=Im(z)}$ c'est à dire $z = \mathcal{R}e(z) + i Im(z)$.

Remarque :

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ où $a; b \in \mathbb{R}$:

- Si $b = 0$ alors $z = a$ est un réel ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$
- Si $b \neq 0$ et $a = 0$ alors $z = ib$ est dit imaginaire pur on note $z \in i\mathbb{R}$, $\quad i\mathbb{R} = \{ib \,/\, b \in \mathbb{R}\}$.
- L'écriture : $a + ib$ est unique.

Exemples :

Si : $z = 3+2i$ alors : $Im(z) = 2$ et $\mathcal{R}e(z) = 3$; Si : $z = 5-4i$ alors : $Im(z) = -4$ et $\mathcal{R}e(z) = 5$
Si : $z = 6i$ alors : $Im(z) = 6$ et $\mathcal{R}e(z) = 0$; Si : $z = 8$ alors : $Im(z) = 0$ et $\mathcal{R}e(z) = 8$.

7.1.2 Égalité des nombres complexes :

Théorème 7.2
Soient $a;a';b$ et $b' \in \mathbb{R}$: On a : $a+ib = a'+ib' \Leftrightarrow a = a'\, et\, b = b'$.

C'est à dire si $z;z' \in \mathbb{C}$ alors : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$

Remarques :

$a+ib = 0 \Leftrightarrow a = 0\, et\, b = 0$
$a+ib \neq 0 \Leftrightarrow a = 0\, ou\, b \neq 0$

7.2 Opérations dans $\mathbb{C}$:

7.2.1 Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$:

Définition 7.2
Soient $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ deux nombres de $\mathbb{C}$ avec : $a;a';b\, et\, b' \in \mathbb{R}$:

- La somme de z et z' est : $z+z' = (a+a')+i(b+b')$.
- Le produit de z et z' est : $(a+ib)(a'+ib') = aa'+iab'+iba'-bb'$
  $= aa'-bb'+i(ba'+ab')$
- Le produit de z par un réel k est : $k\cdot(a+ib) = ka+ikb$.

Remarque 1 :

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ suivent les mêmes règles de calcul que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

- $(4+6i)+(2-3i) = 6+3i$
- $(3+2i)(4+5i) = (3\times4-2\times5)+i(4\times2+3\times5) = 2+23i$

7.2.2 Différence et quotient dans $\mathbb{C}$:

Proprieté 7.1
Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$ où $a;b \in \mathbb{R}$:

- $-z = -a+i(-b)$ c'est l'opposé de z dans $\mathbb{C}$.
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2}+i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$ est l'inverse de z dans $\mathbb{C}$.

$$\text{C'est à dire : } Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2+b^2} \text{ et } Im\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

Proprieté 7.2
Soit $z=a+ib$ et $z'=c+id$ deux nombres complexes avec $a;b;c\,et\,d\in\mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned}\frac{z}{z'}=\frac{a+ib}{c+id} &= \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}\\ &= \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}\\ &= \underbrace{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}}_{=Re\left(\frac{z}{z'}\right)}+i\underbrace{\frac{bc-ad}{c^2+d^2}}_{=Im\left(\frac{z}{z'}\right)}\end{aligned}$$

Exercice :

1) Écrivez sous la forme algébrique les nombres complexes suivantes :
$z_1=(2-7i)^2$; $z_2=(2-7i)(2+7i)$; $z_3=\dfrac{1+i}{i}$; $z_4=(2-i)^3$
2) Soient $z_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ et $z_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}+i}$
Écrivez sous la forme algébrique les nombres suivantes : $z_1\times z_2$; z_1+z_2 ; $\dfrac{z_1}{z_2}$ et $z_1^2+z_2^2$.

Remarques : (les puissances de i) :

$i^2=-1$; $i^3=i^2\times i=-1\times i=-i$; $i^4=i^2\times i^2=-1\times -1=1$. alors :
$i^5=i^4\times i=i$; $i^6=-1$; $i^7=-i$; $i^8=1$. En général :
$(\forall n\in\mathbb{N})$: $i^{4n}=1$; $i^{4n+1}=i$; $i^{4n+2}=-1$; $i^{4n+3}=-i$.

Exercice :

1) Calculer : i^{2021}
2) Calculer : $(1+i)^2$, en déduire : $(1+i)^{100}$

Remarque : Il n'y pas d'ordre dans $\mathbb{C}$, il faut donc jamais écrire $z\geq 0$ ou $z\geq z'$.

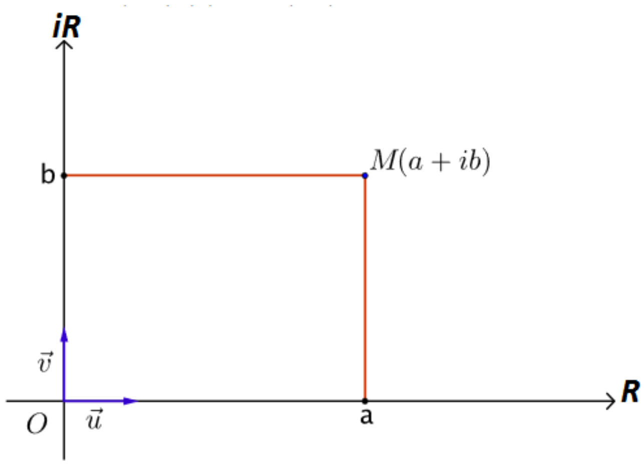
7.3 Le plan complexe :

7.3.1 Affixe d'un point - image d'un nombre :

Définitions :

Soient a et b deux nombres réels, le nombre complexe $z=a+ib$ peut représenter par un point $M(a,b)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on dit que :

- M est l'image du nombre complexe z on note $M(z)$.
- z est l'affixe du point M on note $aff(M)$.
- L'image d'un nombre réel est un point sur l'axe des abscisses, appelé **axe réel**.
- L'image d'un nombre imaginaire pur est un point sur l'axe des ordonnée, appelé **axe imaginaire**
- Le plan muni de $(O;\vec{u};\vec{v})$ est appelé **plan complexe** .



Le plan complexe

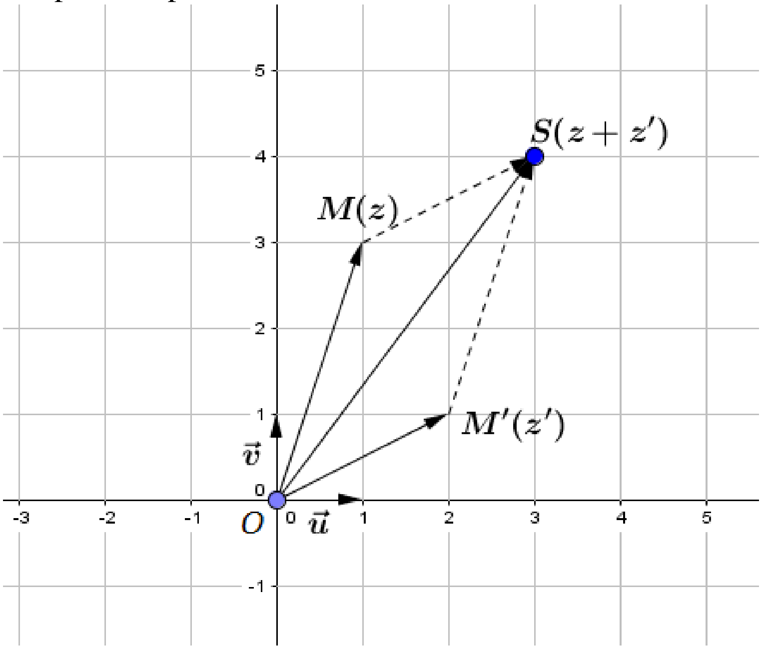
7.3.2 Interprétation géométrique :

Le plan muni d'un repère orthonormée $(O;\vec{u};\vec{v})$, soient M et M' deux points d'affixes z et z' respectives et $k \in \mathbb{R}^*$.

▷ Si $M(a,b)$ alors $\overrightarrow{OM}(a,b)$ donc : $aff(M) = aff\left(\overrightarrow{OM}\right)$.

▷ Si S est un point du plan d'affixes $z+z'$ alors : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.

▷ N est point du plan d'affixe kz si et seulement si :$\overrightarrow{ON} = k \cdot \overrightarrow{OM}$



7.3.3 Affixe d'un vecteur :

Pour tout vecteur $\vec{w}$ il existe in point M tel que $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$.

Définition 7.3
Soient $\vec{w}$ un vecteur et M un point du plan complexe d'affixe z tel que $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$.
• Le vecteur $\vec{w}$ est appelé l'image vectorielle du nombre complexe z.
On dit aussi que le nombre complexe z est l'affixe du vecteur $\vec{w}$ on le note $aff(\vec{w})$.

Remarque :

- $aff(\vec{w}+\vec{w'}) = aff(\vec{w}) + aff(\vec{w'})$
- $aff(k\cdot\vec{w}) = k\cdot aff(\vec{w})$

Propriété 7.3
Soient A et B deux points d'affixes z_A et z_B respectives, le nombre complexe $z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on écrit : $aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_A$.

En effet :

$$\begin{aligned} aff\left(\overrightarrow{AB}\right) &= aff\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right) \\ &= aff\left(\overrightarrow{AO}\right) + aff\left(\overrightarrow{OB}\right) \\ &= aff\left(\overrightarrow{-OA}\right) + aff\left(\overrightarrow{OB}\right) \\ &= -aff\left(\overrightarrow{OA}\right) + aff\left(\overrightarrow{OB}\right) \\ &= -aff(A) + aff(B) \\ &= z_B - z_A \end{aligned}$$

7.3.4 Affixe du milieu d'un segment :

Propriété 7.4
Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe et soit I le milieu du segment $[AB]$ l'affixe de I est $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2}$, on note $aff(I) = \dfrac{z_A+z_B}{2}$.

7.3.5 Colinéarité de trois points dans le plan complexe :

Propriété 7.5
Soient $A(z_A)$; $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points distincts du plan complexe.

$$A \,;\, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1 :

Soient $A(i)$; $B(\frac{1}{2}+2i)$ et $C(-1-i)$ trois points du plan complexe.
Montrer que les points A ; B et C sont alignés.

Exercice 2 :

Déterminer la valeur de m pour que $A(-2+i)$ et $B(m+\frac{1}{2}i)$ et $C(4-i)$ sont alignés.

7.4 Conjugué d'un nombre complexe :

7.4.1 Définitions et propriétés :

Définition 7.4
Soit $z = a+ib$ un nombre complexe avec $a;b\in\mathbb{R}$:
On appelle nombre complexe **conjugué** de z, noté $\bar{z}$, le nombre complexe : $\bar{z} = a - ib$.

Remarques :

- $\bar{\bar{z}} = z$: alors z et $\bar{z}$ sont dits conjugués
- $\bar{z} = Re(z) - iIm(z)$

Exemples :

$\overline{3+2i} = 3-2i$; $\overline{3-2i} = 3+2i$; $\overline{6} = 6$; $\overline{5i} = -5i$; $\overline{-4} = -4$ et $\overline{-7i} = 7i$.

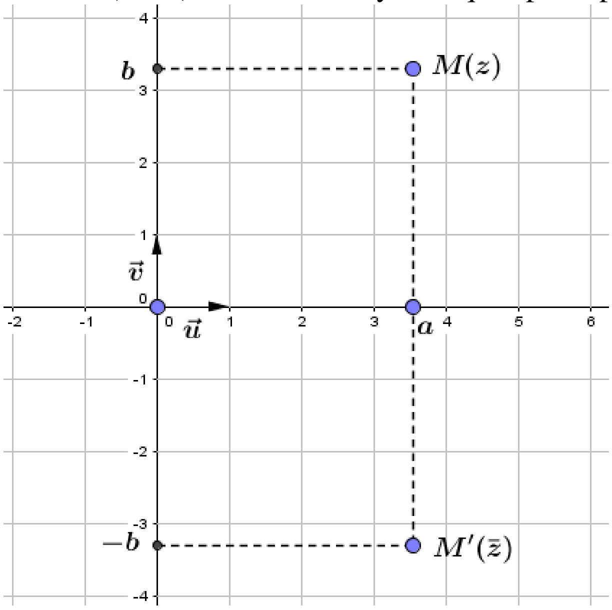
Proprieté 7.6
Soit $z = a+ib$ un nombre complexe non nul avec $a;b \in \mathbb{R}$.

- $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- $\bar{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.
- $z+\bar{z} = 2a = 2Re(z)$.
- $z-\bar{z} = 2ib = 2iIm(z)$.
- $z\bar{z} = a^2+b^2 = Re(z)^2+Im(z)^2$. Donc : $z\bar{z}$ est un réel positif.

7.4.2 Interprétation géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, soit M un point du plan complexe d'affixe z :

(M' est un point d'affixe $\bar{z}$) $\Leftrightarrow$ (M et M' sont symétriques par rapport à l'axe réel).



7.4.3 Opérations sur les nombres conjugués :

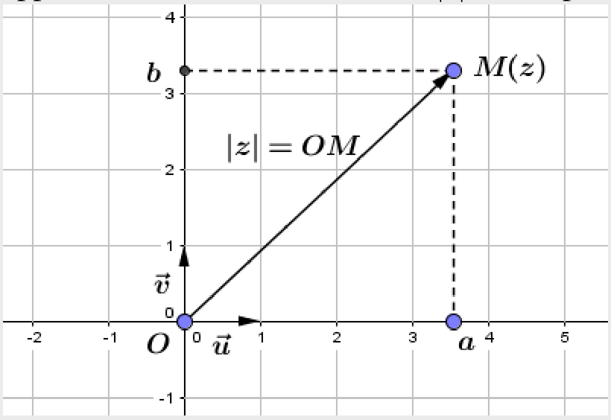
Proprieté 7.7

- $\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z'}$; $\overline{z\times z'} = \bar{z}\times\bar{z'}$ et $\overline{z-z'} = \bar{z}-\bar{z'}$.
- $(\forall k \in \mathbb{R})$: $\overline{k\times z'} = k\times\bar{z'}$
- Si $z' \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$.
- $(\forall n \in \mathbb{Z})$: $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

7.5 Module d'un nombre complexe :

7.5.1 Définition :

Définition 7.5
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $a; b \in \mathbb{R}$:
On appelle **module** de z le réel noté $|z|$, défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Exemple : $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

7.5.2 Le module et la distance :

Théorème 7.3
- Pour tout point M du plan complexe d'affixe z on a : $OM = |z|$.
- Pour tous points A et B du plans complexe d'affixes respectivement z_A et z_B on a : $AB = |z_B - z_A|$

Proprieté 7.8
Pour tout $z; z' \in \mathbb{C}$ on a :
- $|z| \geq 0$ et $|z|^2 = z \times \bar{z}$ et $|\bar{z}| = |-z| = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $(\forall n \in \mathbb{Z})$: $|z^n| = |z|^n$.
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
- Si : $z' \neq 0$ alors $|\frac{1}{z'}| = \frac{1}{|z'|}$ et $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$

Exercice :

Soit $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 2 - i \in \mathbb{C}$:
Déterminer : $|z_1|$ et $|z_2|$ et $|z_1 \times z_2|$ et $|z_1 + z_2|$ et $|iz_2|$.

Exercice :

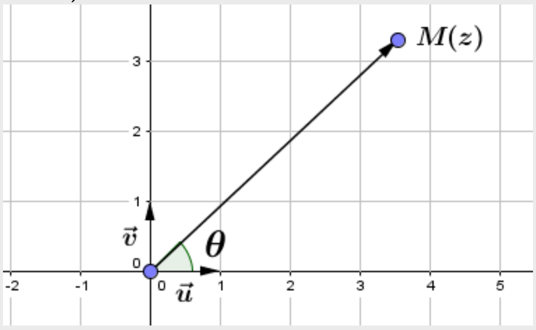
Soit $A(2 + 4i)$ et $B(-3 + i)$ Déterminer la distance AB.

7.6 Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

7.6.1 Définitions

Définition 7.6
Soit z un nombre complexe non nul d'image M dans le plan.
On appelle **argument** de z, noté $arg(z)$ tout nombre réel θ mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM}\right)$, on écrit : $arg(z) \equiv \theta[2\pi]$.



Remarques :

- Le nombre 0 n'a pas d'argument
- Si : θ est un argument de z alors : $\theta + 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$ est aussi un argument de z.

Proprieté 7.9
Soit z un nombre complexe non nul.

- $arg(\bar{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$
- $(\forall z \in \mathbb{R}^*) : arg(z) \equiv 0[\pi]$
- $(\forall z \in i\mathbb{R}^*) : arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$
- $arg(-z) \equiv \pi + arg(z)[2\pi]$

Exercice :

1) Représenter dans le plan complexe les points A ; B ; C et D d'affixes respectives :
$z_A = 2i$; $z_B = 3$; $z_C = -i$ et $z_D = -2+2i$.
2) Déterminer : $arg(z_A)$; $arg(z_B)$; $arg(z_C)$ et $arg(z_D)$.

7.6.2 forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

Théorème 7.4
Tout nombre complexe z non nul d'argument θ peut s'écrire sous la forme :
$z = |z|\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ appelé **forme trigonométrique** de z et on a :

$$\cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|}$$

Exemples :

Soit $z = 1+i$ on a : $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{Re(z)}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{Im(z)}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{alors : } arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

donc une forme trigonométrique de z est : $1+i=\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$

Exercice :

Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes : $z_A=\sqrt{3}+i$; $z_B=\dfrac{\sqrt{3}+i}{i}$.

Propriété 7.10

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls :

- $z=z' \Leftrightarrow |z|=|z'|$ et $arg(z)\equiv arg(z')[2\pi]$.
- $arg(z\times z')\equiv arg(z)+arg(z')[2\pi]$.
- $(\forall n\in\mathbb{Z})$: $arg(z^n)\equiv n\times arg(z)[2\pi]$.
- $arg\left(\dfrac{1}{z}\right)\equiv -arg(z)[2\pi]$ et $arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)\equiv arg(z)-arg(z')[2\pi]$.
- $(\forall n\in\mathbb{Z})$: on a : $z^n=|z|^n\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)$.
- $(\forall n\in\mathbb{Z})$: on a la formule de Moivre $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$.

Remarques :

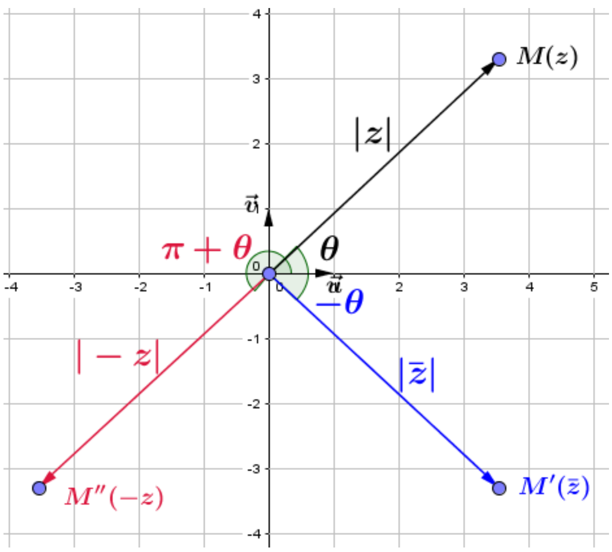
- Si : $arg(z)=arg(z')$ alors : $\dfrac{z}{z'}\in\mathbb{R}_+^*$

  Soit $z=|z|\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)$ avec $\theta\equiv arg(z)[2\pi]$:
- on a : $arg(\bar{z})\equiv -arg(z)[2\pi]\equiv -\theta[2\pi]$ et $|\bar{z}|=|z|$ donc :

$$\bar{z}=|z|\left(\cos(\theta)+i\sin(-\theta)\right)=|z|\left(\cos(\theta)-i\sin(\theta)\right).$$

- on a aussi : $arg(-z)\equiv\pi+\theta[2\pi]$ et $|-z|=|z|$, donc :

$$-z=|z|\left(\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)\right)=|z|\left(-\cos(\theta)-i\sin(\theta)\right).$$



Exercice 1 :

Soit $z=2+2\sqrt{3}i$, un nombre complexe.

1) Déterminer la forme trigonométrique des nombres suivantes : z ; $\bar{z}$; $-z$; $-\bar{z}$ et z^8
2) Soit $z'=1+i$, un nombre complexe, Déterminer la forme trigonométrique de $\dfrac{1}{z}$ et $\dfrac{z}{z'}$

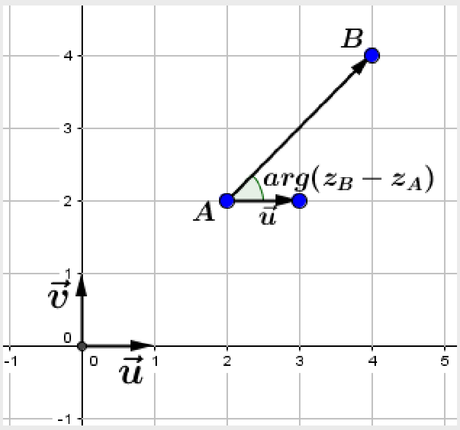
Exercice 2 (8.5 pts)	
Soit A ; B ; C trois points du plan d'affixes respectives :	
$z_A = -2+i$; $z_B = 4+i$ et $z_C = 1+i\sqrt{3}$.	
1) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes : $z_A \times z_B$ et $\dfrac{z_A}{z_B}$	1.5
2) Calculer les modules suivantes : $\lvert z_A\rvert$; $\lvert z_B\rvert$; $\lvert z_C\rvert$ et $\lvert z_C^6\rvert$.	2
3) Déterminer la forme trigonométrique de z_C.	1.5
4) Soit I le milieu de segment $[AB]$.	
a) Déterminer $z_I = aff(I)$ l'affixe du point I.	0.5
b) Déterminer la forme trigonométrique de z_I.	1.5
c) Déterminer la forme trigonométrique de $\dfrac{z_C}{z_I}$	1.5

7.7 Nombre complexes et géométrique :

7.7.1 Argument d'une différence :

Soient : A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B, on a : $aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$.

Proprieté 7.11
Pour tous points distincts A et B d'affixes z_A et z_B on a : $arg(z_B - z_A) \equiv \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}\right)$ $[2\pi]$.



7.7.2 Angle de deux vecteurs et l'argument du quotient de leurs affixes :

Théorème 7.5
Soient A ; B ; C et D quatre points du plan d'affixes : z_A ; z_B ; z_C et z_D.
Si : $A \neq B$ et $C \neq D$ alors :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi] \quad et \quad \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi].$$

En effet :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]\\ &\equiv -\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AC}\right)\\ &\equiv -arg(z_B-z_A)+arg(z_C-z_A)[2\pi]\\ &\equiv arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi].\end{aligned}$$

De même : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$.

7.7.3 Parallélisme de deux droites - orthogonalité de deux droites :

Théorème 7.6
Soient A ; B ; C et D quatre points ($A\neq B$ et $C\neq D$) d'affixes z_A ; z_B ; z_C et z_D alors :
$(AB)\parallel(CD)\Leftrightarrow \dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}^*$ et $(AB)\perp(CD)\Leftrightarrow \dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}^*$

Conséquences 7.1
Soient A ; B et C trois points ($A\neq B$) d'affixes : z_A ; z_B et z_C :

- (Les points A ; B et C sont alignés) $\Leftrightarrow \dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$
- (Le triangle ABC est rectangle en A) $\Leftrightarrow \dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}$

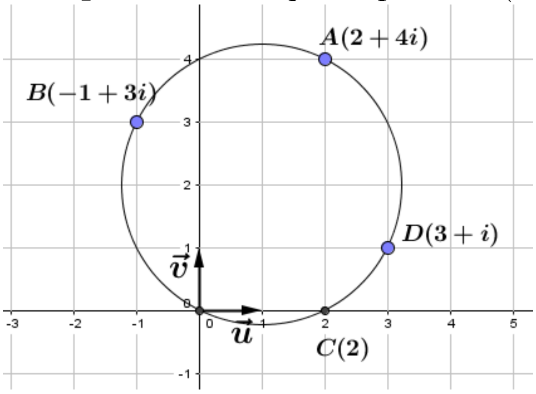
Exercice :

1) Soient A ; B et C trois points d'affixes : $z_A=6-i$; $z_B=-6+3i$ et $z_C=-18+7i$, montrer que A ; B et C sont alignés.
2) Soient A ; B et C trois points d'affixes : $z_A=1+i$; $z_B=-1+4i$ et $z_C=4+3i$, montrer que $(AB)\perp(AC)$.

7.7.4 Cocyclicité des points :

Proprieté 7.12
Soient A ; B ; C et D quatre points du plan d'affixes z_A ; z_B ; z_C et z_D :
Les points A ; B ; C et D sont cocycliques (c'est à dire appartient au même cercle)
si et seulement si : $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\dfrac{z_B-z_C}{z_D-z_C}\in\mathbb{R}$.

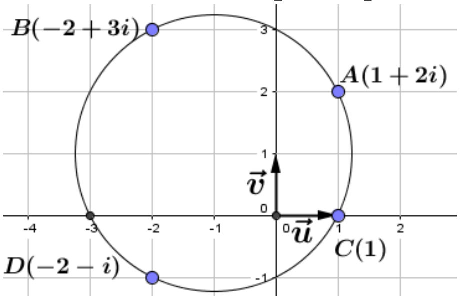
Exemple : Montrons que les points : $A(2+4i)$; $B(-1+3i)$; $C(2)$ et $D(3+i)$ sont cocycliques :



En effet on a :

$$\begin{aligned} \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} &= \frac{3+i-2-4i}{-1+3i-2-4i} \times \frac{-1+3i-2}{3+i-2} \\ &= \frac{1-3i}{-3-i} \times \frac{-3+3i}{1+i} \\ &= \frac{i(-i-3)}{-i-3} \times \frac{i(3i+3)}{1+i} \\ &= i \times 3i = -3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice : Montrer que les points : $A(1+2i)$; $B(-2+3i)$; $C(1)$ et $D(-2-i)$ sont cocycliques :



7.7.5 L'ensemble des points qui vérifiant une équation :

Rappels :

1) L'ensemble des points $(x;y)$ du plan tel que : $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$,(où $a;b \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$) est le cercle du centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R.
2) L'ensemble des points M du plan tel que : $MA = R$, (où $A \in \mathcal{P}$ et $R > 0$) : est le cercle de centre A et de rayon R.
3) L'ensemble des points M du plan tel que : $MA = MB$, (où $A;B \in \mathcal{P}$) : est la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice :

1) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tel que : $|z-1+2i| = 1$. Déterminer l'ensemble (Γ).
2) Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tel que : $|z| = |\bar{z}+1+2i|$. Déterminer l'ensemble (Δ).

7.8 Notation exponentielle d'un nombre complexe :

Rappels :

Soient $\theta;\theta' \in \mathbb{R}$, on admet les propriétés suivantes :

- $e^{\theta+\theta'} = e^{\theta} \times e^{\theta'}$; • $e^{-\theta} = \dfrac{1}{e^{\theta}}$; • $e^{\theta-\theta'} = \dfrac{e^{\theta}}{e^{\theta'}}$; • $\left(e^{\theta}\right)^n = e^{n\theta}\,(n \in \mathbb{N})$; $e^0 = 1$.

7.8.1 Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul :

Définition 7.7
Soient z un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ,
L'écriture $re^{i\theta}$ est appelée la notation exponentielle de z, et on écrit : $z = re^{i\theta}$.

Proprieté 7.13
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls écrits sous la forme exponentielle :
$z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ alors on a :

- $z \times z' = (z = re^{i\theta})(z = r'e^{i\theta'}) = rr'e^{i(\theta+\theta')}$.
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$ et $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$: $z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

Remarque : La formule $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ n'a pas de sens que si n est un entier.

Exemples :

$z = -3-3i$ on a : $|z| = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ alors : $z = 3\sqrt{2}\left(\dfrac{-3}{3\sqrt{2}} + i\dfrac{-3}{3\sqrt{2}}\right)$ donc :
$z = 3\sqrt{2}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos(\pi+\frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi+\frac{\pi}{4})\right) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$
Autre méthode : $z = -3(1+i)$: on a : $-3 = 3(\cos(\pi)+i\sin(\pi)) = 3e^{\pi}$ et
$1+i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc : $z = 3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$
Exercice 1 : Donner la notation exponentielle des nombres suivantes :
$z_1 = 2+2i$ et $z_2 = 1+i\sqrt{3}$ et $-z_1$ et $\bar{z_2}$ et $z_1 \times z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.
Exercice 2 :

1) Vérifier que : $(\forall\theta \in \mathbb{R}) : 1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{-\theta}{2}}\right)$
2) En déduire la notation exponentielle de : $1+\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})$

7.8.2 Formule d'Euler et formule de Moivre :

$(\forall\theta \in \mathbb{R})$ on a : $e^{i\theta} = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$; $e^{-i\theta} = \cos(\theta)-i\sin(\theta)$:
Par addition et soustraction membre à membre, on obtient :

Théorème 7.7

- $(\forall\theta \in \mathbb{R})$ on a : $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ (**Formule d'Euler**).
- $(\forall\theta \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})$ on a : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (**Formule de Moivre**).
  On écrit aussi : $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

7.8.3 Linéarisation et factorisation des polynômes trigonométriques :

Pour trouver une primitive d'une fonction ou pour résoudre certaines équations, il peut être utiliser «La linéarisation» des expressions contenant des sinus, cosinus ou tangentes.
Une expression est linéarisée si elle ne comporte aucun produit de fonction circulaires.

Exemples : 1) La linéarisation de $\cos^2(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\cos^2(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}}{4} \\
&= \frac{1}{2}\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}+\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2) La linéarisation de $\sin^3(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\sin^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) \\
&= \frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}-2e^{i\theta}e^{-i\theta}}{-4}\times\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \\
&= \frac{(e^{i\theta})^3-3(e^{i\theta})^2e^{-i\theta}+3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2+-(e^{-i\theta})^3}{8i} \\
&= \frac{(e^{i\theta})^3-(e^{-i\theta})^3-3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}}{8i} \\
&= \frac{e^{i3\theta}-e^{-3i\theta}-3(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{8i} \\
&= -\frac{1}{4}\frac{e^{i3\theta}-e^{-3i\theta}}{2i}+\frac{3}{4}\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \\
&= -\frac{1}{4}\sin(3\theta)+\frac{3}{4}\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Exercice : Donner la linéarisation de : $\sin^2(\theta)$ et $\cos^3(\theta)$

7.9 L'équation de degré 2 dans $\mathbb{C}$:

7.9.1 L'équation de la forme : $z^2 = a \quad (a \in \mathbb{R})$:

Proprieté 7.14
Soit (E) l'équation : $z^2 = a$: on a :

- Si $a > 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions réels : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions non réels : $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.
- Si $a = 0$ alors $z = 0$.

7.9.2 L'équation de degré 2 dans $\mathbb{C}$:

Proprieté 7.15
Soient a ; b et c des nombres réels avec $a \neq 0$ et soit $(E) : az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E).

- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) a une solution réelle unique qui vaut : $-\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, l'équation (E) a deux solutions réelles : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, l'équation (E) a deux solutions non réelles : $\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exercice :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$(E_1) : z^2 - 8\sqrt{z} + 64 = 0$; $(E_2) : z^2 + z + 1 = 0$; $(E_3) : 2z^2 + 4z + 10 = 0$
2) Considérons l'équation $(E) : z^3 + 2z^2 - 16 = 0$
a) Montrer que 2 est une solution de (E).
b) Résoudre l'équation (E).

7.9.3 Somme et produit de deux nombres complexes :

Proprieté 7.16
Soient a, b et c des nombres complexes, $a \neq 0$:
z_1 et z_2 sont solutions de l'équation : $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si : $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$: les systèmes : $(S_1)\begin{cases} x + y = \sqrt{3} \\ xy = 1 \end{cases}$; $(S_2)\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 8 \end{cases}$

7.10 Transformation usuelles et nombres complexes :

7.10.1 Écriture complexe d'une translation :

Théorème 7.8
Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe ω.
Pour tout point M du plan d'affixe z, son image M' par la translation t de vecteur $\vec{u}$, a pour affixe : $z' = z + \omega$, cette écriture est appelé **écriture complexe de la translation** t .

En effet : $t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{MM'}) = aff(\vec{u}) \Leftrightarrow z' - z = \omega \Leftrightarrow z' = z + \omega$

Exercice :

Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $b = 2 + i$ et soit M un point du plan complexe d'affixe $z = 3 + 4i$
Déterminer l'affixe du point M' l'image de M par la translation t.

7.10.2 Écriture complexe d'une homothétie :

Théorème 7.9
Soient Ω un point du plan d'affixe ω et $k \in \mathbb{R}^*$:
Pour tout point M du plan d'affixe z, son image M' par l'homothétie h de centre Ω de rapport k, a pour affixe : $z' = k(z-\omega)+\omega$, cette écriture est appelé **écriture complexe de l'homothétie** h .

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{\Omega M'}) = k \cdot aff(\overrightarrow{\Omega M}) \Leftrightarrow z' - \omega = k(z-\omega) \Leftrightarrow z' = k(z-\omega)+\omega$$

Remarque : Pour $k = -1$ on obtient une écriture complexe de l'homothétie de centre Ω : $z' = -z+2\omega$

Exercice :

Soit h l'homothétie de centre $\Omega(1+2i)$ et de rapport $k = 2$:
Déterminer l'affixe du point M' l'image de $M(3+2i)$ par l'homothétie h.

7.10.3 Écriture complexe d'une rotation :

Théorème 7.10
Soient Ω un point d'affixe ω et $\theta \in \mathbb{R}$:
Pour tout point M du plan d'affixe z, son image M' par la rotation r de centre Ω d'angle θ, a pour affixe : $z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$, cette écriture est appelé **écriture complexe de la rotation** r .

En effet : $r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega) \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$$

Exemples :

1) La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe : $z' = iz$.
2) La symétrie centrale de centre O a pour écriture complexe : $z' = -z$.

Exercice :

Soit r la rotation du centre $\Omega(2+2i)$ et d'angle $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, soit $M(\sqrt{3}+i)$ un point du plan complexe.
Déterminer l'affixe du point M' l'image de M par la rotation r.

7.10.4 La série des exercices n^o 7 :

Exercice 1 :

Soient A ; B et C trois points d'affixes respectifs : $z_A = 3+i$; $z_B = -1-3i$ et $z_C = -\sqrt{3}+i$.

1) Déterminer la forme algébrique des nombres suivantes : $z_A \times z_B$; $\dfrac{z_A}{z_B}$; $z_A \times z_B \times z_C$; $\dfrac{1}{z_C}$ et $z_A \times z_B \times \left(\dfrac{1}{z_C}\right)^2$.

2) Calculer les modules suivants : $|z_A \times z_B|$; $|z_C^6|$; $\left|\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^5\right|$ et $|z_A \times z_B \times z_C|$

3) Déterminer la forme trigonométrique puis la notation exponentielle du nombre z_C.

4) Soit I le milieu du segment $[AB]$.
   a) Déterminer $z_I = aff(I)$ l'affixe du point I.
   b) Déterminer la forme trigonométrique puis la notation exponentielle des nombres suivants : z_I ; $z_C \times z_I$; $\dfrac{z_C}{z_I}$; z_I^8 ; $\dfrac{1}{z_C}$ et $(z_C \times z_I)^5$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, considérons les points :
$A(2+2i)$; $B(1-i)$; $C(-1+3i)$; $D(1+5i)$; $E(3-i)$ et $F(5+3i)$.

1) Montrer que les points A ; D et E sont alignés.
2) Montrer que le tringle : AEF est rectangle en A.
3) Montrer que B ; C ; D et E sont cocyclique.
4) Représenté dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, les points : A ; B ; C ; D ; E et F.

Exercice 3 (Rattrapage : 2020)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$
2) On pose : $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$
   a) Déterminer la forme trigonométrique de a en déduire que a^{2020} est un réel.
   b) Soit le nombre complexe : $b = \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, montrer que : $b^2 = a$.
3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, considérons les points A ; B et C d'affixes respectifs : a ; b et c avec $c = 1$. Soit R la rotation du centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{8}$ et qui transforme le poins M d'affixe z en point M' d'affixes z'.
   a) Vérifier que : $z' = bz$
   b) Déterminer l'image du point C par la rotation R et montrer que le point A est l'image du point B par la rotation R.
4) a) Montrer que : $|a-b| = |b-c|$, en déduire la nature du triangle ABC
   b) Déterminer une mesure d'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$
5) Considérons T la translation du vecteur $\vec{u}$ et soit D l'image de A par la translation T :
   a) Vérifier que l'affixe de D est le nombre complexe b^2+1
   b) Montrer que : $\dfrac{b^2+1}{b} = b + \bar{b}$, en déduire que les points O et B et D sont alignés

Autres exercices :

Exercice	
Soit A ; B ; C et D quatre points du plan d'affixes respectives : $z_A = 2-2i$; $z_B = -1+7i$; $z_C = 4+2i$ et $z_D = -4-2i$. 1) Vérifier que D et C sont symétries par rapport à O. 2) Déterminer les distances : AB et BC. 3) Déterminer une forme trigonométrique de z_A. 4) Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_A}{z_C}$ et $\frac{z_B}{z_D}$. 5) Soit Ω un point d'affixe $w = -1+2i$. Montrer que les points A ; B ; C et D appartients au cercle de centre Ω et déterminer le rayon de cet cercle 6) Soit E le milieu de segment $[AB]$ et d'affixes e a) Comparer $\frac{z_c - e}{z_a - e}$ et $\frac{z_a - e}{z_d - e}$ b) Que représente la droite (AE) pour l'angle $(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EC}})$.	

S - Normale : 2018

Exercice 1 (4.5 pts)	
1). Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $2z^2 + 2z + 5 = 0$.	1
2). Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$	
a) Écrire sous forme trigonométrique la complexe : $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.	0.75
b) On considère le point A d'affixe $a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ et le point B l'image du point A par la rotation R. Soit b l'affixe de B, montrer que $b = d \cdot a$.	0.75
3). Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et C l'image de B par la translation t et c l'affixe de C.	
a) Vérifier que $c = b + a$ en déduire que $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.	1
b) Déterminer $arg\left(\frac{c}{a}\right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral.	1

Exercice 2 (Nombres complexes)	
1). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 25 = 0$ 2). Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les pointes $A; B; C; D; E$ d'affixes respectives : $a = 3+4i$; $b = 3-4i$; $c = 2+3i$; $d = 5+6i$; $e = 3+8i$ a) Calculer $\frac{d-c}{a-c}$ en déduire la nature des pointes $A; C$ et D b) Considérons l'homothétie h de centre B et de rapport $k = \frac{3}{2}$ et soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ l'image de M par l'homothétie h. Montrer que $z' = \frac{3}{2}z - \frac{3}{2} + 2i$ puis déduire que le point E est l'image de A par l'homothétie h.	

Exercice 3 : Rattrapage 2017 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$

	2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O,\vec{u},\vec{v})$, *les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que:* $$a=-2+2i\ ,b=4-4i\ et\ c=4+8i\ .$$
0,5	**a)** *Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle* $-\frac{\pi}{2}$. *Montrer que :* $z'=-iz-4$.
0,75	**b)** *Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC.*
	3. *Soit* ω *l'affixe du point* Ω *milieu du segment* $[BC]$.
0,5	**a)** *Montrer que* $\|c-\omega\|=6$.
0,5	**b)** *Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tel que :* $\|z-\omega\|=6$ *est le cercle circonscrit au triangle ABC.*

Exercice 4 : Rattrapage 2018 :

	Exercice 2 : (3 *points*)
0,75	**1.** *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation :* $$z^2-2\sqrt{2}z+4=0.$$
	2. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$, *on considère le point A d'affixe* $a=\sqrt{2}(1-i)$ *et la rotation R de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{3}$.
0,25	**a)** *Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe a.*
0,5	**b)** *Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est :* $$b=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right).$$
0,5	**3. a)** *On considère le point C d'affixe* $c=1+i$. *Montrer que* $b^2-c^2=2\sqrt{3}$.
0,5	**b)** *Soit t la translation de vecteur* $\overrightarrow{OC}$ *et D l'image de B par la translation t. Montrer que* $OD=\|b+c\|$.
0,5	**c)** *En déduire que* $OD\times BC=2\sqrt{3}$.

Exercice 5 : Normale 2019 :

	Exercice 2 : (3 *points*)
0,75	**1.** *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation :* $z^2-2z+4=0$.
	2. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$, *on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :* $a=1-i\sqrt{3}$, $b=2+2i$, $c=\sqrt{3}+i$ *et* $d=-2+2\sqrt{3}i$.
0,5	**a)** *Vérifier que :* $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$.
0,25	**b)** *En déduire que les points A, C et D sont alignés.*
0,5	**3.** *On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle* $\frac{-\pi}{3}$. *Vérifier que :* $z'=\frac{1}{2}az$.
	4. *Soient H l'image du point B par la rotation R, h son affixe et P le point d'affixe p tel que* $p=a-c$.
0,5	**a)** *Vérifier que :* $h=ip$.
0,5	**b)** *Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.*

Exercice 6 : Rattrapage 2019 :

	Exercice 2 : (3 *points*)
0,75	**1.a)** *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation :* $z^2-3z+3=0$.
0,5	**b)** *On pose :* $a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ *; écrire a sous forme trigonométrique.*
0,5	**2.** *On considère le nombre complexe* $b=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ *; vérifier que :* $b^2=i$.
0,5	**3.** *On pose :* $h=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$*; montrer que :* $h^4+1=a$.
	4. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$, *on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.
0,5	**a)** *Soit c l'affixe du point C image du point B par la rotation R. Montrer que :* $c=ib$.
0,25	**b)** *En déduire la nature du triangle OBC.*

Exercice 7 : Normale 2015 :

	Exercice 2 : (3 *points*)
0,75	**1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2+10z+26=0$.
	2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$, *les points A, B, C et* Ω *d'affixes respectives a, b, c et* ω *tels que :* $a=-2+2i$, $b=-5+i$, $c=-5-i$ et $\omega=-3$.
0,5	**a)** *Montrer que :* $\dfrac{b-\omega}{a-\omega}=i$.
0,5	**b)** *En déduire la nature du triangle* ΩAB .
	3. *Soit le point D image du point C par la translation T de vecteur* $\vec{u}$ *d'affixe* $6+4i$.
0,5	**a)** *Montrer que l'affixe d du point D est* $1+3i$.
0,75	**b)** *Montrer que :* $\dfrac{b-d}{a-d}=2$ *et en déduire que le point A est le milieu du segment* $[BD]$.

Normale 2016

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac 2016 - Ss1 .1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-4z+29=0$.

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A , B et Ω d'affixes respectives a , b et ω telles que :

$a=5+2i$ et $b=5+8i$ et $\omega=2+5i$

a) Soit u le nombre complexe : $u=b-\omega$.

Montrer que $\arg u \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) Déterminer un argument du nombre complexe $\bar{u}$ (conjugué de u)

c) Vérifier que $a-\omega=\bar{u}$, en déduire que $\Omega A=\Omega B$ et que $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

d) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image du point A par la rotation R .

Rattrapage 2016

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac 2016 - Ss2 .1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-8z+41=0$.

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A , B , C et Ω d'affixes respectives a , b, c et ω telles que :

$a=4+5i$; $b=3+4i$; $c=6+7i$; $\omega=4+7i$

Calculer $\frac{c-b}{a-b}$ en déduire que les points A , B et C sont alignés.

3) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe d'un point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que $z'=-iz-3+11i$.

b) Déterminer l'image du point c par la rotation R , puis donner la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{a-\omega}{c-\omega}$.

Rattrapage 2015

Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac 2015 – Ss2 — .1

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-8z+32=0$

b) Soit le nombre complexe a tel que $a=4+4i$.

Ecrire le nombre a sous forme trigonométrique en déduire que a^{12} est un nombre réel négatif.

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A , B et C d'affixes a , b et c telles que :

$a=4+4i$ et $b=2+3i$ et $c=3+4i$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe d'un point M' image de M par la rotation R de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que $z'=iz+7+i$.

b) Vérifier que l'affixe d du point D image du point A par la rotation R est $3+5i$.

c) Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-3-5i|=|z-4-4i|$ est la droite (BC) .

Normale 2017

Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac 2017 – Ss1 — .1

Soient les complexes a et b tels que :

$a=\sqrt{3}+i$ et $b=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$.

1) a) vérifier que $b=(1+i)a$.

b) en déduire que : $|b|=2\sqrt{2}$ et $\arg b\equiv\frac{5\pi}{2}[2\pi]$

c) Déduire de ce qui précède que :

$$\cos\frac{5\pi}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2) Le plan est muni à un repère orthonormé.

Soient les points A et B d'affixes respectives a et b, et le point C d'affixe $c=-1+i\sqrt{3}$.

a) Vérifier que $c=ia$, en déduire que $OA=OC$ et que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) Montrer que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère $OABC$

Exercice :

Soient A ; B ; C trois points du plan complexe $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'affixes respectives :
$z_A = 4+6i$; $z_B = 6+4i$ et $z_C = 4\sqrt{3}-4i$.

1) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes : $z_A \times z_B$; $\dfrac{z_A}{z_B}$; z_C^2

2) Calculer les distances AB ; AC et les modules : $|z_A \times z_C|$; $\left|z_A \times \dfrac{z_B}{z_C}\right|$

3) Déterminer la forme trigonométrique de z_C.

4) Soit I le milieu de segment $[AB]$.

   a) Déterminer $z_I = aff(I)$ l'affixe du point I.

   b) Déterminer $z_I = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

   c) En déduire la forme trigonométrique des nombres : $z_C \times z_I$; z_C^4 ; $\overline{z_I}$; $\dfrac{z_I}{z_C}$; $-z_C$ et $z_I^5 \times z_C^6$; $z_I^3 \times \dfrac{z_C^8}{z_I^9}$.

5) Soient D ; E et F trois points dans le plan complexe d'affixes respectives :
   $z_D = 5+7i$; $z_E = 9+5i$ et $z_F = 7+6i$

   a) Montrer que le triangle ABD est rectangle en A.

   b) Monter que les points $D(5+7i)$; $E(9+5i)$ et $F(7+6i)$ sont alignés.

   c) Monter que les points $B(6+4i)$; $D(5+7i)$; $E(9+5i)$ et $I(5+5i)$ sont cocycliques.

Devoir libre 3 (Modèle 2)

Exercice 1 (... pts)

PartieA : Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + \ln(x)$

1) a) Montrer que : $g'(x) = 3\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ pour tous x de $]0;+\infty[$. .

b) En déduire que la fonction g est croissante sur $]0;+\infty[$. .

2) Calculer : $g(1)$ En déduire le signe de $g(x)$ pour tous x de $]0;+\infty[$. .

PartieB : Soit f la fonction définie sur : $I =]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

et (C_f) sa courbe représentatives dans un repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et donnée l'interprétation géométrique de ce résultat. .

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ (Posé : $t = \sqrt{x}$). .

c) Montrer que la droite d'équation : $y = x$ une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$. .

2) a) Montrer que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ pour tous x de $]0;+\infty[$. .

b) En déduire que les variations de la fonction f. .

3) Étudier les positions relatives de (C_f) et la droite (D) : $y = x$. .

4) Construire la droite (D) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ . .

Partie C : Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = e$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $U_{n+1} = f(U_n)$

1) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 \leq U_n \leq e$. .

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. .

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente. .

2) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 2 (... pts)

1) Résoudre les équations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :

(E_1) : $\ln(x+1) = \ln(-x+6)$ 1

(E_2) : $\ln(x+1) + \ln(x+2) = \ln(6)$ 1.5

(E_3) : $\ln(x) = -2$ 0.5

2) Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :

(I_1) : $\ln(x+1) > \ln(-x+6)$ 1

(I_2) : $\ln(x+1) + \ln(x+2) > \ln(6)$ 1.5

3) Déterminer tous les primitives de la fonction f telle que : $f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+4x+5}$ 1

Exercice 3 (... pts)

Soit A ; B ; C trois points du plan d'affixes respectives :

$z_A = -2 + i$; $z_B = 4 + i$ et $z_C = 1 + i\sqrt{3}$.

1) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes : $z_A \times z_B$; $\dfrac{z_A}{z_B}$ et $z_A \times \dfrac{z_C}{z_B}$.

2) Calculer les modules suivantes : $|z_A|$; $|z_B|$; $|z_C|$; $|z_C^6|$ et $|z_A \times z_B \times z_C|$. .

3) Déterminer la forme trigonométrique de z_C. .

4) Soit I le milieu de segment $[AB]$.

a) Déterminer $z_I = aff(I)$ l'affixe du point I. .

b) Déterminer la forme trigonométrique de z_I. .

c) Déterminer la forme trigonométrique des nombres : $\dfrac{z_C}{z_I}$; z_I^8 ; $z_I \times z_C$ et $z_C^4 \times z_I^3$.

Correction du devoir libre 3 S_1 :

Exercice 1 :

PartieA :

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + \ln(x)$

1) a) g est dérivable sur $]0;+\infty[$ (somme et produit de fonction dérivable) et :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x\sqrt{x} - 2 + \ln(x))' \\ &= 2(x'\sqrt{x} + x\sqrt{x}') + \frac{1}{x} \\ &= 2\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{x} \qquad ; \quad car : \left(\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\right) \\ &= 2\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{x} \\ &= 3\sqrt{x} + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

b) On a : $(\forall x \in]0;+\infty[) : g'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x} > 0$ donc la fonction g est croissante sur $]0;+\infty[$.

2) $g(1) = 2\sqrt{1} - 2 + \ln(1) = 2 - 2 + 0 = 0$ et on a g croissante sur $]0;+\infty[$ alors : (Le signe de g) :

- Si : $x \geq 1$ alors : $g(x) \geq g(1)$ c'est à dire : $g(x) \geq 0$
- Si : $0 < x \leq 1$ alors : $g(x) \leq g(1)$ c'est à dire : $g(x) \leq 0$ donc :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	|	$-$	0	$+$	

PartieB :

Soit f la fonction définie sur : $I =]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

et (C_f) sa courbe représentatives dans un repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = +\infty$

car : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

L'interprétation géométrique : (C_f) admet une asymptote verticale d'équation : $x = 0$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$

Si on Pose : $t = \sqrt{x}$. alors : $x = t^2$ et si $x \to +\infty$ alors : $t \to +\infty$

on a : $\frac{ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(t^2)}{t} = \frac{2\ln(t)}{t}$ donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{2\ln(t)}{t} = 2 \times 0 = 0$ (car : $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$)

c) Montrer que la droite d'équation : $y = x$ une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln(x)}{x} = 0$.

2) a) on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x-\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)' \\
&= 1-\frac{\ln'(x)\sqrt{x}-\ln(x)\sqrt{x}'}{\sqrt{x}^2} \\
&= 1-\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x} \qquad ; \qquad car : (\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}) \\
&= 1-\frac{2-\ln(x)}{2x\sqrt{x}} \\
&= \frac{x-2+\ln(x)}{2x\sqrt{x}} \\
&= \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

b) Le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$, donc :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\vert$	$-$	0	$+$	
f	$\vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

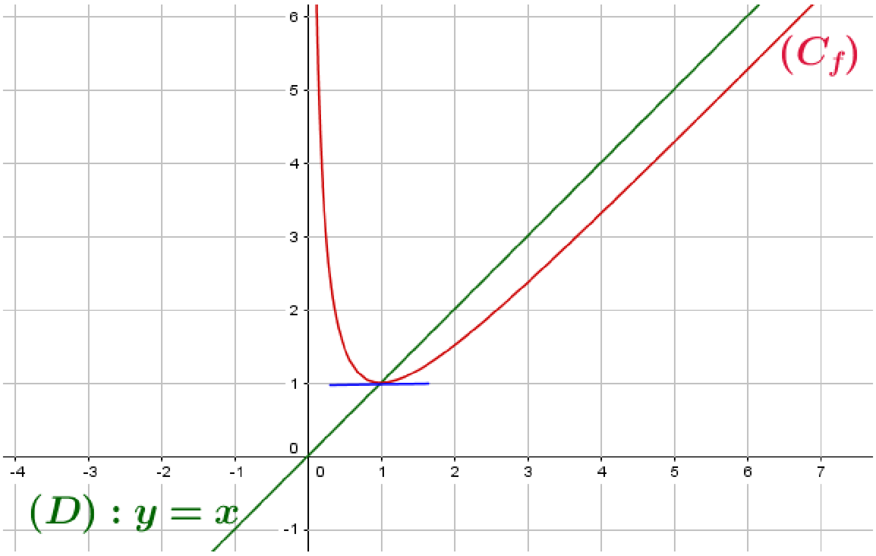
car on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3) Pour étudier les positions relatives de (C_f) et $(D) : y=x$, il faut étudier le signe de la différence :
On a : $f(x)-x=-\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$:

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)-x$	$\vert$	$+$	0	$-$	
Les positions relatives	$\vert$	(C_f) est au dessus de (D)	$\vert$	(C_f) est au dessous de (D)	

- Sur $]0;1]$: (C_f) est au dessus de (D).
- Sur $[1;+\infty[$: (C_f) est au dessous de (D).
- Le point : $A(1;1)$ est le point d'intersection de (C_f) avec (D).

4) La courbe (C_f) et la droite (D).



PartieC :

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq U_n \leq e$
- Pour $n = 0$ on a : $1 \leq U_0 = e \leq e$
- Supposons que : $1 \leq U_n \leq e$ et montrons que : $1 \leq U_{n+1} \leq e$
On a f est croissante sur $[1;+\infty[$ donc croissante sur $[1;e]$ et comme : $1 \leq U_n \leq e$ alors $f(1) \leq f(U_n) \leq f(e)$ et donc : $1 \leq U_{n+1} \leq e$ (car : $f(1) = 1$; $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(e) = e - \dfrac{1}{\sqrt{e}} < e$).
donc d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq U_n \leq e$

b) On a $(\forall x \in [1;+\infty[) : f(x) \leq x$ d'après la questions 3) partie B.
et comme $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n \in [1;e] \subset [1;+\infty[$: alors : $f(U_n) \leq U_n$ c'est à dire : $U_{n+1} \leq U_n$
et donc la suite (U_n) est décroissante.

c) On a (U_n) est décroissante et minorée par 1 donc convergente.

2)
- f est continue sur $[1;e]$
- $f([1;e]) = \left[1; e - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right] \subset [1;e]$
- La suite (U_n) est convergente :

donc la limite de (U_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$: d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$.

Exercice 2 :

1)

a) $(E_1) : \ln(x+1) = \ln(-x+6)$; $D_{E_1} = \{x \in \mathbb{R} / x+1 > 0 \; et \; -x+6 > 0\} =]-1;6[$
$(E_1) \Leftrightarrow x+1 = -x+6 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2} \in]-1;6[$ donc : $S = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

b) $(E_2) : \ln(x+1) + \ln(x+2) = \ln(6)$; $D_{E_2} = \{x \in \mathbb{R} / x+1 > 0 \; et \; x+2 > 0\} =]-1;+\infty[$

$(E_2) \Leftrightarrow \ln((x+1)(x+2)) = \ln(6) \Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 6 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$

donc : $x_1 = 1 \in D_{E_2}$ et $x_2 = -4 \notin D_{E_2}$ $S = \{1\}$.

c) $(E_3) : \ln(x) = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$ donc : $S = \{e^{-2}\}$; on général : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall b \in \mathbb{R}) : \ln(x) = b \Leftrightarrow x = e^b$

2)

a) $(I_1) : \ln(x+1) > \ln(-x+6)$; $D_{I_1} = \{x \in \mathbb{R}/x+1 > 0 \; et \; -x+6 > 0\} =]-1;6[$

$(I_1) \Leftrightarrow x+1 > -x+6 \Leftrightarrow 2x > 5 \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{2}$

donc : $S = \left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[\cap]-1;6[= \left]\dfrac{5}{2};6\right[$

b) $(I_2) : \ln(x+1) + \ln(x+2) > \ln(6)$; $D_{I_2} = \{x \in \mathbb{R}/x+1 > 0 \; et \; x+2 > 0\} =]-1;+\infty[$

$(I_2) \Leftrightarrow \ln((x+1)(x+2)) > \ln(6) \Leftrightarrow (x+1)(x+2) > 6 \Leftrightarrow x^2+3x-4 > 0$

on a : $x_1 = 1$ et $x_2 = -4$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = (]-\infty;-4[\cup]1;+\infty[) \cap]-1;+\infty[=]1;+\infty[$

c) $(E_3) : \ln(x) > -2 \Leftrightarrow x > e^{-2}$ donc : $S =]e^{-2};+\infty[$:
on général : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall b \in \mathbb{R}) : \ln(x) = b \Leftrightarrow x > e^b$

3) on a la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+4x+5}$ est définie et **continue** sur $\mathbb{R}$ (car : $\forall x \in \mathbb{R} :\; x^2+4x+5 \neq 0$),

On a : $f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+4x+5} = \dfrac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}$ donc les fonctions primitives de f sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ sont : $x \mapsto \ln(x^2+4x+5) + \lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Soit A ; B ; C trois points du plan d'affixes respectives : $z_A = -2+i$; $z_B = 4+i$ et $z_C = 1+i\sqrt{3}$.

1) $z_A \times z_B = (-2+i)(4+i) = -8-2i+4i+i^2 = -9+2i$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{-2+i}{4+i} = \frac{(-2+i)(4-i)}{4^2+1^2} = \frac{-8+2i+4i-i^2}{17} = \frac{-7+6i}{17} = \frac{-7}{17} + i\frac{6}{17}$$

on a : $\dfrac{z_C}{z_B} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4+i} = \dfrac{(1+i\sqrt{3})(4-i)}{4^2+1^2} = \dfrac{4-i+4\sqrt{3}i-\sqrt{3}i^2}{17} = \dfrac{4+\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-1)}{17}$

$$z_A \times \frac{z_C}{z_B} = \frac{(-2+i)\left(4+\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-1)\right)}{17} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2) $|z_A| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$; $|z_B| = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$ et $|z_C| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

Donc : $|z_C^6| = |z_C|^6 = 2^6 = 64$; $|z_A \times z_B \times z_C| = |z_A| \times |z_B| \times |z_C| = 2\sqrt{85}$

3) $z_C = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

4) a) $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{-2+i+4+i}{2} = 1+i$

b) On a : $|z_I| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ donc : $z_I = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

c) • $z_C \times z_I = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)$

- $\dfrac{z_C}{z_I} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$
- $z_I^8 = \sqrt{2}^8\left(\cos\left(\dfrac{8\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{8\pi}{4}\right)\right) = 16\left(\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)\right)$
- $z_C^4 \times z_I^3 = 2^4\sqrt{2}^3\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = 32\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{27\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{27\pi}{12}\right)\right)$

Devoir surveiller 3 S_1 Modèle C

Exercice 1 (9 pts) **Partie A** :	
Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=2x\sqrt{x}-2+\ln(x)$	
1) a) Montrer que : $g'(x)=3\sqrt{x}+\frac{1}{x}$ pour tous x de $]0;+\infty[$.	0.75
b) En déduire que la fonction g est croissante sur $]0;+\infty[$.	0.5
2) Calculer : $g(1)$ En déduire le signe de $g(x)$ pour tous x de $]0;+\infty[$.	1
Partie B :	
Soit f la fonction définie sur : $I=]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-1-\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et (C_f) sa courbe représentatives dans un repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$.	
1) a) Calculer : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et donnée l'interprétation géométrique de ce résultat.	1
b) Montrer que : $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{\sqrt{x}}=0$ (Posé : $t=\sqrt{x}$).	0.75
c) Montrer que la droite d'équation : $y=x-1$ une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.	0.75
2) a) Montrer que : $f'(x)=\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ pour tous x de $]0;+\infty[$.	1
b) En déduire que les variations de la fonction f.	1
3) Étudier les positions relatives de (C_f) et la droite (D) : $y=x-1$.	1
4) Construire la droite (D) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.	1.25
Exercice 2 (4.5 pts)	
1) Résoudre les équations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :	
(E_1) : $\ln(x+2)=\ln(-x+4)$	0.75
(E_2) : $\ln(x)+\ln(x+1)=\ln(6)$	1.25
(E_3) : $\ln(x)=-7$	0.5
2) Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :	
(I_1) : $\ln(x+2)>\ln(-x+4)$	0.75
(I_2) : $\ln(x)>-7$	0.5
3) Déterminer tous les primitives de la fonction f telle que : $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+3}$	0.75
Exercice 3 (6.5 pts) Soient A ; B ; C trois points du plan complexe $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'affixes respectives : $z_A=1+3i$; $z_B=5+3i$ et $z_C=\sqrt{3}+i$.	
1) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes : $z_A\times z_B$; $\frac{z_A}{z_B}$.	1.25
2) Calculer la distance AB et le module : $\|z_A\times z_C\|$.	1
3) Déterminer la forme trigonométrique de z_C.	0.75
4) Soit I le milieu de segment $[AB]$.	
a) Déterminer $z_I=aff(I)$ l'affixe du point I.	0.5
b) Montrer que : $z_I=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.	0.5
c) En déduire la forme trigonométrique des nombres : $z_C\times z_I$; z_C^4 et $-z_I$	1.5
5) Soient D et E deux points dans le plan complexe d'affixes respectives : $z_D=5-i$; $z_E=2+2i$	
a) Montrer que le triangle ABD est rectangle en B.	0.5
b) Monter que les points A ; D et E sont alignés.	0.5

Devoir surveiller 3 s_1 Modèle B :

Exercice 1 (8 pts) **<u>PartieA</u>** :	
Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=2x^2-2+4\ln(x)$	
1) Montrer que g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.	1
2) Calculer : $g(1)$ En déduire le signe de $g(x)$ pour tous x de $]0;+\infty[$.	1
<u>PartieB</u> : Soit f la fonction définie sur : $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$	
et (C_f) sa courbe représentatives dans un repère orthonormée $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.	
1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et donnée l'interprétation géométrique de ce résultat.	1
2) a) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^3}$	1
b) En déduire que la fonction f est croissante sur : $[1;+\infty[$ et décroissante sur : $]0;1]$.	0.75
c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et donner le tableau des variations de f.	1
3) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$ et donnée l'interprétation géométrique de ce résultat.	1
4) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.	1.25
Exercice 2 (4.25 pts)	
1) Résoudre les équations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :	
(E_1) : $\ln(x+2)=\ln(-x+4)$	0.75
(E_2) : $\ln(x)+\ln(x+2)=\ln(3)$	1
(E_3) : $\ln(x)=-1$	0.5
2) Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :	
(I_1) : $\ln(x+2)>\ln(-x+4)$	0.75
(I_2) : $\ln(x)>-1$	0.5
3) Déterminer tous les primitives de la fonction f telle que : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$	0.75
Exercice 3 (7.75 pts) Soient A ; B ; C trois points du plan complexe $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'affixes respectives :	
$z_A=1+5i$; $z_B=3-i$ et $z_C=1-i\sqrt{3}$.	
1) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes : $z_A\times z_B$; $\dfrac{z_A}{z_B}$.	1
2) Calculer la distance AB et le module : $\lvert z_A\times z_C\rvert$.	1
3) Déterminer la forme trigonométrique de z_C.	0.75
4) Soit I le milieu de segment $[AB]$.	
a) Déterminer $z_I=aff(I)$ l'affixe du point I.	0.5
b) Montrer que : $z_I=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.	0.5
c) En déduire la forme trigonométrique des nombres : $z_C\times z_I$; z_C^4 ; $\overline{z_I}$ et $\dfrac{z_I}{z_C}$	2
5) Soient D ; E et F trois points dans le plan complexe d'affixes respectives :	
$z_D=4+6i$; $z_E=5+3i$ et $z_F=3+4i$	
a) Montrer que le triangle ABD est rectangle en A.	0.5
b) Monter que les points $A(1+5i)$; $E(5+3i)$ et $F(3+4i)$ sont alignés.	0.5
c) Monter que les points $A(1+5i)$; $D(4+6i)$; $E(5+3i)$ et $I(2+2i)$ sont cocycliques.	1

Devoir surveiller 3 s_1 Modèle A :

Exercice 1 (8 pts) **PartieA** :	
Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-1+2\ln(x)$	
1) Montrer que g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.	1
2) Calculer : $g(1)$ En déduire le signe de $g(x)$ pour tous x de $]0;+\infty[$.	1
PartieB : Soit f la fonction définie sur : $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$	
et (C_f) sa courbe représentatives dans un repère orthonormée $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.	
1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et donnée l'interprétation géométrique de ce résultat.	1
2) a) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$	1
b) En déduire que la fonction f est croissante sur : $[1;+\infty[$ et décroissante sur : $]0;1]$.	0.75
c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et donner le tableau des variations de f.	1
3) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ et donnée l'interprétation géométrique de ce résultat.	1
4) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.	1.25
Exercice 2 (4.25 pts)	
1) Résoudre les équations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :	
(E_1) : $\ln(x+1)=\ln(-x+3)$	0.75
(E_2) : $\ln(x)+\ln(x+3)=\ln(4)$	1
(E_3) : $\ln(x)=-3$	0.5
2) Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :	
(I_1) : $\ln(x+1)>\ln(-x+3)$	0.75
(I_2) : $\ln(x)>-3$	0.5
3) Déterminer tous les primitives de la fonction f telle que : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+2}$	0.75
Exercice 3 (7.75 pts) Soient A ; B ; C trois points du plan complexe $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'affixes respectives :	
$z_A=1+3i$; $z_B=3+i$ et $z_C=\sqrt{3}-i$.	
1) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes : $z_A\times z_B$; $\dfrac{z_A}{z_B}$.	1
2) Calculer la distance AB et le module : $\lvert z_A\times z_C\rvert$.	1
3) Déterminer la forme trigonométrique de z_C.	0.75
4) Soit I le milieu de segment $[AB]$.	
a) Déterminer $z_I=aff(I)$ l'affixe du point I.	0.5
b) Montrer que : $z_I=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.	0.5
c) En déduire la forme trigonométrique des nombres : $z_C\times z_I$; z_C^4 ; $\overline{z_I}$ et $\dfrac{z_I}{z_C}$	2
5) Soient D ; E et F trois points dans le plan complexe d'affixes respectives :	
$z_D=2+4i$; $z_E=6+2i$ et $z_F=4+3i$	
a) Montrer que le triangle ABD est rectangle en A.	0.5
b) Monter que les points $D(2+4i)$; $E(6+2i)$ et $F(4+3i)$ sont alignés.	0.5
c) Monter que les points $B(3+i)$; $D(2+4i)$; $E(6+2i)$ et $I(2+2i)$ sont cocycliques.	1

CHAPITRE 8

LES FONCTIONS EXPONENTIELLES :

8.1 Fonction exponentielle népérienne :

8.1.1 Définitions et conséquences :

La fonction ln est continue, et strictement croissante de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, donc admet une fonction réciproque définie sur $\ln(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$.
Sa fonction réciproque est appelée **fonction exponentielle népérienne.**

Définition 8.1
On appelle fonction exponentielle népérienne, notée exp, la fonction réciproque de la fonction ln.

Proprieté 8.1
$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0;+\infty[)$ on a :

- $\exp(0) = 1 \quad ; \quad \exp(1) = e \quad \text{et} \quad \exp(x) > 0$
- $\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y) \quad \text{et} \quad \ln(\exp(x)) = x \quad \text{et} \quad \exp(\ln(y)) = y$

8.1.2 Le nombre e et la notation e^x :

On a : $(\forall x \in \mathbb{Q}) : \ln(e^x) = x$ donc on peut prolonger cette écriture à $\mathbb{R}$ et on écrit :
$(\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x) = x$, Or $\ln(\exp(x)) = x$ donc $\ln(\exp(x)) = \ln(e^x)$ d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) \exp(x) = e^x$

8.1.3 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle :

Proprieté 8.2
$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$ on a : $e^{x+y} = e^x \times e^y \quad ; \quad e^{-y} = \dfrac{1}{e^y} \quad \text{et} \quad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y} \quad \text{et } (\forall r \in \mathbb{Q}) : e^{rx} = (e^x)^r.$

Exercice :

Résoudre les équations suivantes :
$(E_1) : e^{x-1} = e \ ; \quad (E_2) : e^{x-1} = e \ ; \quad (E_3) : e^{x^2-x} = 1 \ ; \quad (E_4) : e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
$(E_5) : e^{\frac{x+3}{2x+3}} = e^{\frac{1}{x-1}} \quad ; \quad (E_6) : \dfrac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1}.$

8.2 Étude de la fonction exp :

8.2.1 La continuité et dérivabilité de la fonction exp :

Théorème 8.1
La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : (e^x)' = e^x$.
La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété 8.3
$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$ on a : a) $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$ b) $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

Exercice :

Résoudre les inéquations suivantes :
$(I_1) : e^{x-1} < e$; $(I_2) : e^{1+2x} \times e^{-3-3x} > \dfrac{1}{e^x}$; $(I_3) : e^{2x} - 5e^x + 6 < 0$.

8.2.2 Limites aux bornes - branches infinies :

Propriété 8.4
Soit $(\mathcal{C})$ la courbe de la fonction exp dans un repère orthonormé,

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$: la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés au voisinage de $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$: la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote horizontal d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$. ($y = 0$ c'est l'axe des abscisses).

8.2.3 Limites importants :

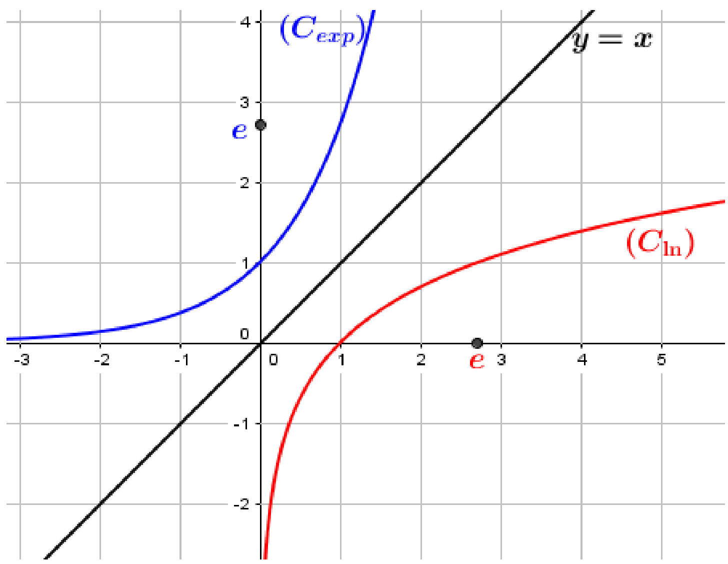
Propriété 8.5
$(\forall n \in \mathbb{N})$: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = 0$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - 1}{x} = a$; $(a \in \mathbb{R})$.

8.2.4 Tableau des variations et la courbe de la fonction exp :

- La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Les courbes $(C_{\exp})$ et $(C_{\ln})$ des fonction exp et ln sont symétriques par rapport à la droite $y = x$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$exp'(x)$		$+$	
exp	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	$+\infty$

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$	
$\ln$	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$



8.3 Exponentielle d'une fonction :

Proprieté 8.6
Soit u une fonction définie au voisinage de a où $a \in \mathbb{R}$ ou $+\infty$ ou $-\infty$.

- Si $\lim_{x \to a} u(x) = +\infty$ alors : $\lim_{x \to a} e^{u(x)} = +\infty$
- Si $\lim_{x \to a} u(x) = -\infty$ alors : $\lim_{x \to a} e^{u(x)} = 0$

Exercice :

Calculer les limites suivantes :
1) $\lim_{x \to +\infty} e^{2x} - e^{x}$; 2) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x+1}$; 3) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}}$; 4) $\lim_{x \to -\infty} (x-1)e^{x}$; 5) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}-1}{3x}$;
6) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{4x}$; 7) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{e^{x}}$; 8) $\lim_{x \to 0^{-}} \dfrac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$; 9) $\lim_{x \to +\infty} e^{-2x+1}$; 10) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{x^3+2x}}$;
11) $\lim_{x \to -\infty} (2x^2 - x + 1)e^{x}$; 12) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}-e^{2x}+e^{x}}{4e^{3x}+10e^{x}}$; 13) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x-e^{x}}{e^{x}-1}$.

Théorème 8.2
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I,
La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et : $(\forall x \in I)$: $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$.
Les primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions définies par : $x \mapsto e^{u(x)} + k \,/\, k \in \mathbb{R}$.

Exercice :

1) Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivantes :
   a) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$; $I = \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$
   b) $f(x) = e^{-2x^3} - 3e^{3x+1}$; $I = \mathbb{R}$
   c) $f(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$; $I =]3;+\infty[$
2) Déterminer les primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivantes :
   a) $f(x) = x^2 e^{x^3}$; $I = \mathbb{R}$
   b) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; $I =]0;+\infty[$

8.4 Fonction exponentielle de base a :

8.4.1 Définition et propriétés :

Définition 8.2
Soit $a \in \mathbb{R}_{+}^{*} \setminus \{1\}$,
On appelle **fonction exponentielle en base** a , noté $\exp_a$ ou $x \mapsto \exp_a(x)$ la fonction réciproque la fonction $\log_a$ et on écrit : $\exp_a(x) = e^{x\ln(a)} = a^{x}$.

Remarques :
- La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = e$ alors on a : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\exp_e(x) = e^{x}$.

Proprieté 8.7
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0;+\infty[)$ on a :

- $\exp_a(0) = a^0 = 1$; $\exp_a(1) = a^1 = a$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) : a^x > 0$.
- $\exp_a(x) = a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$ et $\log_a(\exp_a(x)) = x$ et $\exp_a(\log_a(y)) = y$.
- $(\forall x; y \in \mathbb{R}) : \exp(x+y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$ c'est à dire : $a^x \times a^y = a^{x+y}$.
- $(\forall x; y \in \mathbb{R}) : a^{-y} = \dfrac{1}{a^y}$ et $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q}) : \exp_a(rx) = (\exp_a(x))^r$, c'est à dire : $\forall r \in \mathbb{Q} : a^{rx} = (a^x)^r$.

Exercice :

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1) $(E_1) : 3^x = 6$; $(E_2) : 6^x - 5 \times 3^x = 0$; $(E_3) : 7^x - 3 + 2 \times 7^{-x} = 0$.
2) $(I_1) : 3^x < 6$; $(I_2) : 6^x - 5 \times 3^x > 0$; $(I_3) : 7^x - 3 + 2 \times 7^{-x} < 0$.

8.4.2 Limites aux bornes - branches infinies :

Proprieté 8.8
Soit (C) la courbe de la fonction $\exp_a$ dans un repère orthonormé,

- Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty$: la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés au voisinage de $+\infty$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$: l'axe des abscisses est une asymptote verticale de la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
- Si $0 < a < 1$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a^x}{x} = -\infty$: la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés au voisinage de $-\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$: l'axe des abscisses est une asymptote verticale de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

Exercice 1 :
Étudier les branches infinies des deux fonctions : • $f_1(x) = 2^x$; $f_2(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4^x - 2^x$:

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la courbe de f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique à déterminer.
2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$ et dresser le tableau de variations de f.

8.4.3 Étude de la fonction exponentielle de base a :

Théorème 8.3
La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R} : (a^x)' = \ln(a) \times a^x$
Si $a > 1$ alors la fonction $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $0 < a < 1$ alors la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

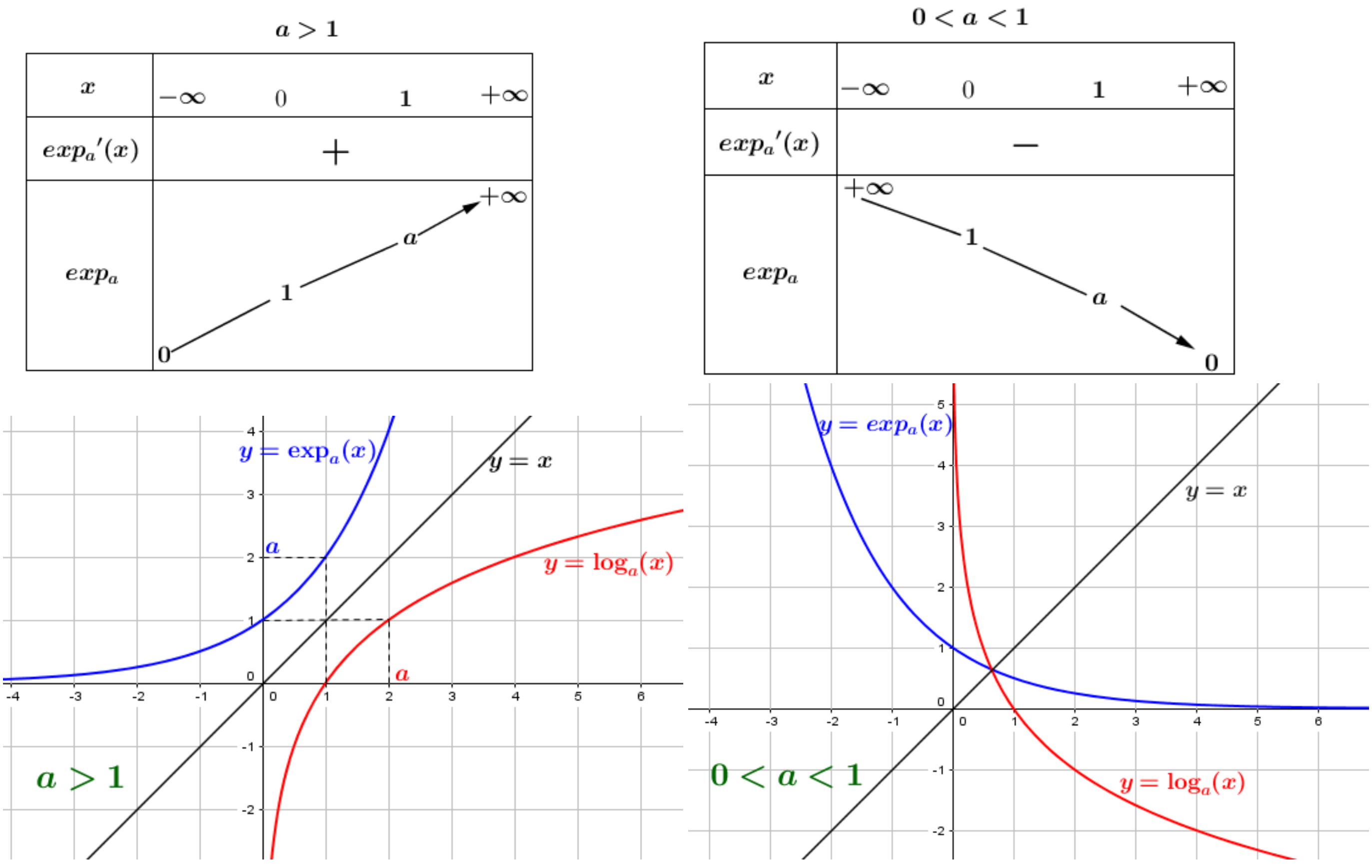
En effet : $(a^x)' = (e^{x\ln(a)})' = (x\ln(a))'e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x$:

- Si $a > 1$ alors $\ln(a) > 0$ donc $(\forall x \in \mathbb{R}) : (a^x)' > 0$:
  alors la fonction $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $0 < a < 1$ alors $\ln(a) < 0$ donc $(\forall x \in \mathbb{R}) : (a^x)' < 0$:
  alors la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquences 8.1
$(\forall x; y \in \mathbb{R})$: a) $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$ b) $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

Tableau des variations et courbe de la fonction exponentielle :

La fonction $\exp_a$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si : $0 < a < 1$:



Exercice :

Représenter graphiquement les deux fonctions : $f_1(x) = 2^x$ et $f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

8.4.4 La série des exercices :

Exercice 1 :

Calculer les limites suivants :

1) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-e^x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2^x}{3^x}$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5^{x+1}+2^x}{3^x+5^x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{1-e^x}$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^5+x^4+6x^2}{e^x}$.

Exercice 2 :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x)=e^x(2x-1)^2$; $I=\mathbb{R}$. 2) $f(x)=\dfrac{2x-1}{e^x}$; $I=\mathbb{R}$. 3) $f(x)=\ln(x)e^{\frac{1}{x}}$; $I=]0;+\infty[$.

Exercice 3 : Normale 2018 :

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac 2018 – Ss1 .4

Partie I :

On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x)=e^x-x^2+3x-1$

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

1) Vérifier que $g(0)=0$ 0,25 pts

2) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$. 0,5 pts

Partie II :

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=(x^2-x)e^{-x}+x$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité 1cm.

1) a) Vérifier que $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}-\dfrac{x}{e^x}+x$, pour tout x de IR, en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. 0,5 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$, en déduire que la droite $(D): y=x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$. 0,75 pts

c) Vérifier que $f(x)=\dfrac{x^2-x+xe^x}{e^x}$, pour tout x de IR, en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. 0,5 pts

d) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) a) Montrer que $f(x)-x$ et x^2-x sont de même signe pour tout x de IR. 0,25 pts

b) En déduire que (C_f) se trouve au dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$ et $[1,+\infty[$ et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0,1]$. 0,5 pts

3) a) Montrer que $f'(x)=g(x)e^{-x}$. pour tout x de IR. 0,75 pts

b) En déduire que f est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. 0,5 pts

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f. 0,75 pts

4) a) Montrer que $f''(x)=(x^2-5x+4)e^{-x}$ pour tout x de IR. 0,25 pts

c) Montrer que (C_f) admet deux points d'inflexion dont d'abscisses respectives 1 et 4. 0,5 pts

5) Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f). (On prend $f(4)\approx 4{,}2$) 1 pts

6) a) Vérifier que la fonction $H(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h(x)=-x^2e^{-x}$ sur R

Exercice 4 : Rattrapage 2017 :

Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac 2017 – Ss 2 3points .1

Partie I :

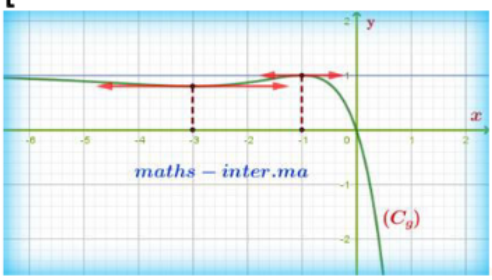
On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x)=1-(x+1)^2e^x$

1) Vérifier que $g(0)=0$ 0,25 pts

2) En partant de la courbe (C_g) de la fonction g (Voir figure ci-dessous), Montrer que : 1 pts

$g(x)\geq 0$ pour tout x de $]-\infty,0]$.

$g(x)\leq 0$ pour tout x de $[0,+\infty[$.



Partie II :

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)=x+1-(x^2+1)e^x$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité 2cm.

1) a) Vérifier que $f(x)=x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x$, pour tout x de IR, en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. 0,75 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$, en déduire que

la droite $(D): y=x+1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$. 0,5 pts

c) Montrer que (C_f) se trouve en dessous de la droite (D). 0,25 pts

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

(Remarquer que : $f(x)=x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$) 0,5 pts

b) Etudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$. 0,25 pts

3) a) Montrer que $f'(x)=g(x)$. pour tout x de IR. 0,75 pts

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. 0,75 pts

c) Montrer que (C_f) admet deux points d'inflexions dont on déterminera les abscisses. 0,75 pts

4) Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f). 1 pts

(On prend $f(-3)\approx-2{,}5$ et $f(-1)\approx-0{,}75$)

5) a) Vérifier que la fonction $H(x)=(x-1)e^x$ est une primitive de la fonction $h(x)=xe^x$ sur IR,

Exercice 5 : Normale 2016 :

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^x$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité 1cm.

Partie I :

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. 0,25 pts

b) Montrer que la droite $(D): y=2x-2$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$. 0,5 pts

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 0,5 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, en déduire la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$. 0,5 pts

3) a) Montrer que $f'(x)=2(e^x-1)^2$. pour tout x de $]0,+\infty[$. 0,5 pts

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur IR. (Remarquer que $f'(0)=0$) 0,25 pts

c) Montrer qu'il existe un nombre réel unique α dans l'intervalle $]1,\ln 4[$ tel que $f(\alpha)=0$ 0,75 pts

4) a) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite $(D): y=2x-2$ sur chacun des intervalles $]-\infty,\ln 4[$ et $]\ln 4,+\infty[$ 0,5 pts

b) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion unique de coordonné $(0,-5)$. 0,5 pts

c) Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f). 1 pts

Exercice 6 :

Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f dans chacune des cas suivantes :

1) $f(x)=e^{2x+3}$; 2) $f(x)=e^3x$; 4) $f(x)=2e^{3x}-e^{-x}$; 5) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$; 6) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 7 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{e^x}$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2+1}{2x^2+3}}\times -e^{-\frac{2x+1}{3x+4}}$.

Exercice 1 (Questions indépendantes) **Devoir surveiller 4 :**

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}*_+$. Développer les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln(y)} - \ln(2e^y) - \ln\left(\frac{e}{2}\right) \quad ; \quad B = \frac{(e^x)^5 \times e^{3-x}}{\left(e^{1+\frac{3}{2}x}\right)^2}$$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : e^{1-x} \times e^{2x} = e \ ; \quad (E_2) : \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \ ; \quad (E_3) : 3 \times e^x + 9 + 4 \times e^{-x} = 0$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $(I_1) : \dfrac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} < e^{x-1}$; $(I_2) : 3e^x + 9 + 4e^{-x} < 0$

3) Calculer les limites suivantes :

a). $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x - x$; b). $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^2}$; c). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2}$; d). $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln(x)}$;

e). $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x + 1)e^x$; f). $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x + 1 - e^x$; g). $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x-1}}{e^{2x+3}}$;

Exercice 2 (Nombres complexes)- Normal 2020

1) Considérons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$

$a)$ Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$ 0.5

$b)$ En déduire les solutions de l'équation (E). 1

2) Considérons les nombres complexes : $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ et $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$a)$ Vérifier que : $b\bar{c} = a$ et déduire que : $ac = 4b$ 0.75

$b)$ Déterminer la forme trigonométrique de b et c. 0.5

$c)$ En déduire que : $a = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ 0.5

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Considérons les points : B et C et D d'affixes respectives : b et c et d, avec $d = a^4$

Soit z l'affixe d'un point M dans le plan et z' l'affixe du point M' l'image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$. $a)$ Vérifier que : $z' = \dfrac{1}{4}az$ 0.5

$b)$ Déterminer l'image du point C par la rotation R. 0.25

$c)$ Déterminer la nature du triangle OBC 0.25

$d)$ Montrer que : $a^4 = 128b$ En déduire que les points O et B et D sont alignées. 0.75

Exercice 3 (Problème)

I). Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$

1). Étudier les variations de la fonction g.

2). En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geq 0$

II). Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1). Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, et représenter géométriquement le résultat.

2). Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et représenter géométriquement les résultats. (Vérifier que $f(x) = xe^x\left(\dfrac{e^x}{x} - 2\right) - 1$

3). a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 2g(x)e^x$

b) En déduire que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

c) Calculer $f'(0)$ représenter géométriquement ce résultat. d) Construire la courbe (C)

Exercice 3

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}*_+$. Développement des expressions :

$$A = e^{\ln(y)} - \ln(2e^y) - \ln\left(\frac{e}{2}\right) = y - (\ln(2) + \ln(e^y)) - (\ln(e) - \ln(2))$$
$$= y - \ln(2) - y - 1 + \ln(2) = -1$$
$$B = \frac{(e^x)^5 \times e^{3-x}}{\left(e^{1+\frac{3}{2}x}\right)^2} = \frac{e^{5x} \times e^{3-x}}{e^{2(1+\frac{3}{2}x)}} = \frac{e^{5x+3-x}}{e^{2+3x}} = e^{5x+3-x-2-3x} = e^{x+1}$$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : \ e^{1-x} \times e^{2x} = e \Leftrightarrow e^{1-x+2x} = e \Leftrightarrow e^{x+1} = e \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(E_2) : \ \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \Leftrightarrow e^{2-x-(1+2x)} = e^{x-1} \Leftrightarrow e^{1-3x} = e^{x-1} \Leftrightarrow 1-3x = x-1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$(E_3) : \ 3 \times e^x + 9 + 4 \times e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x(3 \times e^x + 9 + 4 \times e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow 3 \times e^{2x} + 9e^x + 4 \times e^{-x}e^x = 0 \Leftrightarrow 3e^{2x} + 9e^x + 4 = 0$$

On pose $X = e^x$ alors : $(E_3) \Leftrightarrow X^2 + 9X + 4 = 0$

$\Delta = 81 - 4 \times 3 \times 4 = 33 > 0$ alors : $X = \dfrac{-9-\sqrt{33}}{6} < 0$ ou $X = \dfrac{-9+\sqrt{33}}{6} < 0$,

donc l'équation (E_3) n'admet pas de solutions, (car : $X = e^x > 0$)

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(I_1) : \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} < e^{x-1} \Leftrightarrow e^{2-x-(1+2x)} < e^{x-1} \Leftrightarrow e^{1-3x} < e^{x-1} \Leftrightarrow 1-3x < x-1 \Leftrightarrow -4x < -2 \Leftrightarrow x > 2 \qquad \textit{donc } S =]2; +\infty[$$

$(I_2) : \ 3e^x + 9 + 4e^{-x} < 0 \Leftrightarrow 3e^{2x} + 9e^x + 4 < 0$

Cette équation n'admet pas de solutions car : $3e^x > 0$ et $9 > 0$ et $4e^{-x} > 0$

3) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x - x = +\infty$ (car : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$)

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ (car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$)

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \times \dfrac{1}{x} = 1 \times \infty = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\ln(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-x+1)e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-x+1) \times \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1-e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(\dfrac{x^2}{e^x}+\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{1}{e^x}-1\right) = -\infty$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $-1<0$).

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x-1}}{e^{2x+3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x-1-2x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-4} = +\infty$

Exercice 4

1) Considérons l'équation : $(E):\ z^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z+16=0$

a) Calcul de Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta &= [-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})]^2-4\times1\times16\\
&= 4(2+2\sqrt{2}\sqrt{6}+6)-64\\
&= 32+8\sqrt{2}\sqrt{6}-64\\
&= -32+8\sqrt{2}\sqrt{6}\\
&= -4(8-2\sqrt{2}\sqrt{6})\\
&= -4(6-2\sqrt{2}\sqrt{6}+2)\\
&= -4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2<0
\end{aligned}$$

b) On a $\Delta<0$ alors l'équation (E) admet deux racines non réels :

$z_1 = \dfrac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})+i\sqrt{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}}{2} = \sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ et $z_2=\overline{z_1}=\sqrt{2}+\sqrt{6}-i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

2) a)

$$\begin{aligned}
b\bar{c} &= (1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})\\
&= \sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{3}\sqrt{2}-i^2\sqrt{3}\sqrt{2}\\
&= \sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6}\\
&= \sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\\
&= a
\end{aligned}$$

On a : $a=b\bar{c}$ donc : $ac=b\bar{c}c=b|c|^2=b(\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2)=4b$ (car ; $\bar{c}c=|c|^2$)

b) On a : $|b|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$ alors : $b=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

On a : $|c|=\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}=\sqrt{4}=2$ alors : $c=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

c) On a donc : $\bar{c}=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ alors : $a=b\bar{c}=2\times2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

d'où : $a=4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$

3) a) Soient : $R\left(O;\frac{\pi}{12}\right)$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$, soit $M(z)$ et $M'(z')$ on a :

$$\begin{aligned} R(M)=M' &\Leftrightarrow z'-0=e^{i\frac{\pi}{12}}(z-0) \\ &\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{12}}z \\ &\Leftrightarrow z'=\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)z \\ &\Leftrightarrow z'=\frac{1}{4}az \end{aligned}$$

b)) Soient C' un point d'affixe c' tel que : $R(C)=C'$ on a :

$$\begin{aligned} R(C)=C' &\Leftrightarrow c'=\frac{1}{4}ac \\ &\Leftrightarrow c'=\frac{1}{4}\times 4b \\ &\Leftrightarrow c'=b \end{aligned}$$

Donc : $aff(C')=aff(B)$ alors : $C'=B$ et donc : $R(C)=B$:
l'image du point C par cette rotation est le point B.

c) on a : $R(C)=B$ alors $\begin{cases} OC=OB \\ \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi] \end{cases}$ donc : le triangle OBC est isocèle en O.

d)

$$\begin{aligned} a^4 &= \left[4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\right]^4 \\ &= 4^4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{12}\right)\right) \\ &= 256\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 256\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 128\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ &= 128b \end{aligned}$$

On a : $\frac{d-0}{b-0}=\frac{d}{b}=\frac{a^4}{\frac{a^4}{128}}=128\in\mathbb{R}$: alors les points : O et B et D sont alignées.

Exercice 5

I) Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^x-x-1$

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x\in\mathbb{R}) : g'(x)=e^x-1$.

Tableau de variation de la fonction g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)=e^x-1$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(0)=0$	$\nearrow$	

2) Á partir du tableau de variation de g on a : $(\forall x\in\mathbb{R}) : g(x)\geq g(0)$
donc : $(\forall x\in\mathbb{R}) : g(x)\geq 0$

II) Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

1) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} - 2xe^x - 1 = 0 - 2\times 0 - 1 = -1$, c-a-d :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, donc (C_f) admet une asymptote horizontal d'équation $y = -1$ au voisinage de $-\infty$.

2) On a : $f(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1 = xe^x\left(\dfrac{e^{2x}}{xe^x} - 2\dfrac{xe^x}{xe^x}\right) - 1 = xe^x\left(\dfrac{e^x}{x} - 2\right) - 1$

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$. et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(\dfrac{e^x}{x} - 2\right) - \dfrac{1}{x} = +\infty$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

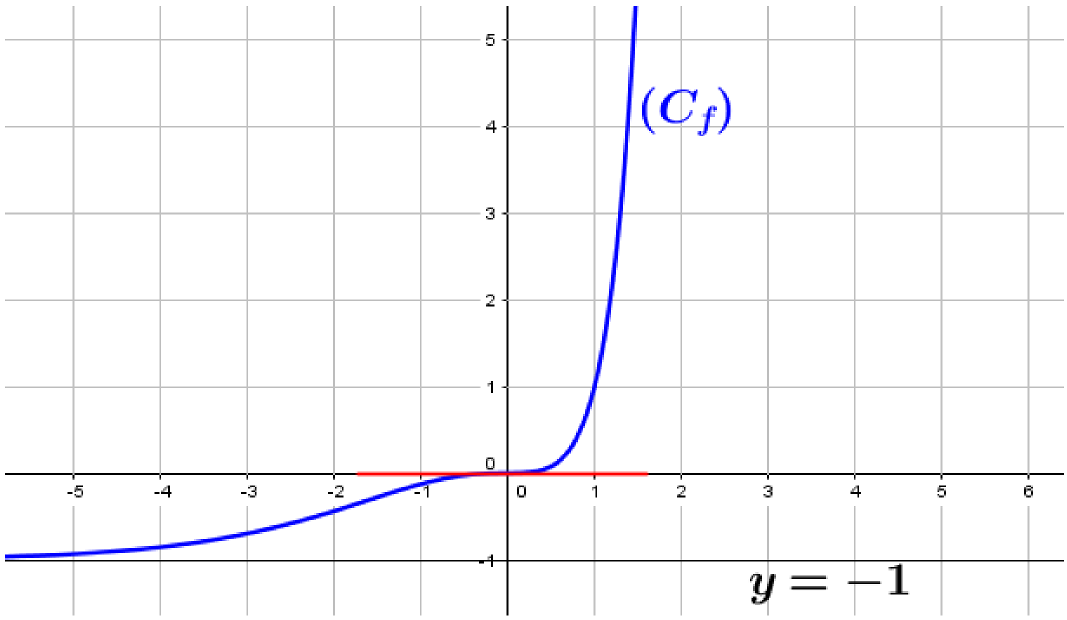
3) a) la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{2x} - 2xe^x - 1)' \\ &= 2e^{2x} - 2(x'e^x + x(e^x)') \\ &= 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x \\ &= 2e^x(e^x - 1 - x) \\ &= 2e^x g(x) \end{aligned}$$

b) On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geq 0$ et $e^x > 0$ donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) \geq 0$ et donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) $f'(0) = 2e^0 g(0) = 2\times 1\times 0 = 0$ donc (C_f) admet une tangente horizontal en $(0; f(0))$

d) La courbe (C_f) :



Exercice 1 (8 pts) **Devoir G_1**	
Soient A ; B ; C et D quatre points dans le plan complexe d'affixes respectifs : $z_A = 2-i$ et $z_B = -1-i$ et $z_C = 2+2i$ et $z_D = \sqrt{3}+1+2i$	
1) a) Calculer les distances : AB et AC.	0.75
b) Calculer : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, en déduire la nature du triangle ABC.	0.75
2) Déterminer la forme trigonométrique des nombres : z_C et z_B	1.5
3) Déduire la notation exponentielle des nombres : z_C et z_B	1
4) Soit I le milieu du segment $[BD]$.	
a) Déterminer $z_I = aff(I)$ l'affixe du point I.	0.5
b) Déterminer la forme trigonométrique de z_I.	0.75
c) Déterminer la forme trigonométrique des nombres : $\dfrac{z_C}{z_I}$ et $z_B \times z_I$ et z_I^8	2
d) Déterminer la notation exponentielle du nombre : $z_B \times z_I \times z_C$	0.75
Exercice 2 (3.25 pts)	
1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$	1
2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, considérons les points : A et B et C et Ω d'affixes respectifs : $a = 1+i$ et $b = 4-i$ et $c = -2+3i$ et $w = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i$.	
a) Calculer : $\dfrac{b-a}{c-a}$ en déduire que les points A et B et C sont alignés.	0.75
b) Soit R la rotation du centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et qui transforme le poins M d'affixe z en point M' d'affixes z'. Montrer que : $z' = iz - 3i$	0.75
b) Montrer que : $R(B) = A$	0.75
Exercice 3 (2.5 pts)	
1) Résoudre l'équation : $\dfrac{e^{x^2+3}}{e^{x+2}} = e^{x-2}$; 2) Résoudre l'inéquation : $e^{2x} - 7e^x + 12 < 0$	2
3) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{4x}$	0.5
Exercice 4 (6.25 pts)	
I). Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - 2x - 2$	
1). Étudier les variations de la fonction g.	0.75
2). En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geq 0$	0.5
II). Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{2x} - 4xe^x - 2$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormée $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.	
1). Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, et représenter géométriquement le résultat.	0.75
2). Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et représenter géométriquement les résultats. (Vérifier que $f(x) = xe^x\left(2\dfrac{e^x}{x} - 4\right) - 2$)	1.25
3). a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 2g(x)e^x$	1
b) En déduire que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$	0.5
c) Calculer $f'(0)$ représenter géométriquement ce résultat	0.5
d) Construire la courbe (C)	1

Exercice 1 (8 pts)

Soient A ; B ; C et D quatre points dans le plan complexe d'affixes respectifs :
$z_A = 2 - i$ et $z_B = -1 - i$ et $z_C = 2 + 2i$ et $z_D = \sqrt{3} + 1 + 2i$

1) a) $AB = |z_B - z_A| = |-1 - i - 2 + i| = |-3| = 3$ et
$AC = |z_C - z_A| = |2 + 2i - 2 + i| = |3i| = 3|i| = 3.$

b) $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{3i}{-3} = -i \in i\mathbb{R}$, donc ABC est triangle rectangle en A et on a : $AB = AC$, alors : ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

2) On a : $|z_C| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ alors :
$z_C = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{2}{2\sqrt{2}} + i\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \left[2\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{4}\right].$
On a : $|z_B| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ alors :
$z_B = \sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\sqrt{2}; \dfrac{5\pi}{4}\right].$

3) La notation exponentielle : $z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

4) Soit I le milieu du segment $[BD]$.

a) $z_I = aff(I) = \dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{-1 - i + \sqrt{3} + 1 + 2i}{2} = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}.$

b) $z_I = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right).$

c) $\dfrac{z_C}{z_I} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \left[2\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{12}\right]$
$z_B \times z_I = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)\right) = \left[\sqrt{2}; \dfrac{17\pi}{12}\right]$
$z_I^8 = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^8 = \cos\left(\dfrac{8\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{8\pi}{6}\right)$

d) $z_B \times z_I \times z_C = 2 \times 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{20\pi}{12}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Exercice 2 (3.25 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$
On a : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0$: alors l'équation admet deux racines non réels :
$z_1 = \dfrac{2 - i\sqrt{4}}{2} = 1 - i$ et $z_2 = \bar{z}_1 = 1 + i$

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, considérons les points :
A et B et C et Ω d'affixes respectifs : $a = 1 + i$ et $b = 4 - i$ et $c = -2 + 3i$ et $w = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i.$

a) $\dfrac{b - a}{c - a} = \dfrac{4 - i - 1 - i}{-2 + 3i - 1 - i} = \dfrac{3 - 2i}{-3 + 2i} = -1 \in \mathbb{R}$ alors les points A et B et C sont alignés.

b) Soit $R(\Omega;\frac{\pi}{2})$ la rotation du centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} R(M)=M' &\Leftrightarrow z'-w=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-w)\\ &\Leftrightarrow z'=i(z-w)+w\\ &\Leftrightarrow z'=iz-i\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\right)+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\\ &\Leftrightarrow z'=iz-\frac{3}{2}i-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\\ &\Leftrightarrow z'=iz-3i \end{aligned}$$

c) Soit B' un point du plan complexe d'affixe b' tel que : $R(B)=B'$
On a : $b'=ib-3i=i(4-i)-3i=4i+1-3i=1+i=a$
donc : $aff(B')=aff(A)$ et donc $B'=A$ c-a-d $R(B)=A$

Exercice 3 (2.5 pts)

1)

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2+3}}{e^{x+2}}=e^{x-2} &\Leftrightarrow e^{x^2+3-x-2-x+2}=e^0\\ &\Leftrightarrow x^2-2x+3=0 \end{aligned}$$

On a : $\Delta=4-12=-8<0$ alors l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

2) Résolvons l'inéquation : $(E):\ e^{2x}-7e^x+12<0$
On pose : $X=e^x$ alors : $(E)\Leftrightarrow X^2-7X+12<0$,
Résolvons l'équation : $X^2-7X+12$, on a : $\Delta=1>0$ et $X_1=3$; $X_2=4$
donc : $e^x=3$ ou $e^x=4$ c'est à dire : $x=\ln(3)$ ou $x=\ln(4)$,

x	$-\infty$		$ln(3)$		$ln(4)$		$+\infty$
$e^{2x}-7e^x+12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=]ln(3);ln(4)[$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{4}\times\dfrac{e^{3x}-1}{x}=\dfrac{3}{4}$

Exercice 4 (6.25 pts)

I). Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2e^x-2x-2$

1). La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=2e^x-2=2(e^x-1)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(0)=0$	$\nearrow$	

2). D'après le tableau de variation de g : $(\forall x\in\mathbb{R}) : g(x)\geq g(0)$ donc : $(\forall x\in\mathbb{R}) : g(x)\geq 0$

II). Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2e^{2x}-4xe^x-2$

1). $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-2$,

Alors (C_f) la courbe de la fonction f admet une asymptote horizontal d'équation : $y=-2$ au voisinage de $-\infty$.

2). On a : $f(x)=2e^{2x}-4xe^x-2=xe^x\left(2\dfrac{e^{2x}}{xe^x}-4\dfrac{xe^x}{xe^x}\right)-2=xe^x\left(2\dfrac{e^x}{x}-4\right)-2$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

et : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(2\frac{e^x}{x}-4\right)-\frac{2}{x}=+\infty$

(Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$)

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

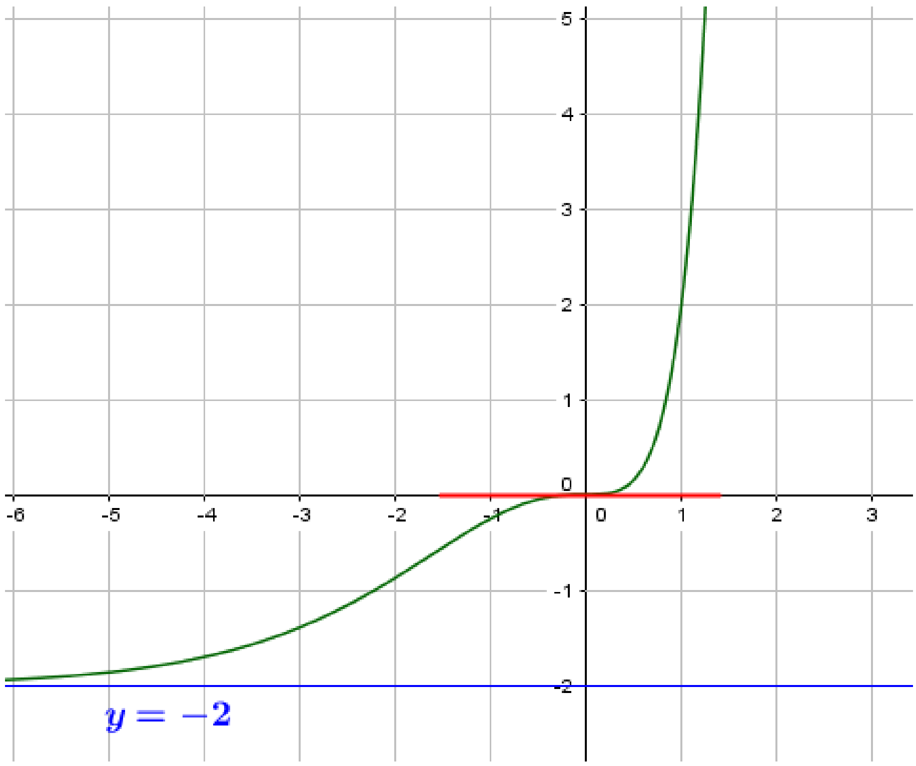
3). a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2e^{2x}-4xe^x-2)' \\ &= 4e^{2x}-4(e^x+xe^x) \\ &= 4e^{2x}-4e^x-4xe^x \\ &= 2e^x(2e^x-2-2x) \\ &= 2e^xg(x) \end{aligned}$$

b) On a : $(\forall x\in\mathbb{R}) : g(x)\geq 0$ et $(\forall x\in\mathbb{R}) : e^x>0$ alors : $(\forall x\in\mathbb{R}) : f'(x)\geq 0$, donc la fonction f est croissant sur $\mathbb{R}$

c) $f'(0)=2e^0g(0)=0$ donc la courbe de la fonction f admet une tangente horizontal au point : $(0;f(0))$

d) La courbe (C)



Exercice 1 (8 pts) **Devoir G_2**	
Soient A ; B ; C et D quatre points dans le plan complexe d'affixes respectifs :	
$z_A = 3$ et $z_B = 1+i$ et $z_C = 2-2i$ et $z_D = -i+\sqrt{3}i$	
1) a) Calculer les distances : AB et AC.	0.75
b) Calculer : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, en déduire la nature du triangle ABC.	0.75
2) Déterminer la forme trigonométrique des nombres : z_C et z_B	1.5
3) Déduire la notation exponentielle des nombres : z_C et z_B	1
4) Soit I le milieu du segment $[BD]$.	
a) Déterminer $z_I = aff(I)$ l'affixe du point I.	0.5
b) Déterminer la forme trigonométrique de z_I.	0.75
c) Déterminer la forme trigonométrique des nombres : $\dfrac{z_B}{z_I}$ et $z_C \times z_I$ et z_I^9	2
d) Déterminer la notation exponentielle du nombre : $z_B \times z_I \times z_C$	0.75
Exercice 2 (3.25 pts)	
1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$	1
2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, considérons les points : A et B et C et Ω d'affixes respectifs : $a = 2+i$ et $b = 2-i$ et $c = i$ et $w = 1$.	
a) Montrer que : $\dfrac{a-w}{b-w} = i$ en déduire que le triangle ΩAB est isocèle et rectangle en Ω.	0.75
b) Soit R la rotation du centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et qui transforme le poins M d'affixe z en point M' d'affixes z'. Montrer que : $z' = iz + 1 - i$	0.75
c) Montrer que : $R(A) = C$	0.75
Exercice 3 (2.5 pts)	
1) Résoudre l'équation : $\dfrac{e^{x^2-3x}}{e^{x-3}} = e^{x-3}$	1
2) Résoudre l'inéquation : $e^{2x} + e^x - 2 < 0$	1
3) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^3 - x^2$	0.5
Exercice 4 (6.25 pts)	
I). Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 1$	
1). Étudier les variations de la fonction g. (Résoudre l'équation : $2e^x - 1 = 0$)	1
2). En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geq 0$	0.5
II). Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{2x} - 2xe^x - 2$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormée $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.	
1). Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, et représenter géométriquement le résultat.	0.75
2). Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et représenter géométriquement les résultats. (Vérifier que $f(x) = xe^x\left(2\dfrac{e^x}{x} - 2\right) - 2$)	1.5
3). a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 2g(x)e^x$	1
b) En déduire que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$	0.5
c) Construire la courbe (C)	1

Exercice 1 (8 pts)

Soient A ; B ; C et D quatre points dans le plan complexe d'affixes respectifs :
$z_A = 3$ et $z_B = 1+i$ et $z_C = 2-2i$ et $z_D = -i+\sqrt{3}i$

1) a) $AB = |z_B - z_A| = |1+i-3| = |-2+i| = \sqrt{5}$ et
$AC = |z_C - z_A| = |2-2i-3| = |-1-2i| = \sqrt{5}$.

b) $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-2+i}{-1-2i} = \dfrac{-2+i}{i(i-2)} = -i \in i\mathbb{R}$, donc ABC est triangle rectangle en A et on a : $AB = AC$,
alors : ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

2) On a : $|z_C| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ alors :
$z_C = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{2}{2\sqrt{2}} - i\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \left[2\sqrt{2}; -\dfrac{\pi}{4}\right]$.
On a : $|z_B| = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$ alors :
$z_B = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

3) La notation exponentielle : $z_C = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

4) Soit I le milieu du segment $[BD]$.

a) $z_I = aff(I) = \dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{1+i-i+\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{\sqrt{3}i+1}{2}$.

b) $z_I = \dfrac{1}{2} + \sqrt{3}2i = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \left[1; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

c) $\dfrac{z_C}{z_I} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right)\right) = \left[2\sqrt{2}; \dfrac{-5\pi}{12}\right]$

$z_B \times z_I = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right) = \left[\sqrt{2}; \dfrac{5\pi}{12}\right]$

$z_I^9 = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^9 = \cos\left(\dfrac{9\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{9\pi}{3}\right) = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = [1; \pi]$

d) $z_B \times z_I \times z_C = 2 \times 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 2 (3.25 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$
On a : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$: alors l'équation admet deux racines non réels :
$z_1 = \dfrac{4 - i\sqrt{4}}{2} = 2 - i$ et $z_2 = \bar{z}_1 = 2 + i$

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, considérons les points :
A et B et C et Ω d'affixes respectifs : $a = 2+i$ et $b = 2-i$ et $c = i$ et $w = 1$.

a) $\dfrac{a-w}{b-w} = \dfrac{2-i-1}{i-1} = \dfrac{1-i}{i-1} = \dfrac{-i(i-1)}{i-1} = -i \in \mathbb{R}$ alors le triangle ΩAB est isocèle et rectangle en Ω.

b) Soit $R(\Omega;\frac{\pi}{2})$ la rotation du centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} R(M)=M' &\Leftrightarrow z'-w=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-w) \\ &\Leftrightarrow z'=i(z-1)+1 \\ &\Leftrightarrow z'=iz-i+1 \\ &\Leftrightarrow z'=iz+1-i \end{aligned}$$

c) $\dfrac{z_C}{z_I}=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right)\right)=\left[2\sqrt{2};\dfrac{-5\pi}{12}\right]$

$z_B\times z_I=\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right)=\left[\sqrt{2};\dfrac{5\pi}{12}\right]$

$z_I^9=\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^9=\cos\left(\dfrac{9\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{9\pi}{3}\right)=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=[1;\pi]$

d) $z_B\times z_I\times z_C=2\times 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 3 (2.5 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2-4z+5=0$
On a : $\Delta=(-4)^2-4\times1\times5=16-20=-4<0$: alors l'équation admet deux racines non réels :
$z_1=\dfrac{4-i\sqrt{4}}{2}=2-i$ et $z_2=\bar{z}_1=2+i$

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, considérons les points :
A et B et C et Ω d'affixes respectifs : $a=2+i$ et $b=2-i$ et $c=i$ et $w=1$.

a) $\dfrac{a-w}{b-w}=\dfrac{2-i-1}{i-1}=\dfrac{1-i}{i-1}=\dfrac{-i(i-1)}{i-1}=-i\in\mathbb{R}$ alors le triangle ΩAB est isocèle et rectangle en Ω.

b) Soit $R(\Omega;\frac{\pi}{2})$ la rotation du centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} R(M)=M' &\Leftrightarrow z'-w=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-w) \\ &\Leftrightarrow z'=i(z-1)+1 \\ &\Leftrightarrow z'=iz-i+1 \\ &\Leftrightarrow z'=iz+1-i \end{aligned}$$

c) Soit A' un point du plan complexe d'affixe a' tel que : $R(A)=A'$
On a : $a'=ia+1-i=i(2+i)+1-i=2i-1+1-i=i=c$
donc : $aff(A')=aff(C)$ et donc $A'=C$ c-a-d $R(A)=C$

Exercice 3 (2.5 pts)

1)

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2-3x}}{e^{x-3}}=e^{x-3} &\Leftrightarrow e^{x^2-3x-x+3-x+3}=e^0 \\ &\Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \end{aligned}$$

On a : $\Delta=25-24=1>0$ alors l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: $x_1=2$ et $x_2=3$

2) Résolvons l'inéquation : (E) : $e^{2x}+e^x-2<0$
On pose : $X=e^x$ alors : $(E)\Leftrightarrow X^2+X-2<0$,
Résolvons l'équation : $X^2+X-2=0$, on a : $\Delta=9>0$ et $X_1=1$; $X_2=-2$
donc : $e^x=1$ ou $e^x=-2$ et comme $(\forall x\in\mathbb{R})$: $e^x>0$ alors : $e^x=1$ donc : $x=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^{2x}+e^x-2$	$-$	0	$+$

Donc : $S=]-\infty;0[$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1-\dfrac{x^3}{e^x}-\dfrac{x^2}{e^x}\right)=+\infty$ (Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$)

Exercice 4 (6.25 pts)

I). Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2e^x-x-1$
1). La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=2e^x-1$
On a : $g'(x)=0\Leftrightarrow 2e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$:

Le tableau de variation de g :

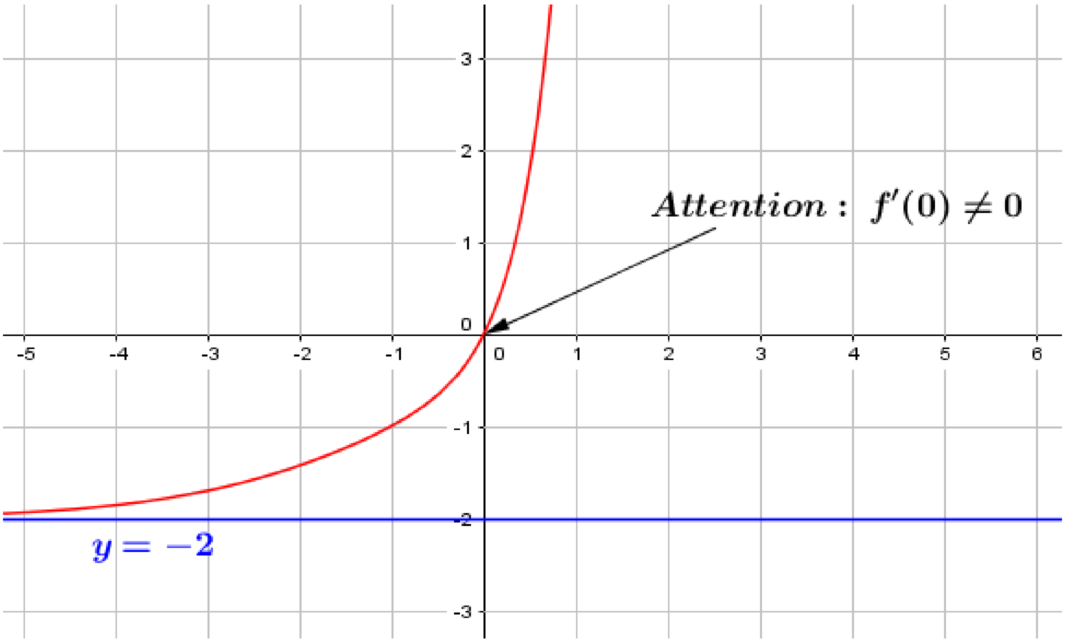
x	$-\infty$	$ln(\frac{1}{2})$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	$g\left(ln(\frac{1}{2})\right)=ln(2)>0$	$\nearrow$

2). D'après le tableau de variation de g : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $g(x)\geq ln(2)>0$ donc : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $g(x)\geq 0$

II). Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2e^{2x}-2xe^x-2$
1). $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$,
Alors (C_f) la courbe de la fonction f admet une asymptote horizontal d'équation : $y=-2$ au voisinage de $-\infty$
2). On a : $f(x)=2e^{2x}-2xe^x-2=xe^x\left(2\dfrac{e^{2x}}{xe^x}-2\dfrac{xe^x}{xe^x}\right)-2=xe^x\left(2\dfrac{e^x}{x}-2\right)-2$
On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
et : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(2\dfrac{e^x}{x}-2\right)-\dfrac{2}{x}=+\infty$
(Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$)
Donc (C_f) la courbe de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$
3). a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2e^{2x}-2xe^x-2)' \\ &= 4e^{2x}-2(e^x+xe^x) \\ &= 4e^{2x}-2e^x-2xe^x \\ &= 2e^x(2e^x-1-x) \\ &= 2e^xg(x) \end{aligned}$$

b) On a : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $g(x)>0$ et $(\forall x\in\mathbb{R})$: $e^x>0$ alors : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $f'(x)>0$, donc la fonction f est croissant sur $\mathbb{R}$
c) La courbe (C)


$Attention: \ f'(0) \neq 0$
$y = -2$
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

Devoir libre 1 S_1

Exercice 1 (5 pts) 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-6z+13$	0.75
2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points : A ; B et C d'affixes respectives : a ; b et c telles que : $a=3+2i$; $b=3-2i$ et $c=-1-2i$.	
a) Écrire : $\dfrac{c-b}{a-b}$ sous la forme trigonométrique.	0.5
b) En déduire la nature du triangle ABC.	0.5
3) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R, et soit D le point d'affixe : $d=-3-4i$	
a) Écrire z' en fonction de z	0.5
b) Vérifier que C est l'image de A par : R	0.25
4) a) Montrer que les points : A ; C et D sont alignés.	0.5
b) Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre C et qui transforme A en D.	0.5
c) Déterminer l'affixe m du point E pour que le quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme	0.5
5) a) Montrer que $\dfrac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel.	0.5
b) En déduire que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle.	0.5
Exercice 2 (8 pts) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2-xe^{-x+1}$ et (C) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité = 1 cm).	
1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.	0.5
2) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.	0.5
b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.	0.75
3) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x)=(x-1)e^{-x+1}$	0.75
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f	0.5
4) a) Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$	0.5
b) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion d'abscisse 2	0.5
5) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on prend : $f(2)\simeq 1,25$)	1
6) Déterminer la valeur minimale de la fonction f et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{x-1}\geq x$	0.5
7) a) En utilisant une intégration par parties, calculer : $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x}dx$	0.5
b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=4-e+3e^{-1}$	0.5
8) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;1]$	
a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.	0.5
b) Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$	0.75
c) A partir de la courbe représentative de g^{-1} ; déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g^{-1}(x)}{x}\right)$	0.25
Exercice 3 (... pts) Calculer les intégrales suivantes :	
1) $\displaystyle\int_1^2 x^3dx$; 2) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}dx$; 3) $\displaystyle\int_1^{\ln(2)} (e^x+1)(e^x+x-2)dx$; 4) $\displaystyle\int_1^e x\ln(x)dx$; 5) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^xdx$; 6) $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln(x)dx$; 7) $\displaystyle\int_1^{e^2} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$; 8) $\displaystyle\int_1^{e^2} \dfrac{1+\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$; 9) $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{4x+2}{2x^2+2x+4}dx$.	

Correction du devoir libre 1 S_2 :

Exercice 1 :

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-6z+13=0$:
on a : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times13=36-52=-16<0$, donc l'équation admet deux solutions non réels :
$z_1=\dfrac{-(-6)-i\sqrt{16}}{2\times1}=\dfrac{6-4i}{2}=3-2i$ et donc : $z_2=\overline{z_1}=3+2i$.

2) a) $\dfrac{c-b}{a-b}=\dfrac{-1-2i-3+2i}{3+2i-3+2i}=\dfrac{-4}{4i}=\dfrac{4i^2}{4i}=i=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ car : $\begin{cases}|i|=1\\ arg(i)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

b) on a : $\begin{cases}\left|\dfrac{c-b}{a-b}\right|=1\\ arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc : $BC=BA$ et $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$,
donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

3) a)

$$\begin{aligned}R(M)=M' &\Leftrightarrow z'-b=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-b)\\ &\Leftrightarrow z'=i(z-b)+b\\ &\Leftrightarrow z'=i(z-3+2i)+3-2i\\ &\Leftrightarrow z'=iz-3i-2+3-2i\\ &\Leftrightarrow \boxed{z'=iz+1-5i}\end{aligned}$$

b) Soit A' un point d'affixe a' telle que : $A'=R(A)$, on a :

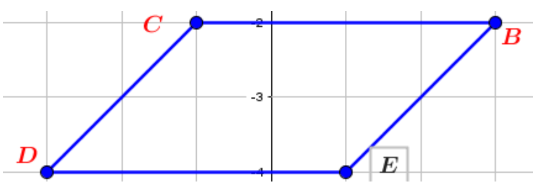
$$\begin{aligned}A'=R(A)\Leftrightarrow a' &= ia+1-5i\\ &= i(3+2i)+1-5i\\ &= 3i-2+1-5i\\ &= -1-2i=c\end{aligned}$$

donc : $aff(A')=aff(C)$ et donc $A'=C$ c'est à dire : $R(A)=C$

4) a) on a : $\dfrac{d-a}{c-a}=\dfrac{-3-4i-3-2i}{-1-2i-3-2i}=\dfrac{-6-6i}{-4-4i}=\dfrac{6}{4}\in\mathbb{R}$, donc les points A ; C et D sont alignés.
b) Soit h l'homothétie de rapport k et de centre C, tel que : $h(A)=D$, déterminons k ?, on a :

$$\begin{aligned}h(A)=D &\Leftrightarrow d-c=k(a-c)\\ &\Leftrightarrow k=\frac{d-c}{a-c}\\ &\Leftrightarrow k=\frac{-3-4i+1+2i}{3+2i+1+2i}\\ &\Leftrightarrow k=\frac{-2-2i}{4+4i}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

donc : le rapport de l'homothétie est : $k=-\dfrac{1}{2}$

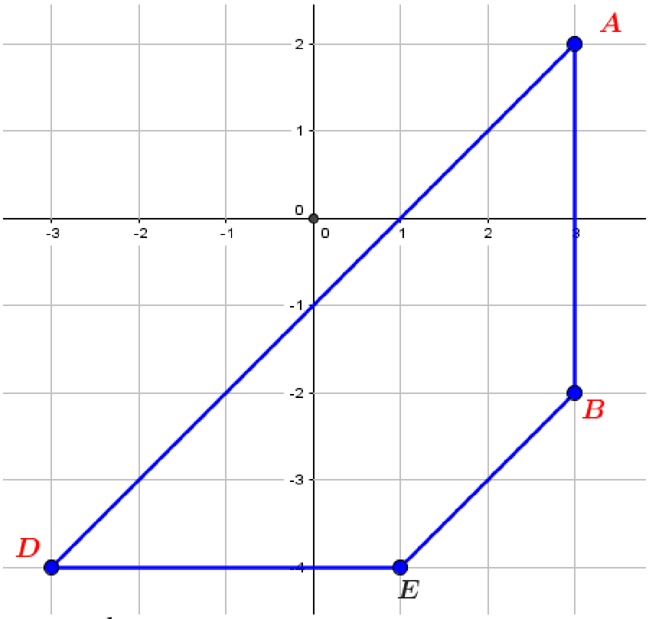


c) $(BCDE$ est un parallélogramme $)\Leftrightarrow BC=ED$

$$\begin{aligned} BC = ED &\Leftrightarrow c - b = d - m \\ &\Leftrightarrow m = d - c + b \\ &\Leftrightarrow m = -3 - 4i + 1 + 2i + 3 - 2i \\ &\Leftrightarrow m = 1 - 4i \end{aligned}$$

5) a) On a : $\dfrac{d-a}{m-b} = \dfrac{-3-4i-3-2i}{1-4i-3+2i} = \dfrac{-6-6i}{-2-2i} = 3 \in \mathbb{R}$

b) Pour montrer que $ABED$ est un trapèze isocèle. il suffit de montrer que : $(AD) \parallel (BE)$ et $AB = DE$



On a : $\dfrac{d-a}{m-b} \in \mathbb{R}$ donc : $(AD) \parallel (BE)$ et on a :
$AB = |b-a| = |3-2i-3-2i| = |4i| = 4$ et $DE = |m-d| = |1-4i+3+4i| = 4$ donc : $AB = DE$

Exercice 3 :

1) $\displaystyle\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4 - 1^4}{4} = \frac{15}{4}$

2) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2 - e^0}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$

3) $\displaystyle\int_1^{\ln(2)} (e^x+1)(e^x+x-2)dx = \int_1^{\ln(2)} (e^x+x-2)'(e^x+x-2)dx = \left[\frac{(e^x+x-2)^2}{2}\right]_1^{\ln(2)}$

$\displaystyle = \frac{(2+\ln(2)-2)^2 - (e-1+2)^2}{2} = \frac{\ln^2(2) - (e-1)^2}{2}$

4) $\displaystyle\int_1^e x\ln(x)dx$: on pose : $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ on a :

$\displaystyle\int_1^e x\ln(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$

5) $\int_0^1 x^3e^xdx$, il faut utilisé la méthode de l'intégration par parties trois fois :

on pose : $\begin{cases} u'(x)=e^x \\ v(x)=x^3 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u(x)=e^x \\ v'(x)=3x^2 \end{cases}$ on a donc :

$\int_0^1 x^3e^xdx = \left[x^3e^x\right]_0^1 - \int_0^1 3x^2e^xdx = e - \int_0^1 3x^2e^x$

Pour calculer : $\int_0^1 3x^2e^xdx$, on pose : $\begin{cases} u'(x)=e^x \\ v(x)=3x^2 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u(x)=e^x \\ v'(x)=6x \end{cases}$ donc :

$\int_0^1 3x^2e^xdx = \left[3x^2e^x\right]_0^1 - \int_0^1 6xe^xdx = 3e - \int_0^1 6xe^xdx$

Pour calculer : $\int_0^1 6xe^xdx$, on pose : $\begin{cases} u'(x)=e^x \\ v(x)=6x \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u(x)=e^x \\ v'(x)=6 \end{cases}$ donc :

$\int_0^1 6xe^xdx = [6xe^x]_0^1 - \int_0^1 6e^xdx = 6e - [6e^x]_0^1 = 6e-6e+6 = 6$

d'où : $\int_0^1 x^3e^xdx = e-(3e-6) = 6-2e$

6) $\int_1^2 x^2\ln(x)dx$: on pose : $\begin{cases} u'(x)=x^2 \\ v(x)=\ln(x) \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u(x)=\dfrac{x^3}{3} \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$ donc :

$$\int_1^2 x^2\ln(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}dx = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2dx = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}$$

7) $\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$: on pose : $\begin{cases} u'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ v(x)=\ln(x) \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u(x)=2\sqrt{x} \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$ donc :

$\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{2\sqrt{x}}{x}dx = 4e - \int_1^{e^2} \frac{2}{\sqrt{x}}dx = 4e - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^{e^2} = 4e-4(e-1) = 4$

8) $\int_1^{e^2} \frac{1+\ln(x)}{\sqrt{x}}dx = \int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$

$= [2\sqrt{x}]_1^{e^2} + 4 = 2(e-1)+4 = 2e+2$:

9) $\int_0^1 \frac{4x+2}{2x^2+2x+4}dx \int_0^1 \frac{(2x^2+2x+4)'}{2x^2+2x+4}dx = \left[\ln|2x^2+2x+4|\right]_0^1 = 8-4 = 4$

Exercice 2 :

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2-xe^{-x+1} = \lim_{x\to+\infty} 2-xe^{-x}\times e$,

si on pose : $t=-x$ alors : $\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} = \lim_{t\to-\infty} te^t = 0$, donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2+0\times e = 2$

Alors : la courbe de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y=2$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2-xe^{-x+1} = +\infty$ car : $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+1} = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-xe^{-x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} - e^{-x+1} = -\infty$

car : $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} -e^{-x+1} = -(+\infty) = -\infty$

Alors : la courbe de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés au voisinage de $-\infty$.

3) a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2-xe^{-x+1})' \\ &= (-x)'e^{-x+1}+(-x)\times(-x+1)'e^{-x+1} \\ &= -e^{-x+1}+xe^{-x+1} \\ &= (x-1)e^{-x+1} \end{aligned}$$

b) On a : $e^{-x+1}>0$ donc le signe de f' est le signe de $x-1$ alors :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

4) a)

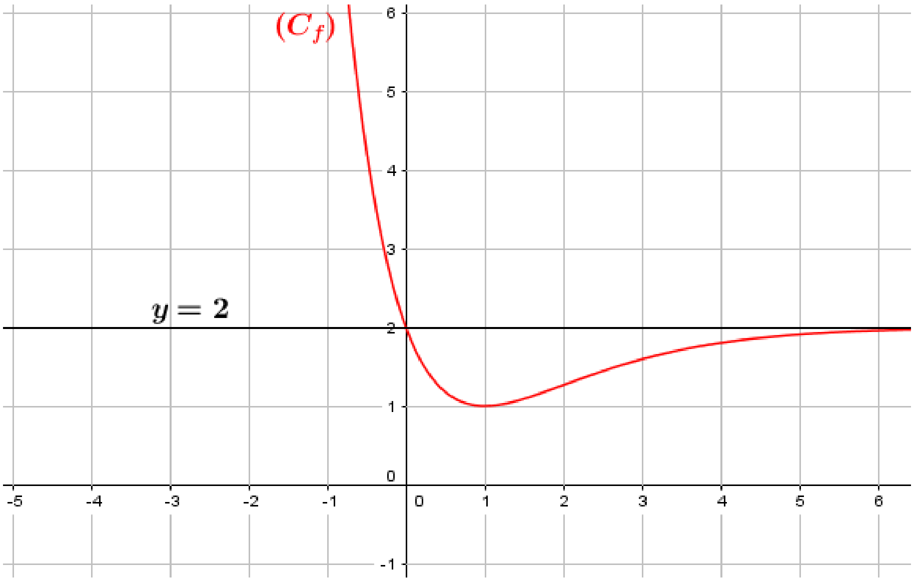
$$\begin{aligned} f''(x) &= \left((x-1)e^{-x+1}\right)' \\ &= (x-1)'e^{-x+1}+(x-1)\times(-x+1)'e^{-x+1} \\ &= e^{-x+1}-(x-1)e^{-x+1} \\ &= (-x+2)e^{-x+1} \end{aligned}$$

b) On a : $e^{-x+1}>0$ donc le signe de f'' est le signe de $-x+2$ alors :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
(C_f)		**Convexe**	|	**Concave**	

Le point $(2;f(2))$ est un point d'inflexion de (C_f) car : $f''(2)=0$ et f change de singe au point 2.

5) La courbe de f :



6) D'après la courbe la valeur minimale de f est : -1
Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\geq 1$

$$\begin{array}{ll} donc: & 2-xe^{-x+1}\geq 1 \\ donc: & -xe^{-x+1}\geq -1 \\ donc: & xe^{-x+1}\leq 1 \\ donc: & x\leq \dfrac{1}{e^{-x+1}} \\ et\, donc: & e^{x-1}\geq x \end{array}$$

7 a) Calculons : $\int_0^2 xe^{-x}dx$, on pose : $\begin{cases} u'(x)=e^{-x} \\ v(x)=x \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u(x)=-e^{-x} \\ v'(x)=1 \end{cases}$ donc :

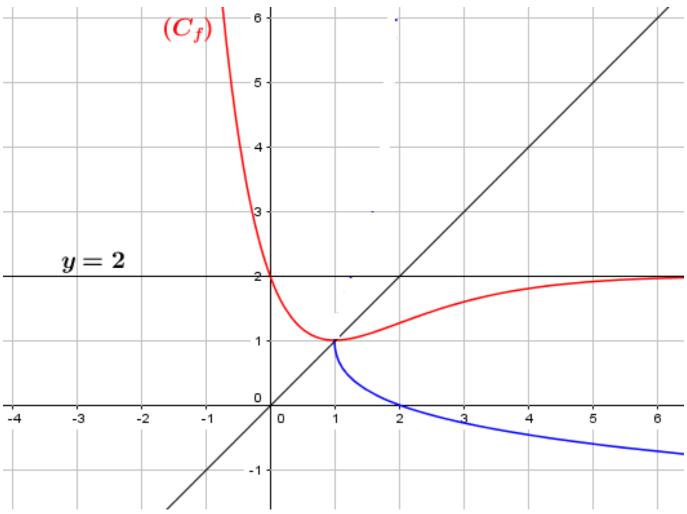
$\int_0^2 xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}dx = -2e^{-2} - \left[e^{-x}\right]_0^2 = -2e^{-2}-e^{-2}+1 = -3e^{-2}+1$

b)

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 2-xe^{-x+1}dx \\ &= \int_0^2 2dx - \int_0^2 -xe^{-x}\times edx \\ &= [2x]_0^2 - (-3e^{-2}+1)\times e \\ &= 4-(1-3e^{-2})e \\ &= 4-e+2e^{-2+1} = 4-e+3e^{-1} \end{aligned}$$

8) a) La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;1]$ donc admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur : $J=g(]-\infty;1])=[g(1);\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)[=[1;+\infty[$

b) La courbe de g^{-1} :



c) D'après la courbe de g^{-1} : $(C_{g^{-1}})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses : et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g^{-1}(x)}{x}\right)=0$

Devoir surveiller 1 S_2

Exercice 1 (7.5 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ — 1

2) Soient les nombres complexes : $a=e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Écrire a sous la forme algébrique. — 0.5

b) Vérifier que $\bar{a}b=\sqrt{3}$ — 0.75

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points : A ; B et C d'affixes respectives : a ; b et $c=\bar{a}$.

3) Montrer que le point B est l'image de A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport. — 0.75

4) Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par la rotation R, de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Écrire z' en fonction de z et a. — 0.75

b) Soit d l'affixe du point D l'image de C par la rotation R, montrer que : $d=a+1$ — 0.5

c) Soit I le point d'affixe 1, montrer que $ADIO$ est un **losange**. — 0.75

5) a)Vérifier que : $d-b=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$, en déduire un argument du nombre $d-b$. — 1

b) Écrire le nombre $1-b$ sous la forme trigonométrique. — 0.75

c) Déduire une mesure de l'angle. $\left(\widehat{\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BD}}\right)$ — 0.75

Exercice 2 (10.25 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

et (C) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité = 2 cm).

1) Montrer que : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. — 1

2) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=-x+\frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ — 1

b) Résoudre l'équation $e^{x-2}-4=0$ puis déduire les positions relatives de (C_f) et la droite (Δ) sur l'intervalle $]-\infty;2+\ln(4)]$ et sur l'intervalle $[2+\ln(4);+\infty[$ — 1.25

3) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat — 0.75

4) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x)=-(e^{x-2}-1)^2$ — 0.75

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f — 0.5

5) a) Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ — 0.5

b) Montrer que $A(2;2)$ est un point d'inflexion à la courbe (C). — 0.5

6) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que $2+\ln 3\leq\alpha\leq 2+\ln(4)$ — 0.75

7) Construire la courbe (C) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on prend : $\ln(2)\simeq 0,7$ et $\ln(3)\simeq 1,1$) — 1.5

8) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$. — 0.75

b) Construire la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

(remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la droite $y=x$). — 1

Exercice 3 (2.25 pts)

I) Calculer les intégrales suivantes : $\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx$; $\int_0^1 xe^x dx$; $\int_1^{e^2}\ln(x)dx$ — 1.5

II) Calculer la limite : $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-4e^x+3}{e^{2x}-1}$ — 0.75

Exercice 1 (4.5 pts)

Devoir surveiller 1 S_2 B

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2+2z+5=0$ — 1

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère la rotation R, de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

a) Écrire sous la forme trigonométrique le complexe : $d=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. — 0.75

b) On considère le point A d'affixe $a=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$, et le point B l'image du point A par la rotation R. Soit b l'affixe de B, montrer que $b=d\times a$ — 0.75

3) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et C l'image de B par la translation t et c l'affixe de C.

a)Vérifier que : $c=b+a$, — 0.5

b) En déduire que : $c=a\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. — 0.5

c) Déterminer $arg\left(\dfrac{c}{a}\right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral. — 1

Exercice 2 (10 pts)

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^x-x^2+3x-1$

x	$-\infty$	$+\infty$
g'(x)	+	
g(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g.

1) Vérifier que $g(0)=0$ — 0.5

2) Déterminer le signe de $g(x)$ — 0.75

Partie II : Soit la fonction f définie par : $f(x)=(x^2-x)e^{-x}+x$ et (C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité $1cm$.

1) a) Vérifier que : $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}-\dfrac{x}{e^x}+x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, en déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. — 0.75

b) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$, en déduire que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$. — 0.75

c) Vérifier que : $f(x)=\dfrac{x^2-x+xe^x}{e^x}$, pour tout x de $\mathbb{R}$, en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ — 0.75

d) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat. — 0.75

2) a) Montrer que : $f(x)-x$ et x^2-x sont de même signe pour tout x de $\mathbb{R}$. — 0.5

b) En déduire les positions relatives de (C_f) et la droite (D). — 0.75

3) a) Montrer que : $f'(x)=g(x)e^{-x}$, pour tout x de $\mathbb{R}$ — 1

b) Donner le tableau des variations de f. — 1

4) a) Montrer que : $f''(x)=(x^2-5x+4)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$. — 0.5

b) En déduire la concavité de (C_f) et les points d'inflexions. — 0.75

5) Tracer la courbe (C_f) et la droite (D) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. — 1.25

Exercice 3 (5.5 pts)

I) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^4\sqrt{x}dx$; 2) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^xdx$; 3) $\displaystyle\int_1^{e^2}x\ln(x)dx$; 4) $\displaystyle\int_0^1\cos(x)e^xdx$ — 4.5

II) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-5e^x+4}{e^{2x}-1}$ — 1

Devoir surveiller 1 S_2 C

Exercice 1 (7.5 pts) 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-\sqrt{2}z+1=0$	1
2) On pose : $a=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$	
a) Déterminer la forme trigonométrique de a en déduire que a^{2020} est un réel.	1
b) Soit le nombre complexe : $b=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, montrer que : $b^2=a$.	0.5
3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, considérons les points A ; B et C d'affixes respectifs : a ; b et c avec $c=1$. Soit R la rotation du centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$ et qui transforme le poins M d'affixe z en point M' d'affixes z'.	
a) Vérifier que : $z'=bz$	0.75
b) Déterminer l'image du point C par la rotation R et montrer que le point A est l'image du point B par la rotation R.	1
4) a) Montrer que : $\lvert a-b\rvert=\lvert b-c\rvert$, en déduire la nature du triangle ABC	0.75
b) Déterminer une mesure d'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$	1
5) Considérons T la translation du vecteur $\vec{u}$ et soit D l'image de A par la translation T :	
a) Vérifier que l'affixe de D est le nombre complexe b^2+1	0.5
b) Montrer que : $\frac{b^2+1}{b}=b+\bar{b}$, en déduire que les points O et B et D sont alignés	1
Exercice 2 (8.5 pts)	
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x$ et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, (l'unité $1cm$)	
1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.	0.5
b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.	0.75
2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	0.75
d) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.	1
3) a) Montrer que : $f'(x)=(e^x-1)^2$, pour tout x de $\mathbb{R}$	0.75
b) Donner le tableau des variations de f, (remarquer que $f'(0)=0$).	0.75
c) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha\in]1;\ln(4)[$ tel que : $f(\alpha)=0$	1
4) a) Montrer que la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (D) sur $]\ln(4);+\infty[$ et qu'elle est en-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty;\ln(4)[$	1
b) Montrer que (C_f) admet une seule point d'inflexion de coordonnées $(0;-2)$	0.75
5) Tracer la courbe (C_f) et la droite (D) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. (On prendra $\ln(4)\simeq 1.4$ et $\alpha\simeq 1.3$)	1.25
Exercice 3 (4 pts) I) Calculer les intégrales suivantes :	
1) $\int_0^{\ln(2)}\frac{e^x}{e^x+1}dx$; 2) $\int_0^1 x^2e^xdx$; 3) $\int_1^{e^2}x\ln(x)dx$	3.25
II) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-5e^x+4}{e^{2x}-1}$	0.75

CHAPITRE 9

CALCUL INTÉGRAL

9.1 Intégrale d'une fonction continue :

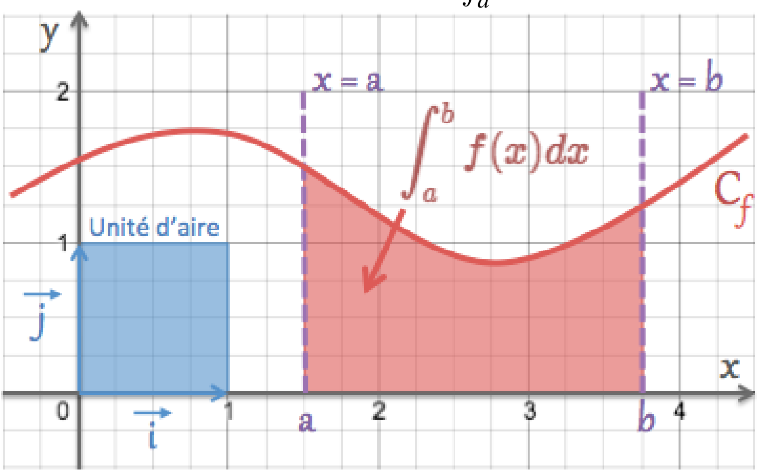
Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Définition 9.1
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et soit F sa primitive sur $[a;b]$.
Le réel $F(b)-F(a)$ est appelé l'intégrale (ou somme) de a à b de f on le note $\int_a^b f(x)dx$.

Exemple :
Calculons : $\int_0^1 x^2dx$, on a la fonction $x \to f(x) = x^2$ est continue sur $[0;1]$ donc admet une primitive sur $[0;1]$ qu'est : $F(x) = \frac{x^3}{3}$, donc : $\int_0^1 x^2dx = F(1)-F(0) = \frac{1}{3}$.
Exercice :
Calculer les intégrales suivantes :
1) $\int_0^2 4x^3 - xdx$; 2) $\int_0^{\pi} \cos(x)dx$; 3) $\int_0^{\ln(2)} e^{\frac{t}{2}}dx$; 4) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

Interprétation géométrique :

Si f est une fonction **continue positive** sur $[a;b]$, alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$: est égale à : $\int_a^b f(x)dx \parallel \vec{i} \parallel \cdot \parallel \vec{j} \parallel$



On note : $\int_a^b f(x)dx \parallel \vec{i} \parallel \cdot \parallel \vec{j} \parallel = Aire(\mathcal{D})$.

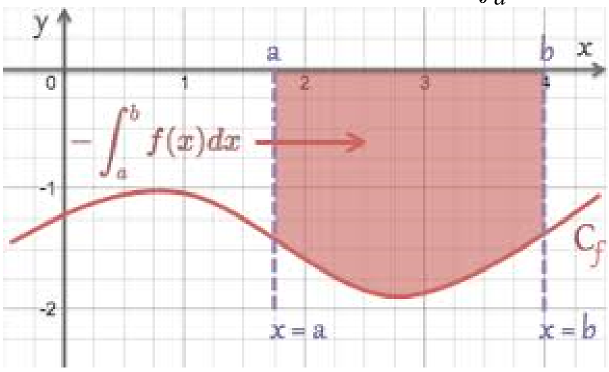
Remarques :

• On peut remplacer x dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ par n'importe qu'elle lettre :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy = \ldots\ldots$$

• $\mathcal{D} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; a \leq x \leq b \; et \; 0 \leq y \leq f(x)\}$

• Si f est négative sur $[a;b]$ alors : $-\int_a^b f(x)dx \parallel \vec{i} \parallel \cdot \parallel \vec{j} \parallel = Aire(\mathcal{D})$.



Proprieté 9.1
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et k et c deux réels.

- $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^a f(x) = 0dx$

Exercice :

1) Calculer les intégrales :

$I_1 = \int_0^2 |x-1|dx$; $I_2 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$; $I_3 = \int_0^1 \sqrt{t+2}dt$; $I_4 = \int_{\ln(2)}^1 \frac{e^t}{e^t+1}dt$; $I_5 = \int_0^3 |x^2-3x+2|dx$

2) a) Linéariser $\sin^3(x)$,

b) Calculer l'intégrale : $\int_0^{\pi} \sin^3(x)dx$

9.2 Méthode de calcule des intégrales

9.2.1 Méthode directe

Calculer les intégrales suivantes : (Il faut chercher une primitive de la fonction) :

- $I = \int_1^e \frac{(\ln(x))^3}{x}dx$
- $J = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$
- $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx$

9.2.2 Méthode d'intégration par parties

Théorème 9.1
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ telles que leurs dérivés sont **continue sur** $[a;b]$ alors : $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Exemple :
Calculons l'intégrale : $I = \int_0^1 xe^x dx$, posons : $f'(x) = e^x$ et $g(x) = x$, alors : $f(x) = e^x$ et $g'(x) = 1$
donc : $I = [f(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)g'(x)dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$

Exercice :

En utilisant la méthode de l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :
$I_1 = \int_1^e x\ln(x)dx$; $I_2 = \int_1^e \ln(x)dx$; $I_3 = \int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx$; $I_4 = \int_0^{\pi} x\cos(x)dx$;
$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^x dx$; $I_6 = \int_0^1 \ln(x+1)dx$; $I_7 = \int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$; $I_8 = \int_0^1 x^2e^x dx$

9.3 Intégrale et ordre

9.3.1 Comparaison de deux intégrales :

Proprieté 9.2
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.

- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- Si $(\forall x \in [a;b]) : f(x) \geq 0$ alors : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $(\forall x \in [a;b]) : f(x) \geq g(x)$ alors : $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Exercice :

1) Montrer que : $\forall x \in [0;1] : \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x^2} \leq x^2$,

2) En déduire un encadrement de l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

9.3.2 La valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Définition 9.2
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
Le réel : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé la valeur moyenne de f sur $[a;b]$.

Théorème 9.2
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

- Si deux réels m et M sont tels que : $\forall x \in [a;b]\ m \leq f(x) \leq M$, alors :
  $m \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M$,
- Il existe $c \in [a;b]$ tel que : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Exercice :

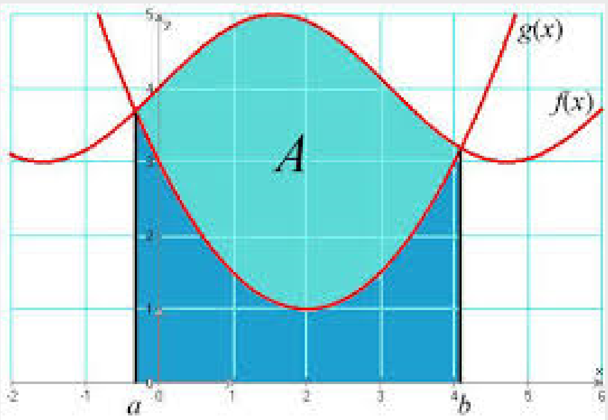
Déterminer la valeur moyenne de la fonction ln sur $[1;e]$.

9.4 Calcul d'aires - Calcul de volumes

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

9.4.1 Calcul d'aires

Théorème 9.3
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.
L'aire exprimée en unités d'aires, de la surface comprise entre les deux courbes des fonctions f et g et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$, est le réel positif : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$

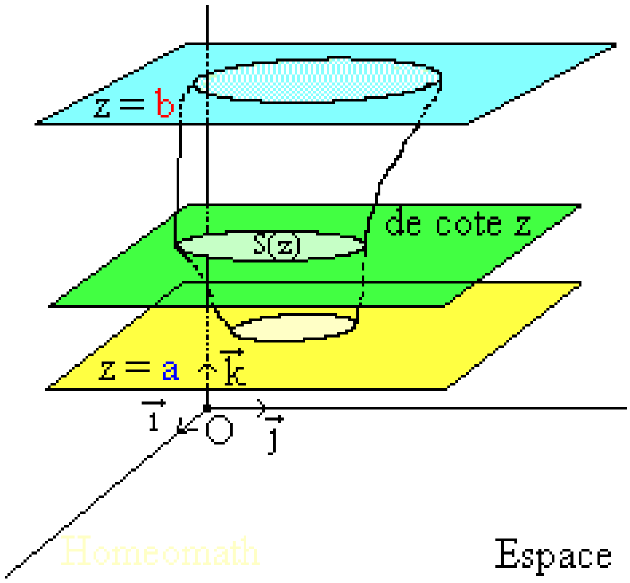


Cas particulier :

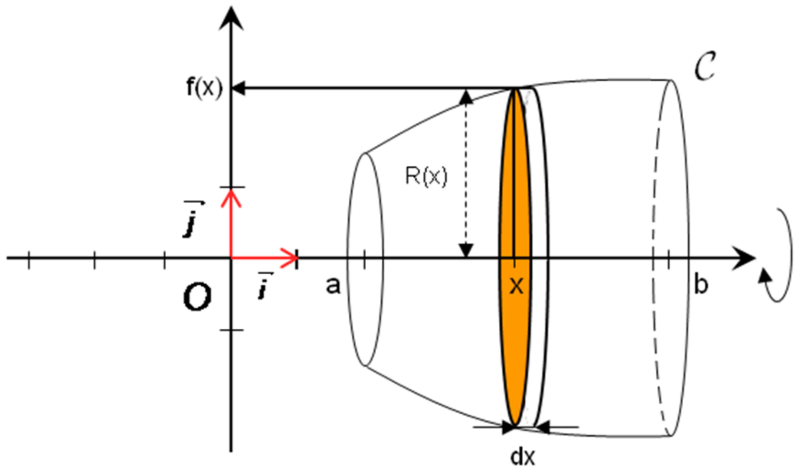
L'aire exprimée en unités d'aires, de la surface comprise entre la courbe de f et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$, est le réel positif : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$

9.4.2 Calcul de volumes

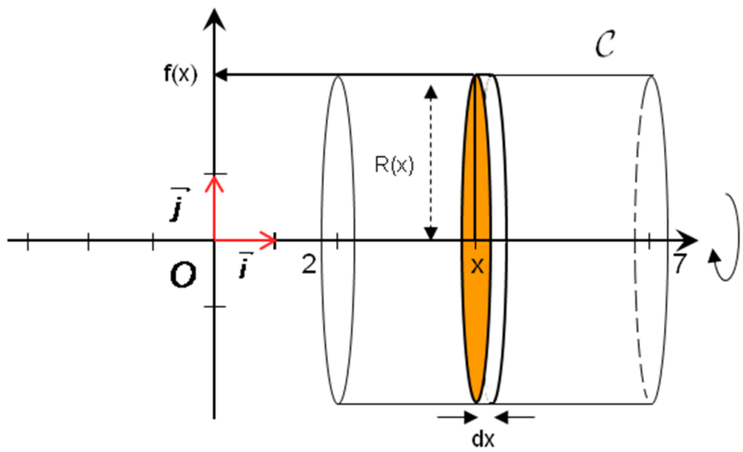
Théorème 9.4
Soit S un solide comprit entre deux plans parallèles d'équations : $z = a$ et $z = b$ et soit $S(t)$ la section du solide S par le plan d'équation $z = t$ avec $a \leq t \leq b$.
Si la fonction $t \mapsto S(t)$ est continue sur $[a;b]$ alors le volume V du solide S, exprimée en unité de volume, est le réel positif : $V = \displaystyle\int_a^b S(t)dt$.



Conséquences 9.1
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
Le volume de solide engendré par la rotation de la courbe représentative de f sur $[a;b]$, autour de l'axe des abscisse, exprimée en unité de volume, est le réel positif : $V = \int_a^b \pi (f(t))^2 dt$.



Cas particulier : Si f est une constante : par exemple $f(x) = R > 0$, le solide sera un cylindre son volume est : $V = \int_a^b \pi R^2 dt = [x\pi R^2]_a^b = (b-a)\pi R^2$ c'est le volume d'un cylindre de hauteur $h = b - a$ $(b > a)$ et de base cercle de rayon R.



Exercices :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$:

Exercice 1 :

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^x + 1}$ et $g(x) = e^{-x}$.
Calculer l'aire du domaine délimité par : la courbe de f ; la courbe de g et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \ln(2)$, (on donne : $||\vec{i}|| = 3cm$ et $||\vec{j}|| = 2cm$).

Exercice 2 :

Soit f la fonctions définie par : $f(x) = 1 - e^x$.
Calculer l'aire du domaine délimité par : la courbe de f ; l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \ln(2)$ et $x = \ln(4)$, (on donne : $||\vec{i}|| = 1cm$ et $||\vec{j}|| = 1cm$).

Exercice 3 :

Soit f la fonctions définie par : $f(x) = \cos(x)$.
Calculer l'aire du domaine délimité par : la courbe de f ; l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \pi$, (on donne : $||\vec{i}|| = 1cm$ et $||\vec{j}|| = 1cm$).

Exercice 4 :

Soit f la fonctions définie par : $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$.
Calculer le volume de solide engendré par la rotation de la courbe représentative de f sur $[0; 1]$, autour de l'axe des abscisse, exprimée en unité de volume,, (on donne : $||\vec{i}|| = 1cm$ et $||\vec{j}|| = 1cm$).

9.4.3 La série des exercices $n^o 9$:

Exercice 1 : (Calcule de primitive)

Déterminer une primitive sur l'intervalle I des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x(x^2+1)^2$; $I = \mathbb{R}$
2) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^3+2}$; $I =]0; +\infty[$
3) $f(x) = xe^{x^2+5}$; $I = \mathbb{R}$
4) $f(x) = e^{x-4}$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 2 : (Méthode directe) :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}dx$; 2) $\displaystyle\int_3^4 \frac{2}{x-1}dx$; 3) $\displaystyle\int_1^{\ln(3)} x^2 e^{x^3}dx$; 4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x+1)dx$; 5) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{(x^2+2x+4)^2}dx$

Exercice 3 : (Méthode d'intégration par partie) :
Calculer les intégrales suivantes :
$I_1 = \int_1^2 x^2 \ln(x)dx$; $I_2 = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$; $I_3 = \int_0^{\ln(2)} x^2 e^{-x}dx$; $I_4 = \int_0^1 \cos(x)e^x dx$;
$I_5 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}dx$; $I_6 = \int_0^1 x^3 e^x dx$; $I_7 = \int_0^1 x\cos(x)dx$; $I_8 = \int_0^1 x^2 \sin(x)dx$

Exercice 4 : (La valeur moyenne) :
Calculer la valeur moyenne de f sur I dans les cas suivantes :
1) $f(x) = \ln(2x)$ et $I = [1;e]$
2) $f(x) = e^{-x}$ et $I = [0;1]$

Exercice 5 : (Calcule de primitive en utilisant l'intégration) :
Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivantes :
1) $f(x) = \ln(x)$; $I =]0;+\infty[$; 2) $f(x) = x\sin(x)$; $I = \mathbb{R}$; 3) $f(x) = x\ln(x)$; $I = \mathbb{R}_+^*$

Exercice 6 :
1) Déterminer la valeur moyenne de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{x+1}$ sur $[1;3]$
2) Montrer que : $(e+1)\ln(2) \leq \int_1^2 \frac{e^x+1}{x}dx \leq (e^2+1)\ln(2)$

Exercice 7 :
Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x + \frac{1}{e^x - 1}$ et $g(x) = x$.
Calculer l'aire du domaine délimité par : la courbe de f ; la courbe de g et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 2$, (on donne : $||\vec{i}|| = 3cm$ et $||\vec{j}|| = 2cm$).

Exercice 8 :
Soit f la fonctions définie par : $f(x) = \ln(x)$.
1) Montrer que la fonction : F définie par : $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$
2) Calculer l'aire du domaine délimité par : la courbe de f ; l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = e^{-1}$ et $x = e$, (on donne : $||\vec{i}|| = 1cm$ et $||\vec{j}|| = 1cm$).

Exercice 9 :
Soit f la fonctions définie par : $f(x) = xe^x$.
Calculer le volume de solide engendré par la rotation de la courbe représentative de f sur $[0;1]$, autour de l'axe des abscisse, exprimée en unité de volume,, (on donne : $||\vec{i}|| = 1cm$ et $||\vec{j}|| = 1cm$).

Les solutions de quelques exercices :

Exercice 6

1) la valeur moyenne de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ sur $[1;3]$ est :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)dx &= \frac{1}{3-1}\int_1^3 \frac{x}{x+1}dx && (9.1)\\
&= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{x+1-1}{x+1}dx && (9.2)\\
&= \frac{1}{2}\int_1^3 1-\frac{1}{x+1}dx && (9.3)\\
&= \frac{1}{2}[x-\ln(x+1)]_1^3 && (9.4)\\
&= \frac{1}{2}(3-\ln(4)-1+\ln(2)) && (9.5)\\
&= \frac{1}{2}(2-\ln(2)) && (9.6)
\end{aligned}$$

2) La fonction $x \mapsto \dfrac{e^x+1}{x}$ est continue sur $[1;2]$ et pour tout $x \in [1;2]$:

$$\begin{aligned}
on\,a \quad & e+1 \le e^x+1 \le e^2+1\\
\Leftrightarrow \quad & \frac{e+1}{x} \le \frac{e^x+1}{x} \le \frac{e^2+1}{x}\\
\Leftrightarrow \quad & \int_1^2 \frac{e+1}{x}dx \le \frac{e^x+1}{x}dx \le \int_1^2 \frac{e^2+1}{x}dx\\
\Leftrightarrow \quad & (e+1)\int_1^2 \frac{1}{x}dx \le \frac{e^x+1}{x}dx \le (e^2+1)\int_1^2 \frac{1}{x}dx\\
\Leftrightarrow \quad & (e+1)\,[\ln(x)]_1^2 \le \frac{e^x+1}{x}dx \le (e^2+1)\,[\ln(x)]_1^2\\
\Leftrightarrow \quad & (e+1)\ln(2) \le \int_1^2 \frac{e^x+1}{x}dx \le (e^2+1)\ln(2)
\end{aligned}$$

Exercice 7

On a f et g sont deux fonctions continue sur $[1;2]$ alors : l'aire du domaine délimité par : la courbe de f ; la courbe de g et les droites d'équations : $x=1$ et $x=2$ est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_1^2 |f(x)-g(x)|dx \times (U\cdot A)\\
&= \int_1^2 \left|\frac{1}{e^x+1}\right| dx \times (U\cdot A)\\
&= \int_1^2 \frac{1}{e^x+1}dx \times (6cm^2)\\
&= \int_1^2 \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1}dx \times (6cm^2)\\
&= \int_1^2 1-\frac{e^x}{e^x+1}dx \times (6cm^2)\\
&= [x-\ln(e^x+1)]_1^2 \times (6cm^2)\\
&= \big(2-\ln(e^2+1)-1+\ln(e+1)\big)\times(6cm^2)\\
&= \left(1-\ln\left(\frac{e+1}{e^2+1}\right)\right)\times 6cm^2
\end{aligned}$$

Exercice 8

1) Soit F le fonction définie par : $F(x) = x\ln(x) - x$, on a F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$F'(x) = (x\ln(x) - x)' = x'\ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - x' = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x)$

2) Tableau de signe de la fonction ln sur $[e^{-1}; e]$

x	e^{-1}		1		e
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \int_{e^{-1}}^{e} |\ln(x)|dx \times (U \cdot A) &= \int_{e^{-1}}^{1} -\ln(x)dx + \int_{e^{-1}}^{1} \ln(x)dx \times (U \cdot A) \\
&= \left([-x\ln(x)+x]_{e^{-1}}^{1} + [x\ln(x)-x]_{1}^{e}\right) \times cm^2 \\
&= (1 - e^{-1} - e^{-1} + 1)cm^2 = (2 - 2e^{-1})cm^2
\end{aligned}$$

Exercice 9

Soit f la fonctions définie par : $f(x) = xe^x$.
Le volume de solide engendré par la rotation de la courbe représentative de f sur $[0;1]$, autour de l'axe des abscisse, exprimée en unité de volume, (on donne : $||\vec{i}|| = 1cm$ et $||\vec{j}|| = 1cm$) est :
$V = \pi \int_0^1 f(x)^2 dx \cdot (U \cdot V) = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx \times cm^2$. Calculons : $I = \int_0^1 f(x)^2 dx$

On pose : $\begin{cases} u'(x) = e^{2x} \\ v(x) = x^2 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \\ v'(x) = 2x \end{cases}$ donc :

$I = \left[\dfrac{1}{2}x^2 e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{1}{2}e^{2x} \times 2x dx = \dfrac{1}{2}e^2 - \int_0^1 xe^{2x} dx$

Pour calculer : $\int_0^1 xe^{2x}dx$, on pose : $\begin{cases} u'(x) = e^{2x} \\ v(x) = x \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ donc :

$\int_0^1 xe^{2x}dx = \left[\dfrac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{1}{2}e^{2x}dx = \dfrac{1}{2}e^2 - \left[\dfrac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}e^2 - \dfrac{1}{4}e^2 + \dfrac{1}{4}$

d'où : $I = \dfrac{1}{2}e^2 - \dfrac{1}{2}e^2 + \dfrac{1}{4}e^2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{e^2 - 1}{4}$ Donc : $V = \pi\left(\dfrac{e^2-1}{4}\right)cm^3$

CHAPITRE 10

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES :

10.1 Équation différentielle d'ordre 1 :

Définition 10.1
L'équation différentielle d'ordre 1 est une équation de la forme : $y' = ay + b$ où $a;b \in \mathbb{R}$ et l'inconnue est la fonction y.

Proprieté 10.1
Soit $(E) : y' = ay$ une équation différentielle la solution générale de l'équation $y' = ay$ est : la fonction définie par : $y(x) = ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exercice :

Considérons l'équation différentielle $(E) : y' = 2y$

1) Donner la solution générale de l'équation (E),
2) Déterminer la solution qui vérifier : $y(0) = 4$.

Remarque :

Dans toute la suite on écrit : $y = ke^{ax}$ au lieu de $y(x) = ke^{ax}$.

Proprieté 10.2
Soient $a;b \in \mathbb{R}^*$ la solution générale de l'équation $(E) : y' = ay + b$ est les fonctions : $y = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$

Exercice :

Considérons l'équation différentielle : $(E) : y' = 3y + 6$:

1) Donner la solution générale de l'équation (E),
2) Déterminer la solution qui vérifier : $y(0) = 5$.

10.2 Équation différentielle d'ordre 2 :

Définition 10.2
Soient $a;b \in \mathbb{R}$, on appel équation différentielle d'ordre 2 :
toute équation de la forme : $y'' + ay' + by = 0$

Définition 10.3
Soit $(E) : y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle d'ordre 2 : une équation différentielle d'ordre 2, l'équation : $r^2 + ar + b = 0$ est appelée l'équation caractéristique de l'équation (E).

Théorème 10.1
Soit $(E) : y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle d'ordre 2 : une équation différentielle d'ordre 2, et : $r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique :

- Si ($\Delta = a^2 - 4b > 0$) : l'équation caractéristique admet deux solutions réels r_1 et r_2, alors : la solution générale de l'équation (E) est : $y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ où $\alpha;\beta \in \mathbb{R}$.
- Si ($\Delta = a^2 - 4b = 0$) : l'équation caractéristique admet une seule solution réel r_0, alors : la solution générale de l'équation (E) est : $y = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$ où $\alpha;\beta \in \mathbb{R}$.
- Si ($\Delta = a^2 - 4b < 0$) : l'équation caractéristique admet deux solutions non réels $p + iq$ et $p - iq$ alors :
  la solution générale de l'équation (E) est : $y = e^{px}(\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))$ où $\alpha;\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 :

1) Donner la solution générale des équations suivantes :
   a) $(E_1) : y'' - 7y' + 12y = 0$
   b) $(E_2) : y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$
   c) $(E_3) : y'' + y' + y = 0$
2) Déterminer la solution de l'équation (E_1) qui vérifier : $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 2 :

1) Donner la solution générale des équations suivantes :
   a) $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = 0$
   b) $(E_2) : y'' - 6y' + 9y = 0$
   c) $(E_3) : y'' + 2y' + 5y = 0$
2) Déterminer la solution de l'équation (E_3) qui vérifier : $\begin{cases} y(0) = \frac{1}{2} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 3 :

1) Donner la solution générale des équations suivantes :
a) $(E_1) : y''' - 6y'' + 8y' = 0$
b) $(E_2) : (y-3)'' + (y-3)' + \frac{1}{4}(y-3) = 0$
c) $(E_3) : y''' + y'' + y' = 0$
2) Résoudre les équations suivantes :
a) $y' = x^2 - 2x$; $y'' = \cos(x)$; c) $y' = e^{3x+1}$

Devoir libre 2 - S_2

Exercice 1 (......)

1)a) Donnée la solution général de l'équation différentielle : $2y' - 2y + 5 = 0$.

b) Déterminer la solution qui vérifier : $y'(1) = 0$.

2) Donnée la solution général de chacune des équations différentielles suivantes :

a) $(E_1) : y'' - 5y' + 6y = 0$

b) $(E_2) : y'' - 2y' + 5y = 0$

c) $(E_3) : 2y'' - 8y' + 8y = 0$

3) a) Déterminer la solution particulier de l'équation : (E_2) qui vérifier la condition : $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

b) Déterminer la solution particulier de l'équation : (E_1) qui vérifier la condition : $\begin{cases} y(0) = -1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

c) Déterminer la solution particulier de l'équation : (E_3) qui vérifier la condition : $\begin{cases} y(0) = -2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

Exercice 2 (.....) Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^{2x} - 1}$
et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

2) a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f(x) = e^x \left(\dfrac{1}{1 - e^x}\right)$

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et déduire l'interprétation géométrique de se résultat.

3) a) Montrer que : $f'(x) = \dfrac{e^{3x}(e^{2x} - 3)}{(e^{2x} - 1)^2}$

b) Donner le tableau de variation de la fonction f

c) Construire la courbe de la fonction f

4) Considérons la fonction F définie sur $I =]-\infty; 0[$ par : $F(x) = e^x - \dfrac{1}{2}(ln(1 + e^x) - ln(1 - e^x))$

a) Montrer que F est une primitive de la fonction f sur I,

b) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C) ; l'axe des abscisses et les droite d'équations : $x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $x = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

Exercice 3 (La fonction $x \mapsto a^x$; $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $6^x - 2 \times 3^x - 2^x + 2 = 0$

2) Résoudre l'inéquation : $9^x - 3^{x+1} + 2 > 0$

3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{4^x - 3^x - 2^x}{3^x - 2^x}$

a) Déterminer D_f et montrer que f est dérivable sur chaque intervalle de D_f et déterminer $f'(x)$.

b) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Solution de l'exercice 1 :

1) a) On a l'équation : $(E) : 2y' - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y' = y - \frac{5}{2}$ alors :

$\boxed{y = ke^{ax} - \frac{b}{a} \ / \ k \in \mathbb{R}}$

La solution général de l'équation (E) est : $y = ke^{x} + \frac{5}{2} \ / \ k \in \mathbb{R}$

b) On a $y' = ke^{x}$ alors : $y'(1) = 0 \Leftrightarrow ke = 0 \Leftrightarrow k = 0$ donc la solution qui vérifier $y'(1) = 0$ est : $y = \frac{5}{2}$

2) a) Résolvons l'équation différentielle $(E_1) : y'' - 5y' + 6y = 0$
On a l'équation caractéristique associée est : $r^2 - 5r + 6 = 0$, on a :
$\Delta = 1 > 0$ et $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$

$\boxed{y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \ / \ \alpha ; \beta \in \mathbb{R}}$

alors la solution général de (E_1) est : $y = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x} \ / \ \alpha ; \beta \in \mathbb{R}$

b) Résolvons l'équation différentielle $(E_2) : y'' - 2y' + 5y = 0$
On a l'équation caractéristique associée est : $r^2 - 2r + 5 = 0$, on a :
$\Delta = -16 < 0$ l'équation admet deux solutions non réels : $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 1 - 2i$
La solution général de (E_2) est : $y = e^{x}\left(\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)\right) \ / \ \alpha ; \beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{y = e^{px}\left(\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)\right) \ / \ \alpha ; \beta \in \mathbb{R}}$

c) Résolvons l'équation différentielle $(E_3) : 2y'' - 8y' + 8y = 0 \Leftrightarrow y'' - 4y' + 4y = 0$
On a l'équation caractéristique associée est : $r^2 - 4r + 4 = 0$, on a :
$\Delta = 0$ l'équation admet une seule solution réel : $r = -\frac{-4}{2} = 2$

$\boxed{y = (\alpha x + \beta)e^{rx} \ / \ \alpha ; \beta \in \mathbb{R}}$

La solution général de (E_3) est : $y = y = (\alpha x + \beta)e^{2x} \ / \ \alpha ; \beta \in \mathbb{R}$

3) a) La solution général de (E_2) est : $y = e^{x}\left(\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)\right) \ / \ \alpha ; \beta \in \mathbb{R}$ donc :
$y' = e^{x}\left(\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)\right) + e^{x}\left(-2\alpha \sin(2x) + 2\beta \cos(2x)\right)$
alors : $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \alpha + 2\beta$ et donc : $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + 2\beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$

donc la solution de (E_2) qui vérifier $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$ est : $y = e^{x}\left(\cos(2x) + \sin(2x)\right)$

b) La solution général de (E_1) est : $y = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$ donc : $y' = 2\alpha e^{2x} + 3\beta e^{3x}$
on a : $y(0) = \alpha + \beta$ et $y'(0) = 2\alpha + 3\beta$ donc :
$\begin{cases} y(0) = -1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\alpha + 3\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 - \beta \\ -2 - 2\beta + 3\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 - \beta = -5 \\ \beta = 4 \end{cases}$

donc la solution de (E_2) qui vérifier $\begin{cases} y(0) = -1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ est : $y = -5e^{2x} + 4e^{3x}$

c) La solution général de (E_3) est : $y = (\alpha x + \beta)e^{2x}$ donc : $y' = \alpha e^{2x} + 2(\alpha x + \beta)e^{2x}$
on a : $y(0) = \beta$ et $y'(0) = \alpha + 2\beta$ donc :
$\begin{cases} y(0) = -2 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha + 2\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = 6 \end{cases}$

donc la solution de (E_2) qui vérifier $\begin{cases} y(0) = -2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ est : $y = (6x - 2)e^{2x}$

4) Résolvons l'équation différentielle $(E_4) : y''' - 7y'' + 12y' = 0$
On pose $f = y'$ alors : $(E_4) \Leftrightarrow f'' - 7f' + 12f = 0 (E_4')$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 7r + 12 = 0$
On a : $\Delta = 1$ et $r_1 = 3$ et $r_2 = 4$ alors la solution général de (E_4') est : $f = \alpha e^{3x} + \beta e^{4x}$ / $\alpha ; \beta \in \mathbb{R}$,
comme $y' = f$ alors la solution général de (E_4) est : $y = \frac{1}{3}\alpha e^{3x} + \frac{1}{4}\beta e^{4x} + k$ / $\alpha ; \beta ; k \in \mathbb{R}$

$\boxed{y' = f \text{ alors } y \text{ est une primitive de } f}$

Exercice 4 (Calcul d'intégrale)

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(2x)dx \;\;;\;\; J=\int_0^1\frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}dx \;\;;\;\; K=\int_0^1 e^{2x}-e^{-x}dx \;\;;\;\; L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)}dx$$

$$M=\int_{-2}^0 x+1+\frac{1}{x+1}dx \;\;;\;\; N=\int_0^3\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx \;\;;\;\; O=\int_0^{\ln(2)}(e^x+1)(e^x+x-2)dx.$$

2) En utilisant la méthode de l'intégration par paries calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_0^1(x+1)e^xdx \;\;;\;\; B=\int_1^e x^3\ln(x)dx \;\;;\;\; C=\int_0^1 x^3e^xdx \;\;;\;\; D=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx \;\;;$$

3) On pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^ne^xdx$,

a) Montrer que : $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$

b) En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

4) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et (C_g) sa courbe représentative.

a) Un utilisant une intégration par parties montrer que $\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx=4$:

b) Déterminer la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{e^2}g(t)dt$:

c) Déterminer la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[1;e^2]$

d) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C_g) ; l'axe des abscisses et les droite : $x=1$ et $x=e^2$, (on donne $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$)

e) Calculer le volume de solide engendré par la rotation de la courbe (C_g) sur $[1;e^2]$ sur l'axe des abscisses, exprimer en unité de volume (on donne $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$)

Devoir surveiller 2 S_2 - G_2

Exercice 1 (6.5)	
1)a) Donnée la solution général de l'équation différentielle : $2y' - 4y + 6 = 0$.	0.75
b) Déterminer la solution particulier qui vérifier : $y(0) = -2$.	0.5
2) Donnée la solution général de chacune des équations différentielles suivantes :	
a) $(E_1) : y'' + y' - 6y = 0$	1.25
b) $(E_2) : y'' - 2y' + 10y = 0$	1.25
c) $(E_3) : y'' - 4y' + 4y = 0$	1.25
3) a) Déterminer la solution particulier de l'équation : (E_1) qui vérifier la condition : $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$	1.5
Exercice 2 (7,5 pts)	
1) Calculer les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 3x^2 e^{x^3} dx$; $J = \int_{-2}^1 \lvert x(x+1) \rvert dx$; $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) e^x dx$	3.75
2) Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.	
a) Montrer que $\int_1^{e^4} g(x) dx = \dfrac{16}{3}$,	1.25
b) Déduire la valeur moyenne de g sur l'intervalle $[1; e^4]$,	0.5
c) En utilisant la méthode de l'intégration par parties montrer que : $\int_1^{e^4} \dfrac{\ln(x)}{x^2} dx = \dfrac{e^4 - 5}{e^4}$	1.25
d) En déduire la valeur du volume de solide engendré par la rotation de la courbe (C_g) sur $[1; e^4]$ autour de l'axe des abscisses, exprimer en unité de volume (on donne $\lVert \vec{i} \rVert = \lVert \vec{j} \rVert = 1cm$)	0.75
Exercice 3 (6 pts) (La fonction $x \mapsto a^x$; $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$)	
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $10^x - 2 \times 5^x - 2^x + 2 = 0$	1.5
2) Résoudre l'équation : $2 \times 4^x - 5 \times 2^x + 2 = 0$	1.5
3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4^x - 2^x$	
a) Calculer les limites : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$	1
b) Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.	0.75
c) Donner le tableau de variations de f.	1.25

Devoir surveiller 2 : S_2 ; G_1

Exercice 1 (6.5)	
1)a) Donnée la solution général de l'équation différentielle : $3y' - 6y + 12 = 0$.	0.75
b) Déterminer la solution particulier qui vérifier : $y(0) = 5$.	0.5
2) Donnée la solution général de chacune des équations différentielles suivantes :	
a) $(E_1) : y'' - 2y' - 3y = 0$	1.25
b) $(E_2) : y'' - 4y' + 13y = 0$	1.25
c) $(E_3) : y'' - 2y' + y = 0$	1.25
3) Déterminer la solution particulier de l'équation : (E_1) qui vérifier la condition : $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$	1.5
Exercice 2 (7,5 pts)	
1) Calculer les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 (e^x + 3)(e^x + 3x - 6)^2 dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx$; $K = \int_0^4 \lvert x^2 - 4x + 3 \rvert dx$	3.5
2) Soit g la fonction définie sur $[1; e^4]$ par : $g(x) = \dfrac{\sqrt{4 - \ln(x)}}{x}$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.	
a) Montrer que $\displaystyle\int_1^{e^4} g(x) dx = \frac{16}{3}$,	1.25
b) Déduire la valeur moyenne de g sur l'intervalle $[1; e^4]$,	0.5
c) En utilisant la méthode de l'intégration par parties montrer que : $\displaystyle\int_1^{e^4} \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \frac{e^4 - 5}{e^4}$	1
d) Montrer que : $\displaystyle\int_1^{e^4} \frac{4}{x^2} dx = \frac{4e^4 - 4}{e^4}$	0.75
e) En déduire la valeur du volume de solide engendré par la rotation de la courbe (C_g) sur $[1; e^4]$ autour de l'axe des abscisses, exprimer en unité de volume (on donne $\lVert\vec{i}\rVert = \lVert\vec{j}\rVert = 1cm$)	0.5
Exercice 3 (6 pts) (La fonction $x \mapsto a^x$; $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$)	
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $15^x - 3 \times 5^x - 3^x + 3 = 0$	1.5
2) Résoudre l'équation : $3 \times 9^x - 10 \times 3^x + 3 = 0$	1.5
3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{4}\right)^x$	
a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	1
b) Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.	0.75
c) Donner le tableau de variations de f.	1.25

CHAPITRE 11

LE PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

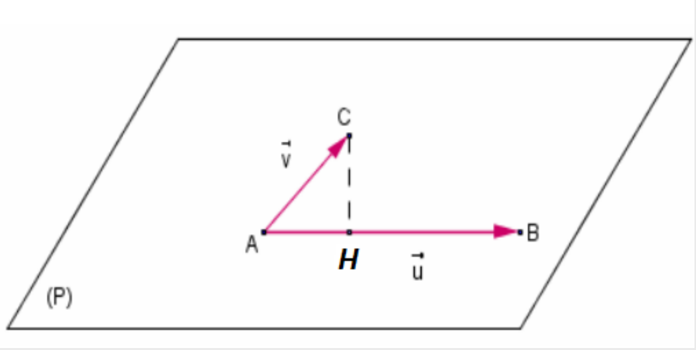
11.1 Le produit scalaire dans l'espace et ses propriétés

11.1.1 Rappels

Définition 11.1
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteur de l'espace et A ; B et C trois points de l'espace tels que :
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$,
il existe au moins un plan (P) passant par les points A ; B et C, (par exemple le plan (ABC)).
Alors le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace c'est le produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le plan (P) noté : $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Conséquences 11.1
Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans l'espace est le produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le plan (P).
Cette définition est indépendante des représentations de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et donc du plan (P).
Ceci nous permet de donner plusieurs définitions équivalentes du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

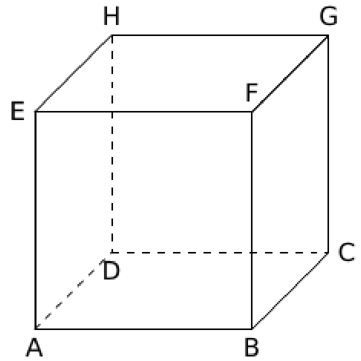
- Si α est une mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\alpha)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$
- Si A ; B et C trois points de l'espace tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, et soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) ; alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$



- Si : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH}\right) \equiv 0[2\pi]$, alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$
- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH}\right) \equiv \pi[2\pi]$, alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$

Exercice :

Soit $ABCDEFGH$ un cube tel que : $AB = 2cm$.



Déterminer les produits scalaires :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$; $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FH}$; $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BH}$; $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{FC}$.

11.1.2 Expression analytique de produit scalaire :

Proprieté 11.1
Si dans un repère orthonormé. $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$.
$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Remarque :

Dans un un espace muni d'un repère orthonormé, si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$
La distance AB est : $AB = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$

Proprieté 11.2
Ce produit scalaire dans l'espace a les mêmes propriétés que le produit scalaire dans le plan :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- Identités remarquables : $(\vec{u}+\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$$

Exercice :

Soient $A(1;1;\sqrt{2})$ et $B(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$ et $C(-1;-1;-\sqrt{2})$. Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

11.2 Orthogonalité dans l'espace :

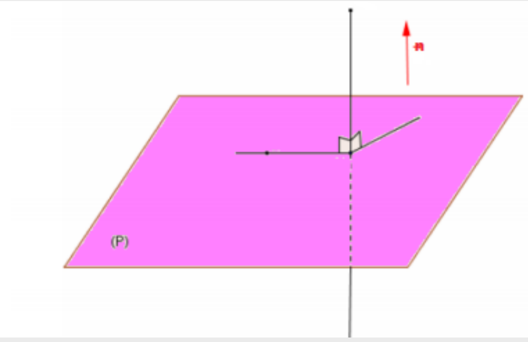
11.2.1 Vecteurs orthogonaux :

Définition 11.2
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si l'un des deux vecteurs est nul ou si les directions des deux vecteurs sont perpendiculaires.

Théorème 11.1
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

11.2.2 Vecteur normal à un plan :

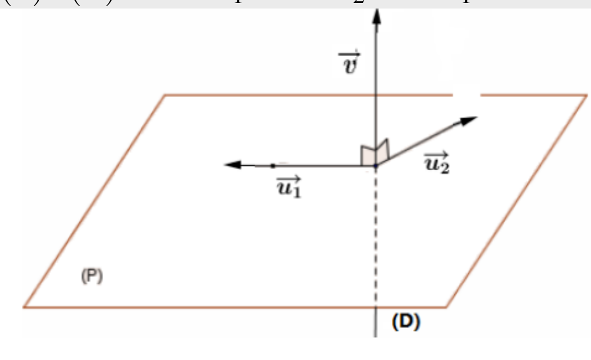
Définition 11.3
Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal au normal au plan (P) si et seulement si non nul est orthogonal à tout vecteur de (P).



Proprieté 11.3
Pour qu'un vecteur $\vec{n}$ soit normal au plan (P), il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (P).

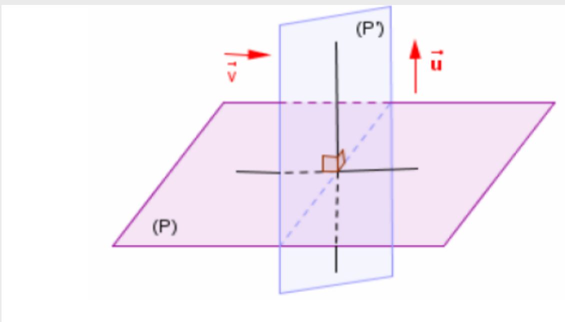
Proprieté 11.4
Soient $D_1(\vec{u}_1)$ et $D_2(\vec{u}_2)$ deux droites alors : $(D_1)\perp(D_2) \Leftrightarrow \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0$
$\vec{u}_1$ est le vecteur directeur de (D_1) et $\vec{u}_2$ celui de (D_2).

Proprieté 11.5
Soit (P) un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ et soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ alors :
$(P)\perp(D) \Leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{u}_1 \; et \; \vec{v}\perp\vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{u}_1=0 \; et \; \vec{v}\cdot\vec{u}_2=0$



$(D)\perp(P) \Leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{u_1} \; et \; \vec{v}\perp\vec{u_2}$

Proprieté 11.6
Soient (P) et (P') deux plans de vecteurs normales respectives $\vec{u}$ et $\vec{v}$:



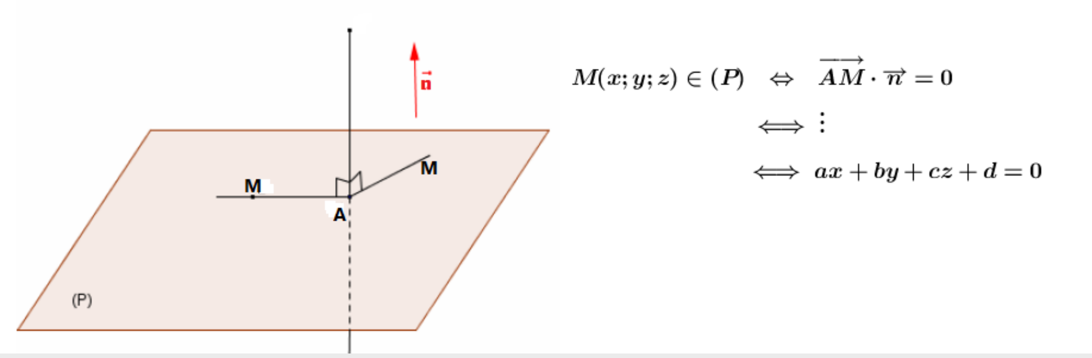
$\boxed{(P)\perp(P') \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}}$

$(P)\perp(P') \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

11.3 Équation d'un plan définie par un point et un vecteur normal

Proprieté 11.7
Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ est le plan normal à $\vec{n}$ passant par A.

Proprieté 11.8
Soient $\vec{n}(a;b;c) \neq (0;0;0)$ un vecteur normal à un plan (P) alors une équation cartésienne de (P) est : $(P) : ax+by+cz+d = 0$ (où $d \in \mathbb{R}$ à déterminer).



Exemples :
Déterminons une équation cartésienne du plan (P) passant par $A(1;0;5)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-1;1;0)$, on a :

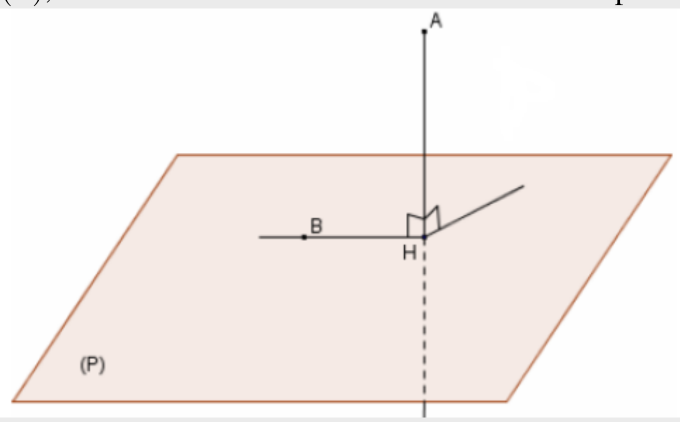
$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in (P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1) \times -1 + (y-0) \times 1 + (z-5) \times = 0 \\ &\Leftrightarrow -x+1+y = 0 \\ &\Leftrightarrow -x+y+1 = 0 \end{aligned}$$

alors une équation de (P) est $(P) : -x+y+1 = 0$

Exercice :
Déterminer une équation du plan (P) passant par $A(2;1;4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;-1;5)$.

11.4 Distance d'un point à un plan

Définition 11.4
Soient A un point et (P) un plan dans l'espace et soit H la projection orthogonale de A à (P), alors la distance AH est la distance de point A au plan (P). noté : $d(A;(P)) = AH$.



Théorème 11.2
Si $(P): ax+by+cz+d=0$ un plan de l'espace et $A(x_A;y_A;z_A)$ alors :
$d(A;(D)) = \dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Exercice :

1) Déterminer la distance de $A(1;2;3)$ au plan (P) d'équation : $(P): x+y-2z+2\sqrt{6}=0$
2) Déterminer la distance de $A(1;0;-1)$ au plan (P) passant par $B(2;3;4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;1;1)$.

Solution :

1) $d(A;(D)) = \dfrac{|1+2\times3+2\sqrt{6}|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \dfrac{|-3+2\sqrt{6}|}{\sqrt{6}} = \dfrac{-3+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \dfrac{-3}{\sqrt{6}}+2 = \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+2$
2) Déterminons d'abord l'équation de (P) : on a $B\in(P)$ et $\vec{n}\perp(P)$ donc :

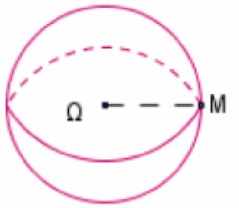
$$\begin{aligned} M(x;y;z)\in(P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}=0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)\times1+(y-3)\times1+(z-4)\times1=0 \\ &\Leftrightarrow x-2+y-3+z-4=0 \\ &\Leftrightarrow x+y+z-9=0 \end{aligned}$$

Donc $(P): x+y+z-9=0$ et donc : $d(A;(D)) = \dfrac{|x_A+y_A+z_A-9|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{|1+0-1-9|}{\sqrt{3}} = \dfrac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

11.5 Étude analytique de la sphère :

Définition 11.5
Soit Ω un point de l'espace et $R\in\mathbb{R}_+^*$.
L'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\Omega M = R$ est appelé
sphère de centre Ω et de rayon R, qu'on note $S(\Omega;R)$.
$S(\Omega;R) = \{M\in\mathcal{E} \,/\, \Omega M = R\}$. $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des points de l'espace.

$M\in(S)\Leftrightarrow \Omega M = R$



11.5.1 Équation cartésienne d'une sphère :

L'espace $(\mathcal{E})$ est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

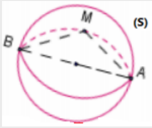
Proprieté 11.9
Soit $S(\Omega;R)$ une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R $(R>0)$.
Une équation cartésienne de $S(\Omega;R)$ est l'écriture : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$
C'est à dire : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ avec : $d=a^2+b^2+c^2-R^2$

$$\begin{aligned} M(x;y;z)\in(S) &\Leftrightarrow \Omega M = R \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \end{aligned}$$

Exemple :

Une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(2;-1;3)$ et de rayon 5 est : $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=5^2$ c'est à dire : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-11=0$

Proprieté 11.10
Soient A et B deux points distincts de l'espace, l'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est la sphère de diamètre $[AB]$ et une équation de cartésienne de cette sphère est : $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$ avec : $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$.



Exemples :
1) Déterminons une équation cartésienne de la sphère (S) de centre $\Omega(0;2;-1)$ et de rayon : $R=\sqrt{3}$, on a :

$$\begin{aligned}(S) &: (x-0)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=\sqrt{3}^2\\ (S) &: x^2+y^2-4y+4+z^2+2z+1=3\\ (S) &: x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0\end{aligned}$$

• Pour vérifiant que : $A(-1;1;0)\in(S)$ on peut remplacer les coordonnés de A dans l'équation de (S) on trouve :

$$(-1)^2+1^2-4+2=0 \text{ c'est à dire } ''0=0'' \text{ donc : } A(-1;1;0)\in(S)$$

2) Déterminons une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre $[AB]$ tels que : $A(-1;2;3)$ et $B(0;1;2)$, on a :

$$\begin{aligned}M(x;y;z)\in(S) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-0)+(y-2)(y-1)+(z-3)(z-2)=0\\ &\Leftrightarrow x^2+x+y^2-3y+2+z^2-5z+6=0\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+x-3y-5z+8=0\\ (S) &: x^2+y^2+z^2+x-3y-5z+8=0\end{aligned}$$

11.5.2 Étude de l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$:

Proprieté 11.11
Soient a ; b et c des nombres réels tels que : $(a;b;c)\neq(0;0;0)$.
Considérons l'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ de l'espace vérifiant :
$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$:

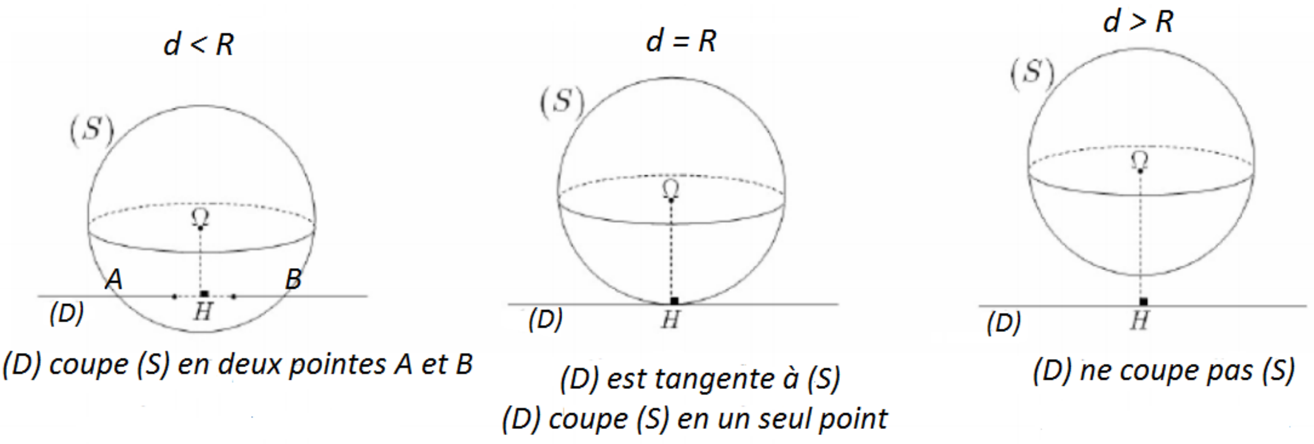
- Si : $a^2+b^2+c^2-4d>0$: (S) est alors une sphère de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$.
- Si : $a^2+b^2+c^2-4d=0$ (S) est alors le point $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$.
- Si : $a^2+b^2+c^2-4d<0$ (S) est alors l'ensemble vide.

Exercice :

Soit Γ l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z+5=0$
Montrer que Γ est une sphère et déterminer ses éléments caractéristiques.
Solution :
on a : $a^2+b^2+c^2-d=(-2)^2+1^2+3^2-5=9>0$
donc Γ est une sphère de centre : $\Omega(-2;1;3)$ et de rayon : $R=\sqrt{9}=3$

11.6 Intersection d'une sphère et d'une droite :

Proprieté 11.12
Soit $S(\Omega;R)$ une sphère et (D) une droite dans l'espace. Posons $d=d(\Omega;(D))$ On a trois cas :
- Si $d<R$ alors la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points distincts.
- Si $d=R$ alors la droite (D) coupe la sphère (S) en un seul point. (D) est tangente à (S).
- Si $d>R$ alors la droite (D) ne coupe pas la sphère (S).



Exemples :

Soit (S) la sphère d'équation: $(S): x^2+y^2+z^2-2y+4z+4=0$

$$(D_3):\begin{cases} x=\dfrac{-1}{2}+2t \\ y=\dfrac{1}{3}+3t \\ z=-2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad (D_2):\begin{cases} x=3t \\ y=2 \\ z=-2+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad (D_1):\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=-3+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Déterminons l'intersection de la sphère (S) et les droite (D_1) ; (D_2) et (D_3)

1) Déterminons l'intersection de la sphère (S) et la droite (D_1) :

Résolvons le système : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=-3+t \\ x^2+y^2+z^2-2y+4z+4=0 \end{cases}$

remplaçons x ; y et z par $1+2t$; $1+t$ et $-3+t$ dans l'équation de la sphère on trouve :

$$\begin{aligned}(1+2t)^2+(1+t)^2+(-3+t)^2-2(1+t)+4(-3+t)+4 &= 0\\ 1+4t+4t^2+1+2t+t^2+9-6t+t^2-2t-2t-12+4t+4 &= 0\\ 6t^2+3=0\end{aligned}$$

puisque la dernière équation n'admet pas de solution $(\Delta<0)$ alors : $(D_1)\cap(S)=\varnothing$
(D_1) ne coupe pas (S).

2) Déterminons l'intersection de la sphère (S) et la droite (D_2) :

Résolvons le système : $\begin{cases} x=3t\\ y=2\\ z=-2+t\\ x^2+y^2+z^2-2y+4z+4=0\end{cases}$

remplaçons x ; y et z par $3t$; 2 et $-2+t$ dans l'équation de la sphère on trouve :

$$\begin{aligned}(3t)^2+2^2(-2+t)^2-2\times2+4(-2+t)+4 &= 0\\ 9t^2+4+4-4t+t^2-4-8+4t+4 &= 0\\ 9t^2 &= 0\end{aligned}$$

donc $t=0$ remplaçons $t=0$ dans la représentation de la droite (D_2) on trouve : $\begin{cases} x=0\\ y=2\\ z=-2\end{cases}$

c'est à dire : $H(0;2;-2)$ et $(S)\cap(D_2)=\{H\}$,
(D_2) coupe (S) en un seul point H.

3) Déterminons l'intersection de la sphère (S) et la droite (D_3) :

Résolvons le système : $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}+2t\\ y=\dfrac{1}{3}+3t\\ z=-2\\ x^2+y^2+z^2-2y+4z+4=0\end{cases}$

remplaçons x ; y et z par $-\dfrac{1}{2}+2t$; $\dfrac{1}{3}+3t$ et -2 dans l'équation de la sphère on trouve :

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2}+2t\right)^2+\left(\frac{1}{3}+3t\right)^2+4-2\times\left(\frac{1}{3}+3t\right)-8+4 &= 0\\ \frac{1}{4}-2t+4t^2+\frac{1}{9}+2t+9t^2+4-\frac{2}{3}-6t-8+4 &= 0\\ 13t^2-6t-\frac{11}{36} &= 0\end{aligned}$$

On a $\Delta=36-4\times13\times\dfrac{-11}{36}=36-\dfrac{143}{9}=\dfrac{181}{9}>0$ alors la dernière équation admet deux solutions distincts : t_1 et t_2. remplaçons dans la représentation de la droite (D_3) on trouve :

$\begin{cases} x_A=-\dfrac{1}{2}+2t_1\\ y_A=\dfrac{1}{3}+3t_1\\ z_A=-2\end{cases}$ et $\begin{cases} x_B=-\dfrac{1}{2}+2t_2\\ y_B=\dfrac{1}{3}+3t_2\\ z_B=-2\end{cases}$ c'est à dire :

$A(-\dfrac{1}{2}+2t_1;\dfrac{1}{3}+3t_1;-2)$ et $B(-\dfrac{1}{2}+2t_2;\dfrac{1}{3}+3t_2;-2)$ et donc $(S)\cap(D_2)=\{A;B\}$,
(D_2) coupe (S) en deux points distincts A et B.

Autre méthode : voire la page 248 - math plus - 2 bac .

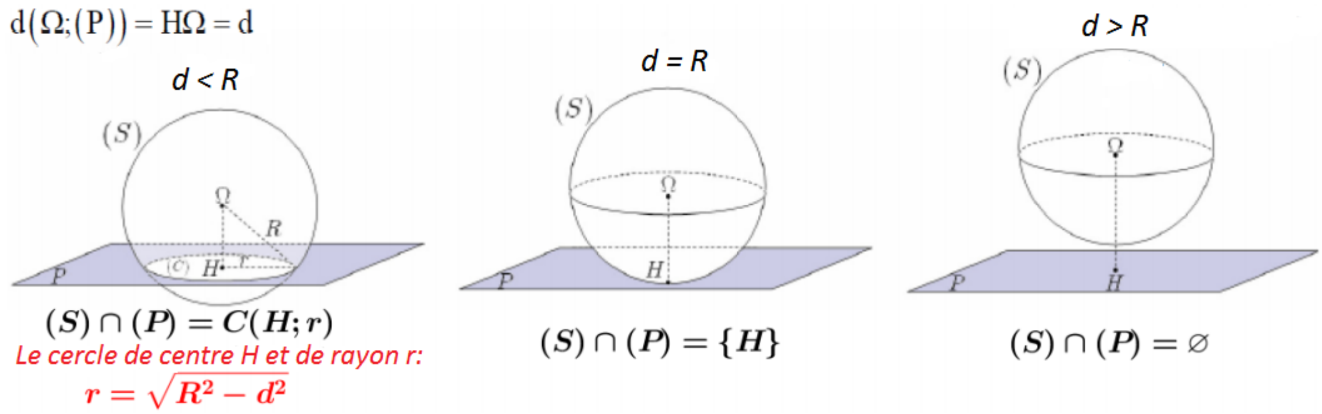
Exercice :

Déterminer l'intersection de la droite : $(D)\begin{cases} x=-t \\ y=1 \quad ; \quad t\in\mathbb{R} \\ z=-2+2t \end{cases}$
et la sphère $(S) : x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+1=0$.

11.7 Intersection d'une sphère et d'un plan :

Proprieté 11.13
Soit $S(\Omega;R)$ une sphère et (P) un plan, et soit H la projection orthogonal de Ω sur le plan (P), posons $d=d(\Omega;(P))=\Omega H$. On a trois cas :

- Si : $d<R$, alors le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de centre H et de rayon : $r=\sqrt{R^2-d^2}$, $(P)\cap(S)=(C)(H;r)$.
- Si : $d=R$, alors le plan (P) est tangente à la sphère (S).
  (P) coupe (S) en un seul point : $(P)\cap(S)=\{H\}$
- Si : $d>R$, alors le plan (P) ne coupe pas la sphère (S). $(P)\cap(S)=\varnothing$



Exercice :

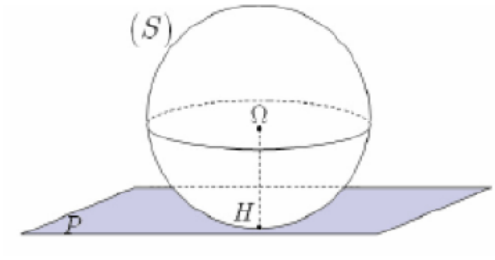
1) Soit (S) une sphère d'équation : $(S) : x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$ et (P) le plan d'équation : $(P) : 2x+y+2z-3=0$
   - Étudier l'intersection de (S) et (P).
2) Étudier l'intersection de la sphère (S) de centre $\Omega(2;0;1)$ et de rayon : $R=3$ avec le plan d'équation : $(P) : x-2y+z+3=0$
3) Étudier l'intersection de la sphère (S) et le plan (P) tel que : $\begin{cases} (S) : x^2+y^2+z^2-2x+\dfrac{1}{2}=0 \\ (P) : x+y-z+1=0 \end{cases}$

Solution :

1) • Déterminons le centre et le rayon de la sphère (S) :

$$\begin{aligned} M(x;y;z)\in(S) &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x+y^2-2y+z^2+2z-1=0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-1)^2-1+(z+1)^2-1-1=0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4 \end{aligned}$$

donc : $\Omega M^2 = 4$ c'est à dire : $\Omega M = 2$
et donc (S) est la sphère de centre $\Omega(-1;1;-1)$ et de rayon : $R = 2$
• Calculons la distance du point Ω au plan (P) :
$d(\Omega;(P)) = \dfrac{|-2+1-2-3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \dfrac{6}{3} = 2$, on a : $d(\Omega;(P)) = 2 = R$
donc le plan (P) est tangent à la sphère (S) en H le projeté orthogonal de Ω sur (P) :



$(S) \cap (P) = \{H\}$

• Déterminons les coordonnés de H :
• déterminons la représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (P) :
On sait que : $\vec{n}(2;1;2)$ est un vecteur normal au plan (P) donc c'est un vecteur directeur de la droite (Δ), (car : $(\Delta)\perp(P)$)

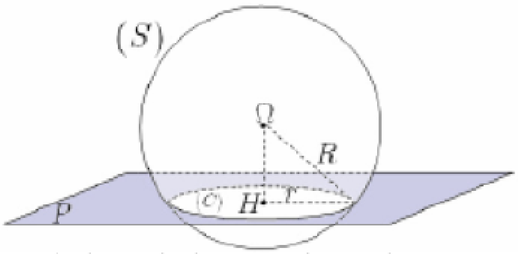
$$M(x;y;z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = t\cdot\vec{n} \;/\; (t\in R) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2t \\ y-1 = t \\ z+1 = 2t \end{cases} /(t\in R) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = -1+2t \end{cases} /(t\in R)$$

on a H est le point d'intersection de (Δ) avec (P) :

$$M(x;y;z) \in (\Delta)\cap(P) \Leftrightarrow H \in (\Delta) \text{ et } H \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = -1+2t \\ 2x+y-2z-3 = 0 \end{cases}$$

remplaçons $-1+2t$; $1+t$ et $-1+2t$ dans la dernière équation on trouve : $t = \dfrac{2}{3}$
remplaçons : $t = \dfrac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique on trouve : $H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

2) • Déterminons la distance de Ω au (P) : $d(\Omega;(P)) = \dfrac{|2+1+3|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$



$(S) \cap (P) = C(H;r)$
Le cercle de centre H et de rayon r:
$r = \sqrt{R^2 - d^2}$

on a : $d(\Omega;(P)) < R = 3$
donc le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre H le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P) son rayon est : $r = \sqrt{R^2-d^2}$
• déterminons le rayon r : $r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{3^2-\sqrt{6}^2} = \sqrt{9-6} = \sqrt{3}$
• déterminons les coordonnés de H :

• déterminons la représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (P) :
On sait que : $\vec{n}(1;-2;1)$ est un vecteur normal au (P) donc c'est un vecteur directeur de la droite (Δ)

$M(x;y;z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = t \cdot \vec{n} \ / \ (t \in R) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+t \\ y = -2t \\ z+1 = 1+t \end{cases}$ on a H est le point d'intersection de la droite (Δ) avec le plan (P) on a :

$M(x;y;z) \in (\Delta) \cap (P) \Leftrightarrow H \in (\Delta) \ et \ H \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+t \\ y = -2t \\ z = 1+t \\ x-2y+z+3 = 0 \end{cases}$

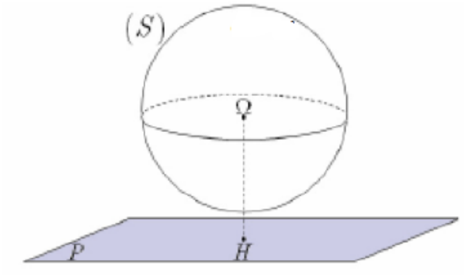
remplaçons : $2+t$; $-2t$ et $1+t$ dans la dernière équation on trouve : $t=-1$
remplaçons : $t=-1$ dans la représentation paramétrique on trouve : $H(1;2;0)$ et le cercle d'intersection est : $C(H;\sqrt{3})$

3) • Déterminons le centre et le rayon de la sphère (S) :

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in (S) &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+\frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+z^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

posons : $\Omega(1;0;0)$ on a : $\Omega M^2 = \frac{1}{2}$ c'est à dire : $\Omega M = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc : (S) est la sphère de centre : $\Omega(1;0;0)$ et de rayon $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$

• Déterminons la distance de Ω au plan (P) : $d(\Omega;(P)) = \frac{|1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ on a : $d(\Omega;(P)) > R$

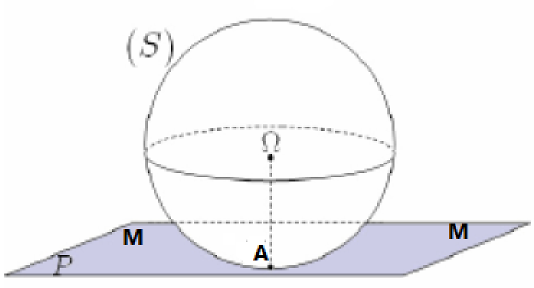


donc le plan (P) ne coupe pas la sphère (S).

$(S) \cap (P) = \varnothing$

11.8 Équation cartésienne d'un plan tangent à une sphère en un point

Proprieté 11.14
Soit $S(\Omega;R)$ une sphère de centre Ω et de rayon R et A un point de $S(\Omega;R)$.
Il existe un plan (P) unique tangent à (S) en A, c'est le plan perpendiculaire à la droite (ΩA) au point A : $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$



$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in (P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{A\Omega} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0 \end{aligned}$$

Exercice :

Déterminer l'équation du plan (P) tangent à la sphère (S) en le point A dans les deux cas :

1) $(S) : x^2 + y2 + z^2 - 2x - 2y - 4 = 0$; $\quad A(-1;2;1)$

2) $(S) : x^2 + y2 + z^2 - 4y + 2z + 1 = 0$; $\quad A\left(-\frac{8}{5};\frac{4}{5};-1\right)$

Solution

1) On a le centre de la sphère est : $\Omega(1;1;0)$ donc :

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in (P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1) \times 2 + (y-2) \times -1 + (z-1) \times -1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - y - z + 5 = 0 \end{aligned}$$

alors : $(P) : 2x - y - z + 5 = 0$

2) faite le.

La série n^o 11 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j}\,\vec{k})$

Exercice 1 :

Étudier l'intersection de la sphère (S) et la droite (Δ) dans les cas suivantes :

1) $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z = 5$; $\quad (\Delta) \begin{cases} x = 2t \\ y = 5 + t \quad / t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

2) $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 1 = 0$; $\quad (\Delta) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \quad / t \in \mathbb{R} \\ z = -2 \end{cases}$

3) $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 1 = 0$; $\quad (\Delta) \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \quad / t \in \mathbb{R} \\ z = -3t \end{cases}$

4) $(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$; $\quad (\Delta) \begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = 1 - 3t \quad / t \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$

Exercice 2 :

Étudier l'intersection de la sphère (S) et le plan (P) dans les cas suivantes :

1) $(S) : x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$; $(P) : x-2y+2z-2=0$
2) $(S) : x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0$; $(P) : 2x-z-2=0$
3) $(S) : (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$; $(P) : 4x-y+4z+2=0$

Exercice 3 :

I) Étudier **l'orthogonalité** de les plans (P_1) et (P_2) dans les cas suivantes :

1) $(P_1) : -2x+y+2z+1=0$; $(P_2) : x-2y+4z-2=0$
2) $(P_1) : -2x+y+2z+1=0$; $(P_2) : x-y+z-2=0$

II) Déterminer les valeurs de m pour que $(P_1) \perp (P_2)$ dans les cas suivantes :

1) $(P_1) : mx+y+3z+1=0$; $(P_2) : x-2my+-z-2=0$
2) $(P_1) : 2mx+my+2z+1=0$; $(P_2) : mx-6y+2z-5=0$

Exercice 4 :

1) Déterminer l'équation du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ dans les cas suivantes :
   a) $A(1;0;-3)$; $\vec{n}(2;3;1)$
   b) $A(2;4;-5)$; $\vec{n}(1;-3;0)$
   c) $A(1;0;0)$; $\vec{n}(-2;-1;1)$
2) Déterminer l'équation du plan tangente à la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;-1)$ au point $B(2;-2;3)$
3) Déterminer l'équation du plan tangente à la sphère (S) de centre $\Omega(1;0;2)$ au point $C(0;5;1)$

Devoir surveiller 3 S_2

Exercice 1 (8 pts)	
1) Étudier **l'orthogonalité** de les plans (P_1) et (P_2) dans les cas suivantes :	
a) $(P_1) : -2x+y+2z+1=0$; $(P_2) : x-2y+3z-2=0$	1.25
b) $(P_1) : -2x+3y+2z+1=0$; $(P_2) : x-2y+4z-2=0$	1.25
2) Déterminer les valeurs de m pour que $(P_1) \perp (P_2)$ dans les cas suivant :	
a) $(P_1) : 2x+y+3mz+1=0$; $(P_2) : x-2my+z-2=0$	1.25
b) $(P_1) : mx-4y+3z+1=0$; $(P_2) : mx+my+z-5=0$	1.5
3) Déterminer l'équation du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ avec :	
$A(1;2;3)$; $\vec{n}(1;3;-1)$	1.25
4) Déterminer l'équation du plan tangente à la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;-1)$ au point $B(2;1;3)$	1.5
Exercice 2 (6.25 pts)	
1) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(0;1;2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$ et le plan (P) d'équation : $(P) : x-z+4=0$	
a) Calculer $d(\Omega;(P))$, en déduire que (P) coupe la sphère (S) en un seul point H.	0.75
b) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (P),	
Montrer qu'une représentation de (Δ) est : $(\Delta) \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=2-t \end{cases} \quad / \, t \in \mathbb{R}$	0.75
c) En déduire que les coordonnés de H sont $H(-1;1;3)$	0.75
2) Étudier l'intersection de la sphère (S) de (centre Ω et de rayon R) et le plan (P) dans les deux cas suivantes :	
a) $S(\Omega(1;2;-1);R=4)$ et $(P) : 2x-y+2z-4=0$	2.5
b) $S(\Omega(1;0;1);R=2)$ et $(P) : -x+y-2z-3=0$	1.5

Exercice 3 (5.75 pts)	
Étudier l'intersection de la sphère (S) et la droite (Δ) dans les cas suivantes :	
1) $(S) : (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 9$; $(\Delta)\begin{cases} x = 2+t \\ y = -2t \\ z = 3+2t \end{cases}$ $/ t \in \mathbb{R}$	2
2) $(S) : x^2+y^2+z^2-2x-2z = 0$; $(\Delta)\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = -t \end{cases}$ $/ t \in \mathbb{R}$	2
3) $(S) : x^2+(y+1)^2+(z-1)^2 = 4$; $(\Delta)\begin{cases} x = 4 \\ y = -1-t \\ z = 1-t \end{cases}$ $/ t \in \mathbb{R}$	1.75

Solution de l'exercice 1 :

1) Étudier **l'orthogonalité** de les plans (P_1) et (P_2) dans les cas suivantes :
   a) $(P_1) : -2x+y+2z+1 = 0$; $(P_2) : x-2y+3z-2 = 0$
   on a : $\vec{n_1}(-2;1;2)$ est normal au (P_1) et $\vec{n_2}(1;-2;3)$ est normal au (P_2)
   et on a : $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = -2-2+6 = 2 \neq 0$ alors : (P_1) et (P_2) ne sont pas orthogonaux
   b) $(P_1) : -2x+3y+2z+1 = 0$; $(P_2) : x-2y+4z-2 = 0$
   on a : $\vec{n_1}(-2;3;2)$ est normal au (P_1) et $\vec{n_2}(1;-2;4)$ est normal au (P_2)
   et on a : $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = -2-6+8 = 0$ alors : $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$ et donc $(P_1) \perp (P_2)$.
2) Déterminons les valeurs de m pour que $(P_1) \perp (P_2)$ dans les cas suivant :
   a) $(P_1) : 2x+y+3mz+1 = 0$; $(P_2) : x-2my+z-2 = 0$
   on a : $\vec{n_1}(2;1;3m)$ est normal au (P_1) et $\vec{n_2}(1;-2m;1)$ est normal au (P_2)

$$\begin{aligned}(P_1) \perp (P_2) &\Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \\ &\Leftrightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2-2m+3m = 0 \\ &\Leftrightarrow m = 2\end{aligned}$$

   b) $(P_1) : mx-4y+3z+1 = 0$; $(P_2) : mx+my+z-5 = 0$
   on a : $\vec{n_1}(m;-4;3)$ est normal au (P_1) et $\vec{n_2}(m;m;1)$ est normal au (P_2)

$$\begin{aligned}(P_1) \perp (P_2) &\Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \\ &\Leftrightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2-4m+3 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = 1 \text{ ou } m = 3 \qquad (car\ \Delta = 1\ et\ m_1 = 1\ ;\ m_2 = 3)\end{aligned}$$

3) L'équation du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ avec : $A(1;2;3)$; $\vec{n}(1;3;-1)$

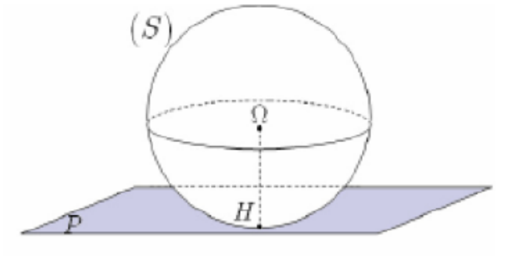
$$\begin{aligned}M(x;y;z) \in (P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)\times 1+(y-2)\times 3+(z-3)\times -1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1+3y-6-z+3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x+3y-z-4 = 0\end{aligned}$$

4) L'équation du plan (P) tangente à la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;-1)$ au point $B(2;1;3)$

$$\begin{aligned} M(x;y;z)\in(P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{B\Omega}=0\\ &\Leftrightarrow (x-2)\times(1-2)+(y-1)\times(2-1)+(z+1)\times(-1-3)=0\\ &\Leftrightarrow -x+2+y-1-4z-4=0\\ &\Leftrightarrow -x+y-4z-3=0 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 :

1) a) $d(\Omega;(P))=\dfrac{|x_\Omega-z_\Omega+4|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{|0-2+4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=R$



$(S)\cap(P)=\{H\}$

Donc (P) coupe la sphère (S) en un seul point H.

b) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (P),
On a $(\Delta)\perp(P)$ alors $\vec{n}(1;0;-1)$ est un vecteur directeur de (Δ) car $\vec{n}\perp(P)$

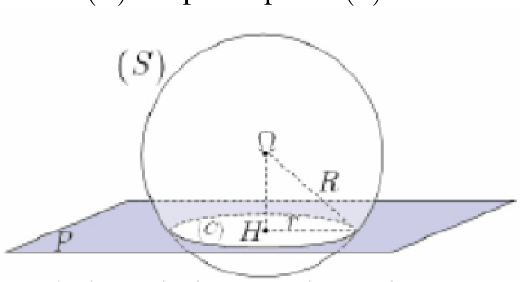
$$M(x;y;z)\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega M}=t\cdot\vec{n}\,/\,t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x-0=t\\ y-1=0\\ z-2=-t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}:\ Donc\ (\Delta)\begin{cases}x=t\\ y=1\\ z=2-t\end{cases}\ /\,t\in\mathbb{R}$$

c) On a H est le point d'intersection de (Δ) et (P), pour déterminer H il suffit de résoudre le système : $\begin{cases}x=t\\ y=1\\ z=2-t\\ x-z+4=0\end{cases}$ remplaçons x ; y et z dans la dernière équation on trouve :
$t-(2-t)+4=0$: donc : $t=-1$:

remplaçons dans la représentation de (Δ) : $\begin{cases}x=-1\\ y=1\\ z=2-(-1)=3\end{cases}$ donc : $H(-1;1;3)$

2) a) On a : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|2x_\Omega-y_\Omega+2z_\Omega-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{|2-2-2-4|}{\sqrt{9}}=\dfrac{6}{3}=3<R=4$

Donc : (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de centre H et de rayon r :



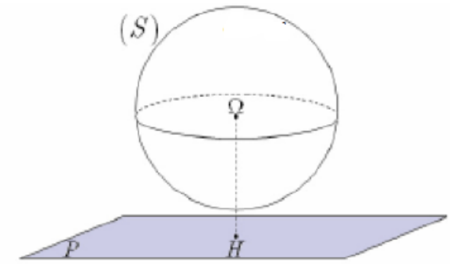
$(S)\cap(P)=C(H;r)$

Le cercle de centre H et de rayon r:

$r=\sqrt{R^2-d^2}$

On a : $r = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$
pour le point H : Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (P),
On a $(\Delta) \perp (P)$ alors $\vec{n}(2;-1;-2)$ est un vecteur directeur de (Δ) car $\vec{n} \perp (P)$ On a : $(\Delta)\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \quad / \, t \in \mathbb{R} \\ z = -1+2t \end{cases}$
On a H est le point d'intersection de (Δ) et (P), pour déterminer H il suffit de résoudre le système : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = -1+2t \\ 2x-y+2z-4 = 0 \end{cases}$ remplaçons x ; y et z dans la dernière équation on trouve :
$2(1+2t)-(2-t)+2(-1+2t)-4 = 0$: donc : $t = \dfrac{2}{3}$:
remplaçons dans la représentation de (Δ) : $\begin{cases} x = \dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ donc : $H\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

b) On a : $d(\Omega;(P)) = \dfrac{|-x_\Omega + y_\Omega - 2z_\Omega - 3|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}} = \dfrac{|-1+0-2-3|}{\sqrt{6}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} > R = 2$



Donc : (P) ne coupe la sphère (S) : $(S) \cap (P) = \varnothing$

Solution de l'exercice 3 :

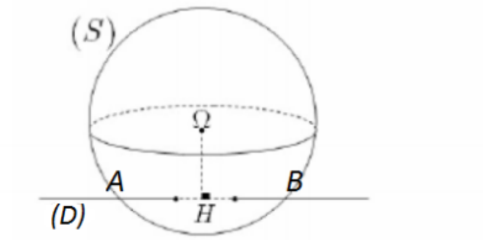
Étudier l'intersection de la sphère (S) et la droite (Δ) dans les cas suivantes :

1) $(S) : (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 9$; $\quad (\Delta)\begin{cases} x = 2+t \\ y = -2t \quad / \, t \in \mathbb{R} \\ z = 3+2t \end{cases}$

remplaçons x ; y et z dans l'équation de la sphère on trouve :

$$\begin{aligned} (2+t-1)^2+(-2t-2)^2+(3+2t-1)^2 &= 9 \\ (t+1)^2+(-2)^2(t+1)^2+2^2(t+1)^2 &= 9 \\ t^2+2t+1+4t^2+8t+4+4t^2+8t+4 &= 9 \\ 9t^2+18t+9 &= 9 \\ 9t(t+2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $t = 0$ ou $t = -2$ alors la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points :



(D) coupe (S) en deux pointes A et B

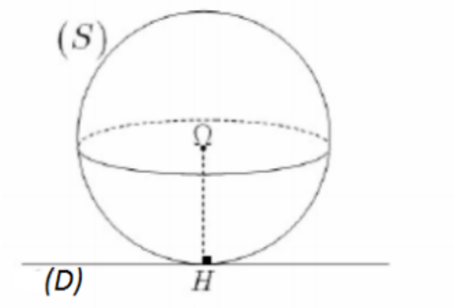
- remplaçons t par 0 dans la représentation de (Δ) : on trouve $A(2;0;3)$
- remplaçons t par -2 on trouve $B(0;4;-1)$

2) $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2z=0$; $(\Delta)\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \quad / t\in\mathbb{R} \\ z=-t \end{cases}$

remplaçons x ; y et z dans l'équation de la sphère on trouve :

$$\begin{aligned}(1+t)^2+(1-t)^2+(-t)^2-2(1+t)-2(-t) &= 0\\ t^2+2t+1+t^2-2t+1+t^2-2-2t+2t &= 0\\ 3t^2 &= 0\end{aligned}$$

Donc $t=0$ alors la droite (Δ) coupe la sphère (S) en un seul point :



(D) est tangente à (S)
(D) coupe (S) en un seul point

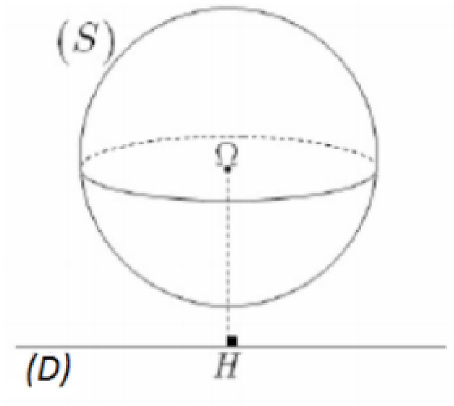
- remplaçons t par 0 dans la représentation de (Δ) : on trouve $H(1;1;0)$

3) $(S): x^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$; $(\Delta)\begin{cases} x=4 \\ y=-1-t \quad / t\in\mathbb{R} \\ z=1-t \end{cases}$

remplaçons x ; y et z dans l'équation de la sphère on trouve :

$$\begin{aligned}4^2+(-1-t+1)^2+(1-t-1)^2 &= 4\\ 16+t^2+t^2 &= 4\\ 2t^2=-12\end{aligned}$$

impossible donc l'équation n'admet de solution dans $\mathbb{R}$ alors (Δ) ne coupe pas la sphère (S)



(D) ne coupe pas (S)

Devoir surveiller 2 - Modèle C

Exercice 1 (6.5 pts)	
1) Étudier **l'orthogonalité** de les plans (P_1) et (P_2) dans les cas suivantes :	
a) $(P_1): 2x-y+3z+1=0$; $(P_2): -x+y+z-2=0$	1.25
b) $(P_1): -2x+2y+z+1=0$; $(P_2): x-2y+2z-2=0$	1.25
2) Déterminer la valeur de m pour que $(P_1)\perp(P_2)$ le cas suivant :	
$(P_1): 2x+y+mz+1=0$; $(P_2): 3x-2my-z-2=0$	1.25
3) Déterminer l'équation du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ avec :	
$A(1;2;3)$; $\vec{n}(-1;2;0)$	1.25
4) Déterminer l'équation du plan tangente à la sphère (S) de centre $\Omega(3;1;-1)$ au point $B(2;1;0)$	1.5
Exercice 2 (4.5 pts)	
1) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1;2;3)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$ et le plan (P) d'équation : $(P): x+y-z+3=0$	
a) Calculer $d(\Omega;(P))$, en déduire que (P) coupe la sphère (S) en un seul point H.	0.75
b) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (P),	
Montrer qu'une représentation de (Δ) est : $(\Delta)\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3-t \end{cases} \quad / t\in\mathbb{R}$	0.75
c) En déduire que les coordonnés de H sont $H(0;1;4)$	1
2) Étudier l'intersection de la sphère (S) et la droite (Δ) dans le cas suivante :	
1) $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3$; $(\Delta)\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3-t \end{cases} \quad / t\in\mathbb{R}$	2
Exercice 3 (4.5 pts)	
1) a) Donnée la solution général de l'équation différentielle : $(E_1): 3y'-6y'+12=0$.	0.75
b) Déterminer la solution de (E_1) qui vérifier : $y(0)=5$.	0.75
2) a) Donnée la solution général de l'équation différentielle : $(E_2): y''-6y'+8y=0$	1.5
b) Déterminer la solution particulier de l'équation : (E_2) qui vérifier la condition : $\begin{cases} y(0)=3 \\ y'(0)=8 \end{cases}$	1.5
Exercice 4 (4.5 pts)	
Soit g la fonction définie sur $[0;2]$ par : $g(x)=xe^x$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm)$.	
1) En utilisant la méthode de l'intégration par parties montrer que : $\int_0^2 g(x)dx=e^2+1$	1.25
2) Déduire la valeur moyenne de g sur l'intervalle $[0;2]$,	0.5
3) En utilisant la méthode de l'intégration par parties montrer que : $\int_0^2 x^2e^{2x}dx=\dfrac{5e^4-1}{4}$	2
4) En déduire la valeur du volume de solide engendré par la rotation de la courbe (C_g) sur $[0;2]$ autour de l'axe des abscisses, exprimer en unité de volume	0.75

Devoir surveiller 2 - Modèle B

Exercice 1 (6.5 pts)	
1) Étudier **l'orthogonalité** de les plans (P_1) et (P_2) dans les cas suivantes :	
a) $(P_1): 2x+y-z+1=0$; $(P_2): x+3y+2z+3=0$	1.25
b) $(P_1): x-2y+z-4=0$; $(P_2): x+y+z-6=0$	1.25
2) Déterminer la valeur de m pour que $(P_1)\perp(P_2)$ le cas suivant :	
$(P_1): mx+y+3z+1=0$; $(P_2): mx-4y+z-2=0$	1.25
3) Déterminer l'équation du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ avec :	
$A(2;3;4)$; $\vec{n}(1;2;-1)$	1.25
4) Déterminer l'équation du plan tangente à la sphère (S) de centre $\Omega(2;1;2)$ au point $B(1;-1;0)$	1.5
Exercice 2 (4.5 pts)	
Soit (S) la sphère de centre $\Omega(2;1;2)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$ et le plan (P) d'équation : $(P): x-y-z-2=0$	
1) a) Calculer $d(\Omega;(P))$, en déduire que (P) coupe la sphère (S) en un seul point H.	0.75
b) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (P),	
Montrer qu'une représentation de (Δ) est : $(\Delta)\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \quad / t\in\mathbb{R} \\ z=2-t \end{cases}$	0.75
c) En déduire que les coordonnés de H sont $H(3;0;1)$	1
2) a) Déterminer une équation de la sphère (S)	0.5
b) Étudier l'intersection de la sphère (S) et la droite (Δ)	1.5
Exercice 3 (4.5 pts)	
1) a) Donnée la solution général de l'équation différentielle : $(E_1): 2y'-4y'-6=0$.	0.75
b) Déterminer la solution de (E_1) qui vérifier : $y(0)=3$.	0.75
2) a) Donnée la solution général de l'équation différentielle : $(E_2): y''-4y'+4y=0$	1.5
b) Déterminer la solution particulier de l'équation : (E_2) qui vérifier la condition : $\begin{cases} y(0)=2 \\ y'(0)=3 \end{cases}$	1.5
Exercice 4 (4.5 pts)	
Soit g la fonction définie sur $[0;4]$ par : $g(x)=xe^{\frac{1}{2}x}$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm)$.	
1) En utilisant la méthode de l'intégration par parties montrer que : $\int_0^4 g(x)dx=4+4e^2$	1.25
2) Déduire la valeur moyenne de g sur l'intervalle $[0;4]$,	0.5
3) En utilisant la méthode de l'intégration par parties montrer que : $\int_0^4 x^2e^xdx=10e^4-2$	2
4) En déduire la valeur du volume de solide engendré par la rotation de la courbe (C_g) sur $[0;4]$ autour de l'axe des abscisses, exprimer en unité de volume	0.75

Devoir surveiller 2 - Modèle A

Exercice 1 (6.5 pts)

1) Étudier **l'orthogonalité** de les plans (P_1) et (P_2) dans les cas suivantes :

a) $(P_1) : 2x+2y-3z+1=0$; $(P_2) : x+2y+2z+3=0$ — 1.25

b) $(P_1) : 3x-y+z-4=0$; $(P_2) : x+y+2z-6=0$ — 1.25

2) Déterminer la valeur de m pour que $(P_1) \perp (P_2)$ le cas suivant :

$(P_1) : 2mx+y+mz+1=0$; $(P_2) : mx-4y+2mz-2=0$ — 1.25

3) Déterminer l'équation du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ avec :

$A(1;2;3)$; $\vec{n}(-1;3;1)$ — 1.25

4) Déterminer l'équation du plan tangente à la sphère (S) de centre $\Omega(3;1;-2)$ au point $B(2;1;1)$ — 1.5

Exercice 2 (4.5 pts)

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(2;1;-2)$ et de rayon $R=2\sqrt{3}$ et le plan (P) d'équation :
$(P) : x+y-z+1=0$

1) a) Calculer $d(\Omega;(P))$, en déduire que (P) coupe la sphère (S) en un seul point H. — 0.75

b) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (P),

Montrer qu'une représentation de (Δ) est : $(\Delta)\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=-2-t \end{cases} \quad / t\in\mathbb{R}$ — 0.75

c) En déduire que les coordonnés de H sont $H(0;-1;0)$ — 1

2) a) Déterminer une équation de la sphère (S) — 0.5

b) Étudier l'intersection de la sphère (S) et la droite (Δ) — 1.5

Exercice 3 (4.5 pts)

1) a) Donnée la solution général de l'équation différentielle : $(E_1) : 2y'-6y'+10=0.$ — 0.75

b) Déterminer la solution de (E_1) qui vérifier : $y(0)=3$. — 0.75

2) a) Donnée la solution général de l'équation différentielle : $(E_2) : y''-6y'+9y=0$ — 1.5

b) Déterminer la solution particulier de l'équation : (E_2) qui vérifier la condition : $\begin{cases} y(0)=-1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$ — 1.5

Exercice 4 (4.5 pts)

Soit g la fonction définie sur $[0;2]$ par : $g(x)=xe^{\frac{1}{2}x}$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(||\vec{i}||=||\vec{j}||=1cm)$.

1) En utilisant la méthode de l'intégration par parties montrer que : $\int_0^2 g(x)dx=4$ — 1.25

2) Déduire la valeur moyenne de g sur l'intervalle $[0;2]$, — 0.5

3) En utilisant la méthode de l'intégration par parties montrer que : $\int_0^2 x^2e^x dx=2e^2-2$ — 2

4) En déduire la valeur du volume de solide engendré par la rotation de la courbe (C_g) sur $[0;2]$ autour de l'axe des abscisses, exprimer en unité de volume — 0.75

CHAPITRE 12

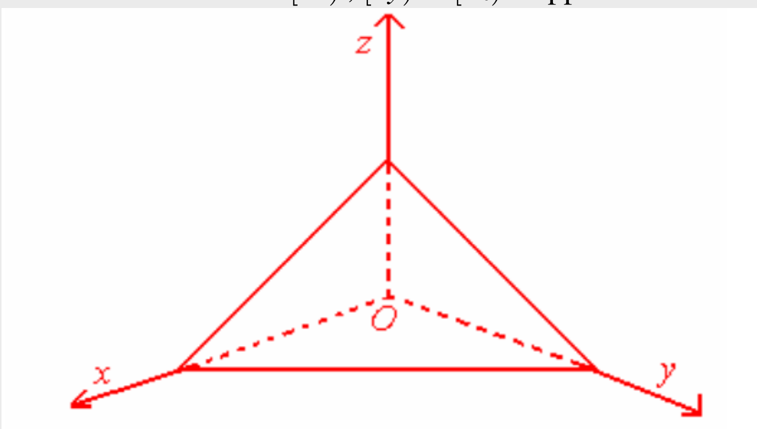
LE PRODUIT VECTORIEL

On note $(\mathcal{E})$ l'ensemble des points de l'espace, et $(\mathcal{V}_3)$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

12.1 Le trièdre ; orientation de l'espace ; repère et base orientés

12.1.1 Le trièdre :

Définition 12.1
Soient $[ox)$; $[oy)$ et $[oz)$ trois demi-droites de l'espace ayant même origine o et non coplanaires :
- Les trois demi-droites $[ox)$; $[oy)$ et $[oz)$ dans cet ordre constituent ce que l'on appelle trièdre et qu'on désigne par $(ox; oy; oz)$.
- Les trois demi-droites $[ox)$; $[oy)$ et $[oz)$ s'appellent arêtes du trièdre.

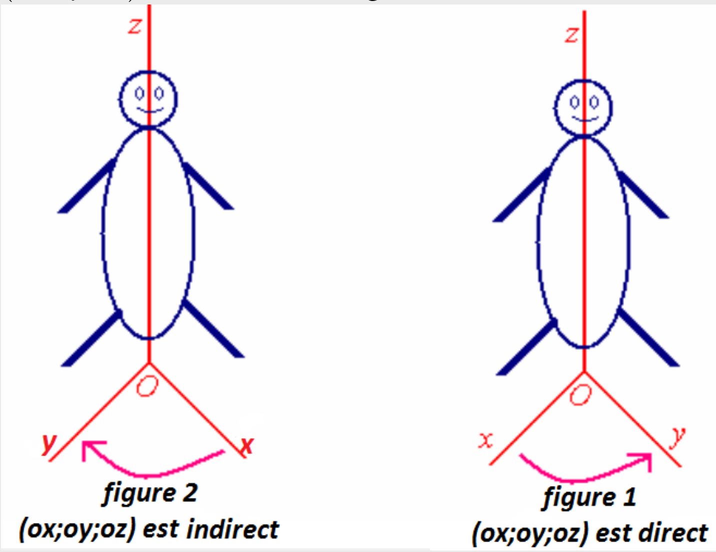


12.1.2 Orientation de l'espace :

Soit $(ox; oy; oz)$ un trièdre. Un observateur d'Ampère pour ce trièdre est un personnage placé le long de $[oz)$, les pieds en o et qui regarde dans la direction de $[ox)$.
Le plan (xoz) partage l'espace en deux demi-espace : l'un des demi-espace est à gauche de l'observateur, l'autre à sa droite.

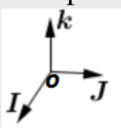
Définition 12.2

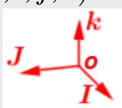
- Si $[oy)$ est dans le demi-espace à gauche de l'observateur (fiqure 1), on dit que le trièdre $(ox;oy;oz)$ est direct ou positif.
- Si $[oy)$ est dans le demi-espace à droite de l'observateur (fiqure 2), on dit que le trièdre $(ox;oy;oz)$ est indirect ou négatif.



12.1.3 Base et repère orientés :

Définition 12.3
Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère de l'espace et I ; J et K les points définis par : $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$; $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

- On dit que le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ou que la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ sont directs si le trièdre $(OI;OJ;OK)$ est direct. 

- On dit que le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ou que la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ sont indirects si le trièdre $(OI;OJ;OK)$ est indirects. 

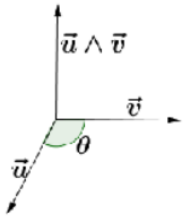
- On dit que l'espace est direct ou orienté positivement s'il est muni d'un repère direct.

12.2 Le produit vectoriel :

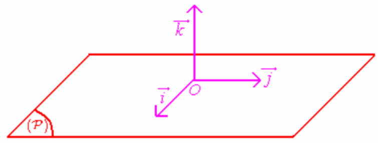
Dans ce qui suit, on considère l'espace orienté positivement c'est à dire muni d'un repère direct.

Définition 12.4
Soient $\vec{u}$; $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appel produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre) le vecteur noté : $\vec{u}\wedge\vec{v}$ défini ainsi :

- Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
- Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires :
  - $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ (direction du vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$),
  - $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base directe (sens de $\vec{u}\wedge\vec{v}$),
  - $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\sin(\theta)$ (norme de $\vec{u}\wedge\vec{v}$), où θ est mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$.



Exemples :

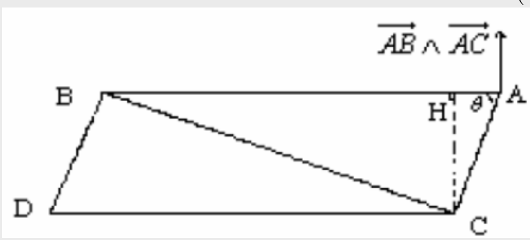
- Si $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base orthonormale directe : 

alors :
  - $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$;
  - $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$; $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$; $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$.
- Si $\vec{u}$; $\vec{v}$ sont orthogonaux et unitaires, alors $(\vec{u};\vec{v};\vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormale directe.

12.3 Propriétés du produit vectoriel

12.3.1 Aire et norme du produit vectoriel :

Définition 12.5
- L'aire du triangle ABC est : $S_{(ABC)} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$,
- L'aire du parallélogramme $ABCD$ est : $S_(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$



Remarque : L'aire de ABC est : $S_{(ABC)} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\widehat{BAC})$

12.3.2 Colinéarité, alignement et produit vectoriel :

Proprieté 12.1
- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, on a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Trois points A, B et C de l'espace sont colinéaire $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Remarques : $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$; $\vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

12.3.3 Propriétés algébriques :

Proprieté 12.2
Soient $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$ et $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$

Exercice :

Sachant que $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est une base direct : calculer les produits vectoriels suivants :
$\vec{i}\wedge 3\vec{j}$; $(3\vec{j}+2\vec{k})\wedge 2\vec{i}$; $(2\vec{i}-\vec{j})\wedge(\vec{4i}+3\vec{k})$; $(\vec{i}\wedge\vec{j})\wedge 3\vec{k}$.

12.3.4 Expression analytique du produit vectoriel :

Propriété 12.3
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnés respectifs : $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ dans une base orthonormale directe.
Le vecteur : $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnés : $(yz'-zy';zx'-xz';xy'-yx')$.

Remarque : Si $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} &= (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\wedge('x\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})\\
&= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\overrightarrow{k}\\
&= (yz'-zy')\vec{i}+(zx'-xz')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}
\end{aligned}$$

Considérons dans toute la suite l'espace est rapporté à un repère orthonormale $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$

Exemples :

1) Si $\overrightarrow{u}(1;2;0)$ et $\overrightarrow{v}(-2;-1;1)$: alors on a :

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\overrightarrow{k}$$

donc : $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$ c'est à dire : $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}(2;-1;3)$

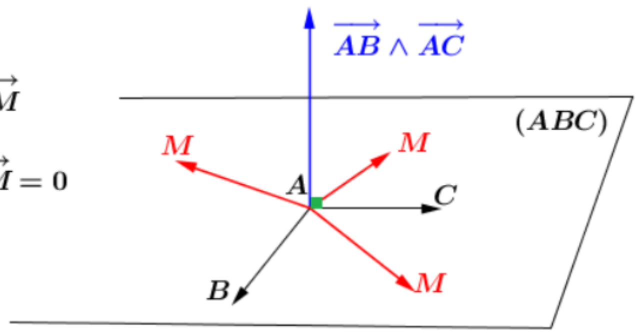
2) Soit : $A(0;2;1)$ et $B(0;-3;2)$ et $A(1;2;1)$: pour calculer l'aire du tringle ABC il faut :
- déterminer : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
- calculer le produit vectoriel : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis calculer la norme : $||\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}||$
- l'aire du triangle (ABC) est : $S=\dfrac{1}{2}||\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}||$

12.4 Application du produit vectoriel :

12.4.1 Equation d'un plan définie par trois points non alignées :

Propriété 12.4
Soient A ; B et C trois points non alignées alors :

$$\begin{aligned}
M(x;y;z)\in(ABC) &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\perp\overrightarrow{AM}\\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=0
\end{aligned}$$



$\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=0$: cette équation détermine l'équation du plan : (ABC).

Remarque :

Le plan (ABC) est diriger par les deux vecteur : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et on a :
$\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\perp\overrightarrow{AB}$ et $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\perp\overrightarrow{AC}$ donc le vecteur : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal sur (ABC).

Exemple :

Soit : $A(1;2;3)$ et $B(1;-1;1)$ et $A(2;1;2)$; Déterminons une équation cartésienne du plan : (ABC) :
On a : $M(x;y;z)\in(ABC)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=0$
donc il faut déterminer d'abord le produit vectoriel : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$:
on a : $\overrightarrow{AB}(0;-3;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-1;-2)$ donc :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -2 & -2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

donc : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ c'est à dire : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(4;-2;3)$

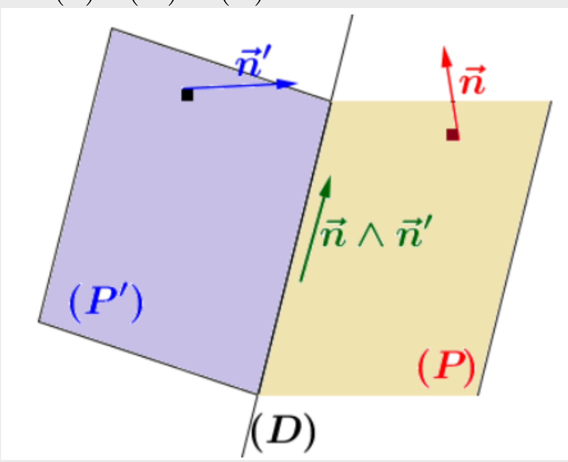
$$\begin{aligned}M(x;y;z)\in(ABC) &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ &\Leftrightarrow 4(x-1)-2(y-2)-3(z+3)=0\\ &\Leftrightarrow 4x-2y-3z-9=0\end{aligned}$$

et par suite : $(ABC):4x-2y-3z-9=0$

12.4.2 Intersection de deux plans :

Propriété 12.5
Soient : $(P):ax+by+cz+d=0$ et $(P'):a'x+b'y+c'z+d'=0$
On a : $\vec{n}(a;b;c)\perp(P)$ et $\vec{n'}(a';b';c')\perp(P')$:

- Si : $(P)\cap(P')=(D)$ alors $\vec{n}\wedge\vec{n'}$ est un vecteur directeur de (D).



- Si : $\vec{n}\wedge\vec{n'}=\vec{0}$ alors $(P)\cap(P')=\varnothing$ ou $(P)\equiv(P')$.

Exemple :
Déterminons l'intersection des deux plans : $(P):x+2y-2z+3=0$ et $(P'):4x-4y+2z-5=0$
En effet on a : $\vec{n}(1;2;-2)$ est un vecteur normal sur le plan (P) et
$\vec{n}'(4;-4;2)$ est un vecteur normal sur le plan (P')
alors si le vecteur : $\vec{n}\wedge\vec{n}'\neq0$;
$\vec{n}\wedge\vec{n}'$ est le vecteur directeur de la droite (D) l'intersection de (P) et (P').

Exercice :

Considérons les deux plans : $(P) : 2x+y-z+1=0$ et $(P') : x-2y+3=0$

1) Donner un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (P), puis vecteur $\vec{n}'$ normal au plan (P').
2) Calculer : $\vec{n}\wedge\vec{n}'$ puis déduire que $(P)\cap(P')=(D)$, avec (D) une droite.
3) Vérifier que : $A(-1;1;0)\in(D)$
4) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D).

Proprieté 12.6
Soit (D) une droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$, et soit M un point de l'espace, on a : la distance du point M à la droite (D) est :

$$d(M;(D))=\frac{||\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}||}{||\vec{u}||}$$

Exemple :

Considérons : $M(3;2;-1)$ et $(D)\begin{cases} x=2-t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$ Déterminons : $d(M;(D))=?$

on a (D) est la droite passant par $A(2;0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;2;1)$, alors :

$$\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}=6\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$$

donc :
$||\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}||=\sqrt{6^2+1^2+6^2}=\sqrt{73}$ et $||\vec{u}||=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$ donc :
$d(M;(D))=\frac{||\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}||}{||\vec{u}||}=\frac{\sqrt{73}}{\sqrt{6}}$

12.4.3 La série des exercices :

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac 2016 – Ss1 .2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(2,1,3)$, $B(3,1,1)$, $C(2,2,1)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ en déduire que les points A , B et C sont non alignés.
b) Montrer que $2x+2y+z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) a) Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(1,-1,0)$ et que son rayon est 6.
b) Montrer que $d(\Omega,(ABC))=3$, en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).
b) Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point B .

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac 2016 – Ss2 .2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1;3;4)$ et $B(0;1;2)$.

1) a) Vérifier que $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.
b) Montrer que $2x-2y+z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

2) Soit (S) la sphère d'équation :
$$x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$$
Montrer que le centre de la sphère est $\Omega(3;-3;3)$ et que son rayon est 5.

3) a) montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S).
b) Déterminer les coordonnées du point de tangence H du plan (P) et de la sphère (S) .

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac 2017 – Ss1 .2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit (P) le plan passant par le point $A(0,1,1)$ et dont un vecteur normal est $\vec{u}(1,0,-1)$ et soit (S) la sphère de centre $\Omega(0,1,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

1) a) montrer que $x-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

b) Montrer que le plan (P) est tangent à (S) au point $B(-1,1,0)$.

2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale à (P).

b) montrer que (Δ) est tangent à la sphère (S) au point $C(1,1,0)$.

3) Montrer que $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$.
En déduire l'aire du triangle OCB.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac 2017 – Ss2 .2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ et (P) le plan d'équation $y-z=0$.

1) a) montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1;1;1)$ et que son centre est 2.

b) Calculer la distance $d(\Omega,(P))$, en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C).

c) déterminer le centre et le rayon du cercle (C).

2) Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1;-2;2)$ et orthogonale à (P).

a) montrer que $\vec{u}(0,1,-1)$ est un vecteur directeur de (Δ).

b) Montrer que $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|=\sqrt{2}\left\|\vec{u}\right\|$, en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.

c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Δ) et (S)

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac 2018 – Ss1 .2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,-2,-2)$, $B(1,-2,-4)$, $C(-3,-1,2)$

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ et en déduire que $2x+2y+z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Soit la sphère (S) dont une équation est :

$$x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$$

Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega(1,0,1)$ et pour rayon $R=5$.

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

b) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

4) Montrer que $d(\Omega,(ABC))=3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac 2018 – Ss2 .2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(2,1,2)$ et de rayon 3 et (P) le plan passant par le point $A(-1,0,3)$ et dont un vecteur normal est $\vec{u}(4,0,-3)$.

1) Montrer que l'équation cartésienne de la sphère (S) est : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$

2) Vérifier que $4x-3z+13=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

3) a) Vérifier que $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1 \\ z=2-3t \end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$, est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale à (P).

b) Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et le plan (P).

c) Calculer $d(\Omega,(P))$

d) montrer que (P) est tangent à la sphère (S) en un point à déterminer.

CHAPITRE 13

CALCUL DE PROBABILITÉ

13.1 Dénombrement :

13.1.1 Le principe fondamental du dénombrement :

Définition du dénombrement 1
le dénombrement c'est la détermination du nombres de possibilité d'une expérience

a) Cas simple

- ▷ Le nombre de résultats possibles du lancement d'une pièce de monnaie est $N = 2$.
- ▷ Le nombre de résultats possibles du lancement d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6 est $N = 6$.
- ▷ Le nombre de résultats possibles du tirage d'une carte d'un sac contenant dix cartes est $N = 10$.
- ▷ En général, le nombre de résultats du choix d'un objet parmi p objets est $N = p$.

b) Cas composés : le principe fondamental du dénombrement :

Si une procédure peut être découpée en deux étapes, et qu'il y a m façons possibles de réaliser la première étape, et qu'il y a n façons possibles de réaliser la seconde étape, alors la procédure peut être accomplie de $n \times m$ façons.
En général on la définition suivante :

Définition (Principe fondamental du dénombrement) 1
Si une procédure peut être découpée en p étapes,
et qu'il y a n_1 façons possibles de réaliser la première étape,
et qu'il y a n_2 façons possibles de réaliser la seconde étape,
$\vdots \qquad \vdots$
et qu'il y a n_p façons possibles de réaliser la p^{eme} étape,
alors la procédure peut être accomplie de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$ façons.

Exemple 1

Considérons l'expérience suivante dont la réalisation est découpée en trois étapes :
On lance en l'air un dé à six faces (de 1 à 6) Puis on lance une pièce de monnaie (P ou F) On tire une boule d'un sac contenant 10 boules.
Le nombre de possibilités est : $N = 6 \times 2 \times 10$.

Exemple 2

Un code comporte trios chiffres distincts deux à deux et non nuls. Combien peut-on former de codes distincts ?
Choix du premier chiffre on a 9 possibilité (Parmi des nombres 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ;9)
Choix du deuxième chiffre on a 8 possibilité et choix du troisième chiffre on a 7 possibilité.
Donc d'après le principe fondamental de dénombrement le nombre de possibilité est : $9 \times 8 \times 7 = 504$ codes distincts.

13.1.2 Arrangement et permutation

Soit E un ensemble de n éléments, on veut constitué un ensemble à p éléments distincts dans un ordre déterminer avec $p \leq n$.
Chaque ensemble ainsi constitué (p-liste) est appelé arrangement de p éléments.

Définition 13.1
Soient p et n deux entiers naturels avec $1 \leq p \leq n$, et E un ensemble fini de n éléments.
• Tout choix ou tirage successif et sans remis de p éléments distincts deux à deux parmi n élément est appelé **arrangement** à p élément ou un **p-arrangement**.
• Tout arrangement à n élément est appelé **permutation** à n éléments.

Remarque :

L'ordre est très important dans tout arrangement.

Théorème 13.1
Soient p et n deux entiers naturels avec $1 \leq p \leq n$, et E un ensemble fini de n éléments.
Le nombre d'arrangement d'un ensemble à p éléments est égal à $n(n-1)\cdots(n-p+1)$, noté A_n^p.
Le nombre d'arrangement d'un ensemble à n éléments est égal à $n(n-1)\cdots 2 \times 1 = A_n^n$.
(On noté $A_n^n = n!$)

Remarques

Soient p et n deux entiers naturels avec $1 \leq p \leq n$, $A_n^p = \underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p\ est\ le\ nombre\ de\ facteurs\ du\ produit}$.

Exemples

$A_5^3 = \underbrace{5 \times 4 \times 3}_{le\,nombre\ de\ facteurs\ est\ 3} = ...$, le produit commence par 5 et le nombre de facteurs est 3.

$A_9^4 = \underbrace{9 \times 8 \times 7 \times 6}_{le\,nombre\ de\ facteurs\ est\ 4} = ...$, le produit commence par 9 et le nombre de facteurs est 4.

Cas particulier si $p = n$, (A_n^n noté $n!$) est égale à $n(n-1)\cdots 2 \times 1$, le produit commence par n.
Par exemples : $A_6^6 = 6 \times 5 \times \cdots 1 = ...$ et $A_{10}^{10} = 10 \times 9 \times \cdots 1 = ...$ et $A_{11}^{11} = 11 \times 10 \times \cdots 1 = ...$

Exemple d'application

Combien de nombres de trois chiffres peut-on écrire avec des chiffres impairs tous distincts ?
On choisit en fait trois chiffres impairs distincts ordonnée parmi l'ensemble des chiffres impaires E={1 ;3 ;5 ;7 ;9}, (le nombre d'éléments de E est 5, donc $n = 5$ et $p = 3$, l'ordre est important), alors le nombre de possibilités est : $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

13.1.3 Combinaison

Définition 13.2
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble finie de n éléments et p un entier vérifiant $1 \leq p \leq n$.
On appelle **combinaison de** p **éléments de** E toute partie (ou tout sous-ensemble) de E possédant p élément.

Théorème 13.2
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble finie de n éléments et p un entier vérifiant $1 \leq p \leq n$.
Le nombre de combinaison de p éléments parmi n éléments est égal à $\dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ noté C_n^p.

Remarque :

C_n^p présente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (l'ordre n'est pas important et il n'y a pas de répétition).

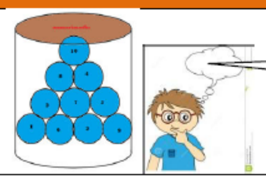
Exemple :

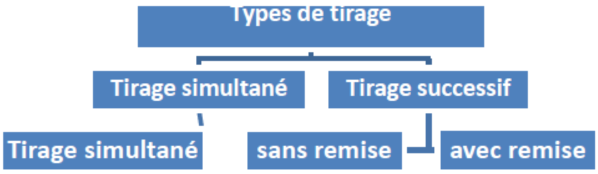
Dans une classe de 12 élèves, le professeur voulait choisir **trois** élèves pour faire une tâche, (L'ordre n'est pas important car les trois élèves feront la même tache),
alors le nombre de choix possible est : $C_{12}^3 = \dfrac{A_{12}^3}{3!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = \dfrac{1320}{6} = 220$.

Proprietés 1
Pour tout entier n et tout entier p tel que $1 \leq p < n$, on a :
$\bullet\ C_n^1 = C_n^n = n$; $\bullet\ C_n^p = C_n^{n-p}$ $\bullet\ A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ $\bullet\ C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{A_n^p}{P!}$
$\bullet C_n^0 = A_n^0 = 1$ et $0! = 1$. $\bullet C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$.

13.1.4 Type de tirage

Introduction au dénombrement par l'étude des différentes méthodes de tirage

Une urne contient n boules n = 10 On tire p boules de l'urne p = 3		Mais de quelle façon ?



1 Question : On tire simultanément $p=3$ boules de l'urne ; Quel est le nombre de cas possibles ?	**2** Question : On tire succéssivement et sans remise $p=3$ boules de l'urne ; Quel est le nombre de cas possibles ?	**3** Question : On tire succéssivement et avec remise $p=3$ boules de l'urne ; Quel est le nombre de cas possibles ?

En effet :

1) On tire **simultanément** $p = 3$ boules de l'urne ($n = 10$), (donc les boules sont choisis sans ordre),

Les choix **simultanés** de 3 boules parmi les 10 boules est : $C_{10}^{3} = \dfrac{A_{10}^{3}}{3!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$.

En général :

Proprieté 13.1
Le nombre de tirage **simultanés** *de p éléments parmi n est :* C_n^p.

2) On tire **successivement** et **sans remise** $p = 3$ boules de l'urne ($n = 10$),
(donc l'ordre des boule est très important mais il n'y a pas de répétition),
Les choix **successivement** et **sans remis** de 3 boules parmi les 10 boules est : $A_{10}^{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$. (ici on a appliquer le principe fondamental de dénombrement).
Le choix du premier boule on a 10 possibilités et le deuxième on a 9 possibilités et le troisième on a 8 possibilités. (donc le nombre de possibilités est $10 \times 9 \times 8 = A_{10}^{3}$).

En général :

Proprieté 13.2
Le nombre de tirage **successivement** *et* **sans remise** *de p éléments parmi n est :* A_n^p.

3) On tire **successivement** **avec remise** $p = 3$ boules de l'urne ($n = 10$),
(donc l'ordre des boule est très important et il n'y a de répétition des boules (tirage avec remis),
Les choix **successivement avec remis** de 3 boules parmi les 10 boules est : $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$. (ici on a appliquer le principe fondamental de dénombrement).
Le choix du premier boule on a 10 possibilités et le deuxième on a 10 possibilités et le troisième on a 10 possibilités. (tirage avec remis, donc le nombre de possibilités est $10 \times 10 \times 10 = 10^3$).

En général :

Proprieté 13.3
Le nombre de tirage **successivement** **avec remise** de p éléments parmi n est : n^p.

Exercice

: Une urne contient n boules ($n = 11$) ; (4 Rouges) ; (5 verts) et (2 bleus)

I) On tire **simultanément** $p = 3$ boules de l'urne,

1) Quel est le nombre de choix possible ?
2) Quel est le nombre de choix de 3 boules rouge ?
3) Quel est le nombre de choix de 3 boules de même couleur ?
4) Quel est le nombre de choix de 3 boules de couleurs différents ?
5) Quel est le nombre de choix de 3 boules de couleurs différents deux à deux ?
6) Quel est le nombre de choix de 2 boules rouges et un boule bleu ?

II) On tire **successivement** et **sans remis** $p = 3$ boules de l'urne, (Répondez aux mêmes questions) ?

III) On tire **successivement avec remis** $p = 3$ boules de l'urne, (Répondez aux mêmes questions) ?

Autres exercices :

Exercice 1 (14 pts)	
Une urne contient 12 boules ($n=12$) ; (4 verts) ; (6 rouges) et (2 bleus) On tire **simultanément** $p=3$ boules de l'urne,	
1) Quel est le nombre de tirages possible ?	1.5
2) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ?	2
3) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents ?	1.5
4) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents deux à deux ?	1.5
5) Quel est le nombre de tirages de 2 boules vertes exactement ?	2
6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges au moins ?	2
7) Quel est le nombre de tirages d'une boule blue et deux vertes ?	1.5
8) Quel est le nombre de tirages d'une boule rouge au plus ?	2

Correction de l'exercice 1

Une urne contient 12 boules ($n=12$) ; (4 verts) ; (6 rouges) et (2 bleus) • On tire **simultanément** 3 boules de l'urne :

1) Le nombre de tirages possibles est : $C_{12}^{3}=\dfrac{A_{12}^{3}}{3!}=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=\dfrac{1320}{6}=220$

2) 🔴🔴🔴 ou 🟢🟢🟢 Le nombre de tirages de 3 boules de même couleurs est :
$C_6^3+C_4^3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}+\dfrac{4\times3\times2}{3\times2\times1}=20+4=24$

3) Le nombre de tirages Possibles = Le nombre de tirages de boules de même couleurs + Le nombre de tirages de boules de couleurs différentes
Donc le nombre de tirages de 3 boules couleurs différentes est : $220-24=196$

4) 🔴 et 🟢 et 🔵 : Le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différentes deux à deux est : $C_6^1\times C_4^1\times C_2^1=6\times4\times2=48$

5) Quel est le nombre de tirages de 2 boules vertes exactement ?
(🟢🟢🔴) ou (🟢🟢🔵) donc le nombre de tirage est :
$\left(C_4^2\times C_6^1\right)+\left(C_4^2\times C_2^1\right)=(6\times6)+(6\times2)=18+12=30$

6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges au moins ?
(🔴🔴🟢) ou (🔴🔴🔵) ou (🔴🔴🔴) donc le nombre de tirages est :

$(C_6^2 \times C_4^1) + (C_6^2 \times C_2^1) + C_6^3 = (15 \times 4) + (15 \times 2) + 20 = 60 + 30 + 20 = 110$

7) Quel est le nombre de tirages d'une boule blue et deux vertes ?
( ) : $(C_4^2 \times C_2^1) = 6 \times 2 = 12$

8) Quel est le nombre de tirages d'une boule rouge au plus ? (NR NR) ou (NR NR NR) :
$(C_6^1 \times C_6^2) + C_6^3 = (6 \times 15) + 20 = 110$

Exercice 2 (14 pts)	
Une urne contient 11 boules ($n = 11$) ; (3 verts) ; (6 rouges) et (2 bleus) On tire **simultanément** $p = 3$ boules de l'urne,	
1) Quel est le nombre de tirages possible ?	1.5
2) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ?	2
3) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents ?	1.5
4) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents deux à deux ?	1.5
5) Quel est le nombre de tirages de 2 boules vertes exactement ?	2
6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges au moins ?	2
7) Quel est le nombre de tirages d'une boule blue et deux rouges ?	1.5
8) Quel est le nombre de tirages d'une boule verte au plus ?	2

Correction de l'exercice 2

Une urne contient 11 boules ($n = 11$) ; (3 verts) ; (6 rouges) et (2 bleus) • On tire **simultanément** 3 boules de l'urne :

1) Le nombre de tirages possibles est : $C_{11}^3 = \dfrac{A_{11}^3}{3!} = \dfrac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = \dfrac{990}{6} = 165$

2) ou Le nombre de tirages de 3 boules de même couleurs est :
$C_6^3 + C_3^3 = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} + \dfrac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 20 + 1 = 21$

3) Le nombre de tirages Possibles = Le nombre de tirages de boules de même couleurs + Le nombre de tirages de boules de couleurs différentes
Donc le nombre de tirages de 3 boules couleurs différentes est : $165 - 21 = 144$

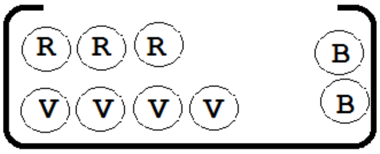
4) et et : Le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différentes deux à deux est :
$C_6^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 6 \times 3 \times 2 = 36$

5) Quel est le nombre de tirages de 2 boules vertes exactement ?
( ) ou ( ) donc le nombre de tirage est :
$(C_3^2 \times C_6^1) + (C_3^2 \times C_2^1) = (3 \times 6) + (3 \times 2) = 18 + 6 = 24$

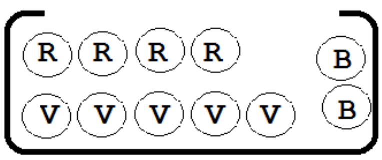
6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges au moins ?
( ) ou ( ) ou ( ) donc le nombre de tirages est :
$(C_6^2 \times C_3^1) + (C_6^2 \times C_2^1) + C_6^3 = (15 \times 3) + (15 \times 2) + 20 = 95$

7) Quel est le nombre de tirages d'une boule blue et deux rouges ?
( ) : $(C_6^2 \times C_2^1) = 15 \times 2 = 30$

8) Quel est le nombre de tirages d'une boule verte au plus ? (NV NV) ou (NV NV NV) :
$(C_3^1 \times C_8^2) + C_8^3 = (3 \times 28) + 56 = 140$

Exercice 3 (14 pts)	
Une urne contient 9 boules $(n = 9)$; (4 verts) ; (3 rouges) et (2 bleus)	
	
On tire **simultanément** $p = 3$ boules de l'urne,	
1) Quel est le nombre de tirages possible ?	1.5
2) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ?	2
3) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents ?	1.5
4) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents deux à deux ?	1.5
5) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement ?	2
6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules vertes au moins ?	2
7) Quel est le nombre de tirages d'une boule verts et deux blues ?	1.5
8) Quel est le nombre de tirages d'une boule blue au plus ?	2

Correction de l'exercice 3



Une urne contient 11 boules $(n = 11)$; (5 verts) ; (4 rouges) et (2 bleus)

• On tire **simultanément** 3 boules de l'urne :

1) Le nombre de tirages possibles est : $C_{11}^{3}=\dfrac{A_{11}^{3}}{3!}=\dfrac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=\dfrac{990}{6}=165$

2) ou Le nombre de tirages de 3 boules de même couleurs est :
$C_{4}^{3}+C_{5}^{3}=\dfrac{4\times3\times2}{3\times2\times1}+\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=4+10=14$

3)

Le nombre de tirages Possibles	$=$	Le nombre de tirages de boules de même couleurs	$+$	Le nombre de tirages de boules de couleurs différentes

Donc le nombre de tirages de 3 boules couleurs différentes est : $165-14=151$

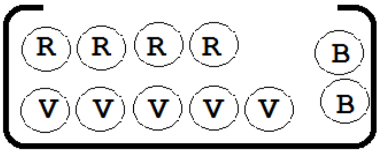
4) et et : Le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différentes deux à deux est :
$C_{4}^{1}\times C_{5}^{1}\times C_{2}^{1}=4\times5\times2=40$

5) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement ?
( ) ou ( ) donc le nombre de tirage est :
$\left(C_{4}^{2}\times C_{5}^{1}\right)+\left(C_{4}^{2}\times C_{2}^{1}\right)=(6\times5)+(6\times2)=30+12=42$

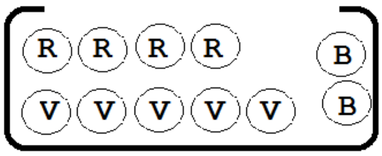
6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules vertes au moins ?
( ) ou ( ) ou ( ) donc le nombre de tirages est :
$\left(C_{5}^{2}\times C_{4}^{1}\right)+\left(C_{5}^{2}\times C_{2}^{1}\right)+C_{5}^{3}=(10\times4)+(10\times2)+10=40+20+10=70$

7) Quel est le nombre de tirages d'une boule verte et deux blues ?
( ) : $\left(C_{5}^{1}\times C_{2}^{2}\right)=5\times1=5$

8) Quel est le nombre de tirages d'une boule blue au plus ? (NB NB) ou (NB NB NB) :
$\left(C_{2}^{1}\times C_{9}^{2}\right)+C_{9}^{3}=(2\times36)+84=156$

Exercice 4 (14 pts)	
Une urne contient 11 boules $(n = 11)$; (5 verts) ; (4 rouges) et (2 bleus)	
	
On tire **simultanément** $p = 3$ boules de l'urne,	
1) Quel est le nombre de tirages possible ?	1.5
2) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ?	2
3) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents ?	1.5
4) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents deux à deux ?	1.5
5) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement ?	2
6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules vertes au moins ?	2
7) Quel est le nombre de tirages d'une boule verts et deux blues ?	1.5
8) Quel est le nombre de tirages d'une boule blue au plus ?	2

Correction de l'exercice 4



Une urne contient 11 boules $(n = 11)$; (5 verts) ; (4 rouges) et (2 bleus)

• On tire **simultanément** 3 boules de l'urne :

1) Le nombre de tirages possibles est : $C_{11}^{3} = \dfrac{A_{11}^{3}}{3!} = \dfrac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = \dfrac{990}{6} = 165$

2) ou Le nombre de tirages de 3 boules de même couleurs est :
$C_4^3 + C_5^3 = \dfrac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} + \dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 4 + 10 = 14$

3)

Le nombre de tirages Possibles	$=$	Le nombre de tirages de boules de même couleurs	$+$	Le nombre de tirages de boules de couleurs différentes

Donc le nombre de tirages de 3 boules couleurs différentes est : $165 - 14 = 151$

4) et et : Le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différentes deux à deux est :
$C_4^1 \times C_5^1 \times C_2^1 = 4 \times 5 \times 2 = 40$

5) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement ?
( ) ou ( ) donc le nombre de tirage est :
$\left(C_4^2 \times C_5^1\right) + \left(C_4^2 \times C_2^1\right) = (6\times 5) + (6\times 2) = 30 + 12 = 42$

6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules vertes au moins ?
( ) ou ( ) ou ( ) donc le nombre de tirages est :
$\left(C_5^2 \times C_4^1\right) + \left(C_5^2 \times C_2^1\right) + C_5^3 = (10\times 4) + (10\times 2) + 10 = 40 + 20 + 10 = 70$

7) Quel est le nombre de tirages d'une boule verte et deux blues ?
( ) : $\left(C_5^1 \times C_2^2\right) = 5\times 1 = 5$

8) Quel est le nombre de tirages d'une boule blue au plus ? (NB NB) ou (NB NB NB) :
$\left(C_2^1 \times C_9^2\right) + C_9^3 = (2\times 36) + 84 = 156$

Exercice 5 (pts)

Une urne contient 10 boules ($n = 10$) ; (3 verts) ; (5 rouges) et (2 bleus)

I) On tire **simultanément** $p = 3$ boules de l'urne,
1) Quel est le nombre de tirages possible ?
2) Quel est le nombre de tirages de 3 boules rouge ?
3) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ?
4) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents ?
5) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents deux à deux ?
6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges au moins ?
7) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement ?

II) On tire **successivement** et **sans remis** $p = 3$ boules de l'urne,
(Répondez aux mêmes questions) ?

III)) On tire **successivement avec remis** $p = 3$ boules de l'urne,
(Répondez aux mêmes questions) ?

Correction de l'exercice 5

I) On tire **simultanément** 3 boules de l'urne :

1) Le nombre de tirages possibles est : $C_{10}^3 = \dfrac{A_{10}^3}{3!} = \dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = \dfrac{720}{6} = 120$

2) Le nombre de tirages de 3 boules rouges est : $C_5^3 = \dfrac{A_5^3}{3!} = \dfrac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1} = \dfrac{60}{6} = 10$

3) ou Le nombre de tirages de 3 boules de même couleurs est :
$C_5^3 + C_3^3 = 10 + 1 = 11$

4)

Le nombre de tirages Possibles	=	Le nombre de tirages de boules de même couleurs	+	Le nombre de tirages de boules de couleurs différentes

Donc le nombre de tirages de 3 boules couleurs différentes est : $120 - 11 = 109$

5) et et : Le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différentes deux à deux est :
$C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 5\times 3\times 2 = 30$

6) Le nombre de tirages de 2 boules rouges au moins *ou* *ou* est :
$\left(C_5^2 \times C_3^1\right) + \left(C_5^2 \times C_2^1\right) + C_5^3 = (10\times 3) + (10\times 2) + 10 = 60$

7) Le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement 

est :
$\left(C_5^2 \times C_3^1\right) + \left(C_5^2 \times C_2^1\right) = (10 \times 3) + (10 \times 2) = 50$

II) On tire **successivement sans remis** 3 boules de l'urne : (l'ordre est important) :

1) Le nombre de tirages possibles est : $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

2)  Le nombre de tirages de 3 boules rouges est : $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

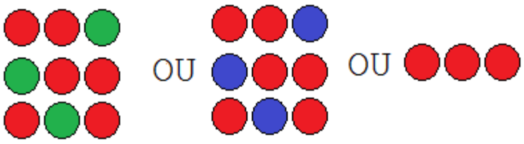
3)  ou  Le nombre de tirages de 3 boules de même couleurs est :
$A_5^3 + A_3^3 = 60 + 6 = 66$

4)

Le nombre de tirages Possibles	=	Le nombre de tirages de boules de même couleurs	+	Le nombre de tirages de boules de couleurs différentes

Donc le nombre de tirages de 3 boules couleurs différentes est : $720 - 66 = 654$

5) Le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différentes deux à deux :
(L'ordre est important) : ( et  et ) $\times 3!$:
donc le nombre est : $\left(A_5^1 \times A_3^1 \times A_2^1\right) \times 6 = (5 \times 3 \times 2) \times 6 = 30 \times 6 = 180$

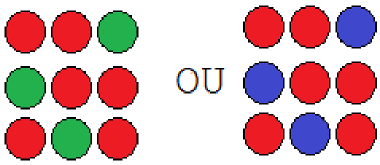
6) Le nombre de tirages de 2 boules rouges au moins 

Remarque : Au moins deux boules rouges La troisième boule peut ou non être rouge

S'il n'est pas rouge, l'ordre est important

La boule non rouge peut être la première, la deuxième ou la troisième

Le nombre est : $\left(A_5^2 \times A_3^1\right) \times 3 + \left(A_5^2 \times A_2^1\right) \times 3 + A_5^3 = (20 \times 3) \times 3 + (20 \times 2) \times 3 + 60 = 360$

7) Le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement 

est :
$\left(A_5^2 \times A_3^1\right) \times 3 + \left(A_5^2 \times A_2^1\right) \times 3 = (20 \times 3) \times 3 + (20 \times 2) \times 3 = 300$

III) On tire **successivement avec remis** 3 boules de l'urne : (l'ordre est important et il y a de répétition) :

1) Le nombre de tirages possibles est : $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

2)  Le nombre de tirages de 3 boules rouges est : $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

3)  ou  ou  Le nombre de tirages de 3 boules de même couleurs est :
$5^3 + 3^3 + 2^3 = 125 + 27 + 8 = 160$

Remarque : On a 2 boules bleus mais on peut tirer 3, car la tirage est avec remis

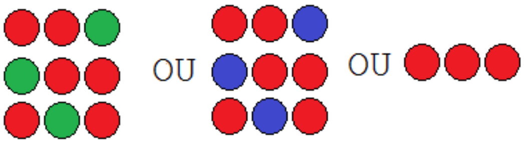
Il y a de répétition on peut tirer la même boule plusieurs fois

4)

Le nombre de tirages Possibles	=	Le nombre de tirages de boules de même couleurs	+	Le nombre de tirages de boules de couleurs différentes

Donc le nombre de tirages de 3 boules couleurs différentes est : $1000 - 160 = 840$

5) Le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différentes deux à deux :
(L'ordre est important) : (et et) $\times 3!$:
donc le nombre est : $\left(5^1 \times 3^1 \times 2^1\right) \times 6 = (5 \times 3 \times 2) \times 6 = 30 \times 6 = 180$



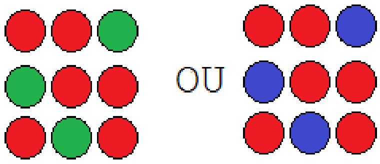
6) Le nombre de tirages de 2 boules rouges au moins

Remarque : Au moins deux boules rouges La troisième boule peut ou non être rouge

S'il n'est pas rouge, l'ordre est important

La boule non rouge peut être la première, la deuxième ou la troisième

Le nombre est : $\left(5^2 \times 3^1\right) \times 3 + \left(5^2 \times 2^1\right) \times 3 + 5^3 = (25 \times 3) \times 3 + (25 \times 2) \times 3 + 125 = 500$



7) Le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement est :
$\left(5^2 \times 3^1\right) \times 3 + \left(5^2 \times 2^1\right) \times 3 = (22 \times 3) \times 3 + (25 \times 2) \times 3 = 375$

13.1.5 Cardinal d'un ensemble fini :

Définition 13.3
On considère un ensemble fini E de n éléments distincts : $E = \{x_1; x_2; \cdots; x_n\}$.
On appelle **cardinal** de E son nombre d'éléments n et on écrit : $card(E) = n$.

Proprieté 13.4
- Si E est fini et si $F \subset E$ alors F est fini et $card(F) \leq card(E)$.
- Si E et F fini alors, $E \cup F$ est fini et $card(E \cup F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$.
- si $E \cap F = \varnothing$ (sont disjoints) et fini alors $card(E \cup F) = card(E) + card(F)$.
- $card\varnothing = 0$, (où $\varnothing$ est l'ensemble vide).

13.2 Calcul de probabilités :

13.2.1 Définitions :

Activité :

On lance un dé équilibré dont les six faces sont numérotées : $1; 2; 3; 4; 5; 6$.
Et on note le nombre inscrit sur la face supérieure.

1) Déterminer les résultats possibles de cette expérience ?

Définition 13.4
- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît touts ces possibilités mais nous ne prédisons pas les bonnes possibilités.
- L'ensemble de toutes les résultats possibles d'une expérience aléatoires est appelé **L'univers**. On note généralement cet ensemble Ω.

Alors les résultats possible de notre expérience est : $1;2;3;4;5;6$.
Donc **L'univers** est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.

2) Considérons cette situation, A " le nombre obtenu est pair "
• Déterminer les possibilités qui vérifiant A,
En effet les possibilités qui vérifiant A sont $2;4;6$ forment un sous-ensemble de Ω on note $A = \{2;4;6\} \subset \Omega$.
Plus généralement, chaque situation peut être associé un sous ensemble de Ω, les sous ensemble de Ω sont appelés **les événements** et les singletons $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\cdots$ sont appelés **les événements élémentaires**.

3) Considérons les événements : B " le nombre obtenu est un multiple de 3 "
C " Le nombre obtenu est impaire "
   a) Déterminer $A \cap B$ (les possibilité qui vérifiant A et B).
   b) Déterminer $A \cup B$ (les possibilité qui vérifiant A ou B).

4) Déterminer les deux événements : D " le nombre obtenu est supérieur ou égal à 6 "
E " le nombre obtenu est supérieur strictement à 6 "

5) a) Y a-t-il une possibilité qui vérifier A et C à la fois ?
   b) Déterminer $A \cup C$, que remarquez vous ?

Suite de la solution de l'activité :

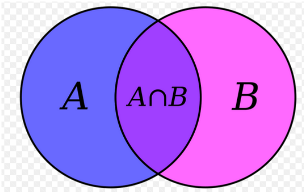
3) a) On a $A = \{2;4;6\}$ et $B = \{3;6\}$ donc : $A \cap B = \{6\}$.
Si les événements A et B sont réalisées à la fois, on dit que l'événement $A \cap B$ est réalisée.
   b) On a $A = \{2;4;6\}$ et $B = \{3;6\}$ donc : $A \cup B = \{2;4;6;3\}$.
Si l'un des événements A ou B est réalisée, on dit que l'événement $A \cup B$ est réalisée.

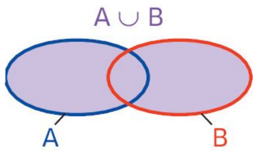
4) On a D " le nombre obtenu est supérieur ou égal à 6 " donc $D = \{6\}$ et
E " le nombre obtenu est supérieur strictement à 6 " donc $E = \varnothing$ on dit que E est l'événement **Impossible**.

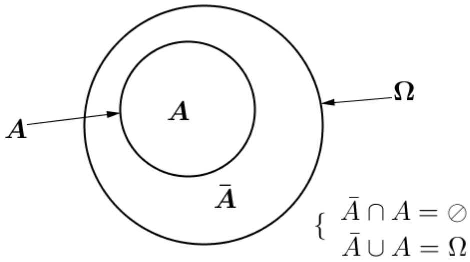
Définition 13.5
L'événement **Impossible** ne contient aucun des résultats de l'expérience sera noté $\varnothing$.
L'événement **Certain** contient tous les résultats de l'expérience sera noté Ω c'est **l'univers**.

5) a) On a $A = \{2;4;6\}$ et $C = \{1;3;5\}$, donc $A \cap C = \varnothing$ (c'est-à-dire les deux événements ne peuvent pas réalisé à la fois). On dit que A et C sont deux événements **incompatible**.
   b) $A \cup C = \{1;2;3;4;5;6\} = \Omega$, on remarque que l'un des deux événements doit se réalisée car $(A \cup C) = \Omega$. On écrit $C = \bar{A}$ on a :
$$\begin{cases} \bar{A} \cap A = \varnothing \\ \bar{A} \cup A = \Omega \end{cases}$$

Définition 13.6
Un événement est dit **contraire** de A noté $\bar{A}$ si A et $\bar{A}$ sont incompatible et $\bar{A} \cup A$ forme une totalité des expériences, c'est-à-dire : $\begin{cases} \bar{A} \cap A = \varnothing \\ \bar{A} \cup A = \Omega \end{cases}$







13.2.2 Probabilité d'un événement - Hypothèse d'équiprobabilité :

Définition 13.7
Soit $\Omega = \{w_1; w_2; \cdots; w_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.

• L'osque on répété une expérience un très grand nombre de fois, la fréquence de n'importe quel événement élémentaire $\{w_i\}$ avec $i \in \{1; 2; \cdots; n\}$ se stabilise autour d'une valeur p_i.
p_i est appelé la probabilité de l'événement $\{w_i\}$ et on écrit : $P(\{w_i\}) = p_i$.

• La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent : Si $A = \{w_1; w_2; \cdots; w_k\}$ avec $(1 \leq k \leq n)$ alors :
$P(A) = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ où $P(\{w_i\}) = p_i.(1 \leq i \leq k)$.On a aussi : $P(\Omega) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

• Pour tout événement A on a : $0 \leq P(A) \leq 1$. • $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.

Théorème et Définition 13.1
• Si tous les événements élémentaires d'une expérience ont la même probabilité, on dit qu'on est dans une situation d' **équiprobabilités** , et :
• Pour tout événement A on a : $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$.

Remarque :

Les éventualités de A sont appelés éventualités favorables et celle de Ω éventualité possibles.
On écrit souvent :$P(A) = \dfrac{nombre\ d'eventualites\ favorables}{nombre\ d'eventualites\ possibles}$

Théorème 13.3
Pour tous événements A et B de Ω on a :
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Exercice :

Une urne contient 6 boules **indiscernable au toucher** :
3 boules rouges et 2 boules vertes et un boule bleue
On tire **simultanément** deux boules, considérons les événements suivantes :
A " Obtenir une seule boule rouge ". B " Obtenir une seule boule verte ".
C " Obtenir au moins une boule verte ".

1) Déterminer $card(\Omega)$ où Ω est l'univers des possibilités.
2) Calculer : $P(A)$ et $P(B)$ et $P(C)$ et $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Solution de l'exercice :

1) On a le tirage est **simultané** alors le nombre de possibilités est le nombre de combinaisons de 2 éléments dans un ensemble de 6 éléments c'est-à-dire : C_6^2 alors :
$card(\Omega) = C_6^2 = \dfrac{A_6^2}{2!} = \dfrac{6\times 5}{2\times 1} = 15$

2) • Calcul de $P(A)$:
Les boules sont indiscernable au toucher donc il y a **équiprobabilité** , et donc $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$.
Pour la réalisation de l'événement "A" il faut tirer une boule rouge parmi les trois boules rouges et tirer une boule non rouge parmi les trois boules non rouges, donc :
$card(A) = C_3^1 \times C_3^1 = 3\times 3 = 9$ et par suite : $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$

• Calcul de $P(B)$: on a : $P(B) = \dfrac{card(B)}{card(\Omega)}$.
Pour la réalisation de l'événement "B" il faut tirer une boule verte parmi les deux boules vertes et tirer une boule non verte parmi les quatre boules non **vertes** , donc :
$card(B) = C_2^1 \times C_4^1 = 2\times 4 = 8$ et par suite : $P(B) = \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} = \dfrac{8}{15}$.

• Calcul de $P(C)$: on a : $P(C) = \dfrac{card(C)}{card(\Omega)}$.
Pour la réalisation de l'événement "C" il faut tirer une boule verte et une boule non verte ou de tirer deux boules vertes, $(\{V;\bar{V}\}$ ou $\{V;V\})$ donc :
$card(C) = C_2^1 \times C_4^1 + C_2^2 = (2\times 4) + 1 = 9$ et par suite : $P(C) = \dfrac{card(C)}{card(\Omega)} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$.

• Calcul de $P(A\cap B)$:
Pour la réalisation de l'événement "$A\cap B$" il faut tirer une boule rouge parmi les trois boules rouges et une boule verte parmi les deux boules vertes, $(\{R;V\})$ donc :
$card(A\cap B) = C_3^1 \times C_2^1 \times = 3\times 2 = 6$ et par suite : $P(A\cap B) = \dfrac{card(A\cap B)}{card(\Omega)} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$.

• Calcul de $P(A\cup B)$: on a : $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \dfrac{3}{5} + \dfrac{8}{15} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{11}{15}$

13.2.3 Probabilité conditionnelle :

Activité :

Un lycée comprend 500 élèves répartis comme suit :

Filière $\rightarrow$ $\downarrow$ Le sexe	Science-exp	Lettre	La somme
Femmes	120	140	260
Hommes	180	60	240
La somme	300	200	500

Nous choisissons au hasard un élève parmi les 500 élèves.

1) Déterminer la probabilité des événements suivants :
G " Choix d'un élève Homme " ; F " Choix d'une femme " ; L " Choix d'un élève en lettre"
E " Choix d'un élève en science-exp " ; $E\cap G$ " Choix d'un élève homme en science-exp "

2) Si l'élève choisi est un homme qu'elle est la probabilité d'être en filière science-exp.

Solution :

1) D'après le tableau on a : $card(\Omega) = 500$ et $P(G) = \frac{card(G)}{card(\Omega)} = \frac{240}{500}$; $P(F) = \frac{260}{500}$
$P(E) = \frac{300}{500}$; $P(L) = \frac{200}{500}$ et $P(G \cap E) = \frac{180}{500}$
2) Si l'élève choisi est un homme alors la probabilité d'être en filière science-exp est : $\frac{180}{240}$ car il y a 180 élève homme en science-exp sur 240.
Le nombre $\frac{180}{240}$ est la probabilité d'obtenir un élève de science-exp sachant que l'élève est un homme on le note $P_G(E)$ ou $P(E/G)$.

Se lit la probabilité que l'évènement E se réalise sachant que G est réalisé on écrit : $P_G(E) = \frac{180}{240}$.

Remarque :

$$P_G(E) = \frac{card(G \cap E)}{card(G)} = \frac{\frac{card(G \cap E)}{card(\Omega)}}{\frac{card(G)}{card(\Omega)}} = \frac{P(G \cap E)}{P(E)}$$

Définition 13.8
Soient A et B deux événements de Ω avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé, est le nombre notée $P_A(B)$ ou $P(B/A)$ définie par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

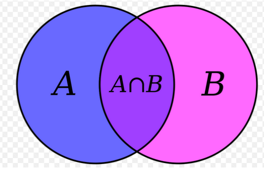
Conséquences 13.1
- Dans le cas de l'équiprobabilité on a : $P_A(B) = \frac{card(A \cap B)}{card(A)}$
- Si A est un événement de Ω avec $P(A) \neq 0$ alors $P_A(A) = 1$.
- Si A et B deux événements de Ω avec $P(A) \neq 0$ alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
- Si A et B deux événements incompatibles de Ω avec $P(A) \neq 0$ alors $P(A/B) = 0$.
- Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ alors : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

Exercice :

Exercice :

Une urne contient 5 boules noires numérotés $2;1;1;1;1$ et trois boules blanches numérotés $2;1;1$.
On tire successivement et sans remis deux boules :
Calculer la probabilité des événements suivants :
I " Obtenir deux boules noires et la somme des nombres portés par les deux $= 2$ "
J " Obtenir deux boules noires sachant que la somme des nombres portés par les deux $= 2$ "

Solution :



Soit Ω l'univers de cette expérience on a : $card(\Omega) = A_2^8 = 56$

• Pour obtenir deux boules noires et la somme des nombres portés par les deux $= 2$:
Il faut tirer 2 boules noires parmi les 4 boules noires portés le numéro 1.
Donc : $card(I) = A_4^2 = 12$ et alors : $P(I) = \dfrac{A_4^2}{A_8^2} = \dfrac{12}{56}$.

• Considérons les événements :
A " Obtenir deux boules noires " ; B " Obtenir deux boules et la somme des nombres portés $= 2$ "

On a : $card(A) = A_5^2$ et $card(B) = A_6^2$ et alors : $P(J) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(I)}{P(B)} = \dfrac{\frac{A_4^2}{A_8^2}}{\frac{A_6^2}{A_8^2}} = \dfrac{A_4^2}{A_6^2} = \dfrac{12}{30}$

13.2.4 Probabilités totales :

- Soit A un ensemble non vide on a déjà vu que : $\begin{cases} \bar{A}\cap A = \varnothing \\ \bar{A}\cup A = \Omega \end{cases}$

  dans ce cas on dit que A et $\bar{A}$ formant une partition de Ω.
- Soient A_1 et A_2 et A_3 trois événements de Ω tels que $(\forall i \in \{1;2;3\}) : A_i \neq \Omega$ et $P(A_i) \neq 0$.

  On dit que A_1 et A_2 et A_3 formant une partition de Ω si : $\begin{cases} A_1\cap A_2 = A_1\cap A_3 = A_2\cap A_3 = \varnothing \\ A_1\cup A_2\cup A_3 = \Omega \end{cases}$

  et donc ce cas on a pour tout événement B de Ω :

$$P(B) = P_{A_1}(B)\cdot P(A_1) + P_{A_2}(B)\cdot P(A_2) + P_{A_3}(B)\cdot P(A_3).$$

Cas particulier : pour tout événement B de Ω on a : $P(B) = P_A(B)\cdot P(A) + P_{\bar{A}}(B)\cdot P(\bar{A})$.
Plus généralement on a la définition et le théorème suivants :

Définition 13.9
Soient Ω l'univers associé à une expérience aléatoires et $A_1;A_2;\cdots;A_n$ des événements de Ω.
On dit que : $A_1;A_2;\cdots;A_n$ formant une partition de Ω si :

$$\begin{cases} \forall(i;j) : \quad 1\leq i\leq n\,,\ 1\leq j\leq n : \quad i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j = \varnothing \\ A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n = \Omega \end{cases}$$

Théorème 13.4
Soient $A_1;A_2;\cdots;A_n$ une partition de Ω, alors pour tout événement B on a :

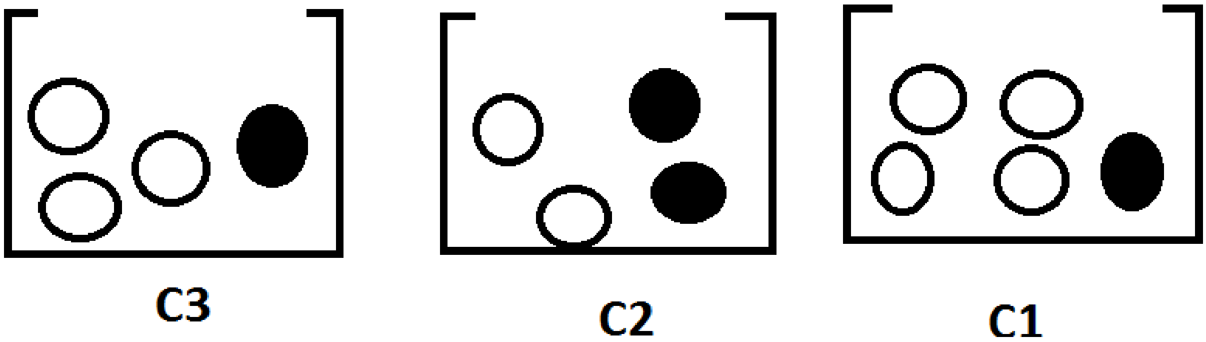
$$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$$

Si $(\forall i\in\{1;2;\cdots n\})P(A_i)\neq 0$ alors :

$$P(B)=P_{A_1}(B)\cdot P(A_1)+P_{A_2}(B)\cdot P(A_2)+\cdots+P_{A_n}(B)\cdot P(A_n)$$

Exercice 1 :

Trois urnes C_1 ; C_2 et C_3 indiscernables : C_1 Contient 4 boules blanches et une boule noire. C_2 Contient 2 boules blanches et 2 boules noires. C_3 Contient 3 boules blanches et une boule noire.



▷ On choisi une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.
• Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ◯ ?

Solution :

Considérons les événements : C_1 " Choisi l'urne C_1 " ; C_2 " Choisi l'urne C_2 "
C_3 " Choisi l'urne C_3 " ; B " La boule tirée est blanche "
On a les événements C_1 ; C_2 et C_3 formant une partition de Ω.
et puisque C_1 ; C_2 et C_3 sont indiscernables alors : $P(C_1)=P(C_2)=P(C_3)=\dfrac{1}{3}$

▷ La probabilité de tirée une boule blanche de l'urne C_1 est : $P_{C_1}(B)=\dfrac{4}{5}$.

▷ La probabilité de tirée une boule blanche de l'urne C_2 est : $P_{C_2}(B)=\dfrac{2}{4}$.

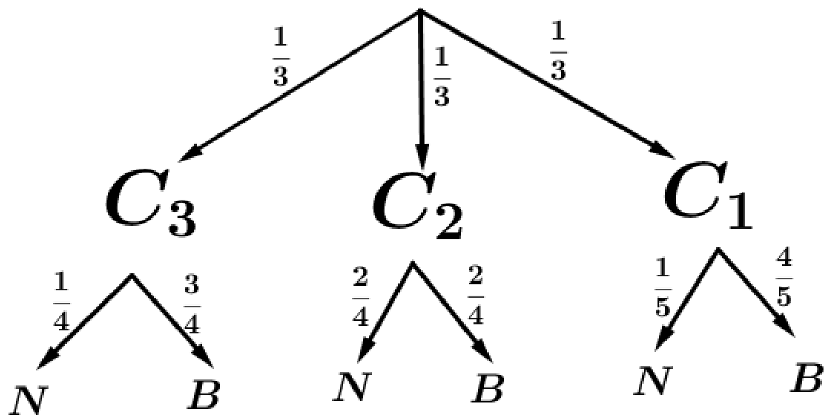
▷ La probabilité de tirée une boule blanche de l'urne C_3 est : $P_{C_3}(B)=\dfrac{3}{4}$.

Puisque les événements C_1 ; C_2 et C_3 formant une partition de Ω alors :

$$\begin{aligned}P(B) &= P_{C_1}(B)\cdot P(C_1)+P_{C_2}(B)\cdot P(C_2)+P_{C_3}(B)\cdot P(C_3)\\ &= \frac{1}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\\ &= \frac{4}{15}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\\ &= \frac{41}{60}\end{aligned}$$

Remarque :

On peut résumer ceci dans un arbre des possibilités :



Par exemple : $P_{C_1}(B) = \dfrac{4}{5}$ et $P_{C_1}(N) = \dfrac{1}{5}$ et $\cdots$ avec : N " La boule tirée est noire ".
D'après l'arbre des possibilités on peut déduire :

$$P(N) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{19}{60}$$

Exercice 2 :

Une usine produit des lampes électrique par trois machines :
★ La machine A : produit 20% des lampes avec 5% des lampes fabriquées sont invalides.
★ La machine B : produit 30% des lampes avec 4% des lampes fabriquées sont invalides.
★ La machine C : produit 50% des lampes avec 1% des lampes fabriquées sont invalides.

Nous choisissons au hasard une lampe électrique :

1) Quelle est la probabilité des événements suivants :
   a) X " La lampe est invalide et fabriquée par la machine A "
   b) Y " La lampe est invalide et fabriquée par la machine B "
   c) Z " La lampe est invalide et fabriquée par la machine C "
2) Déduire la probabilité que la " lampe est invalide " ?
   (Rappel : $20\% = \dfrac{20}{100}$ est la probabilité que la lampe soit fabriquée par la machine A)
   ($5\% = \dfrac{5}{100}$ est la probabilité que la lampe soit non valide sachant que lampe fabriquée par la machine A).
3) Calculer la probabilité que la "lampe fabriquée par la machine A sachant que la lampe est invalide "

Solution de l'exercice 2 :

1) a) Considérons les deux événements : A " la lampe est fabriquée par la machine A "
   I " la lampe est invalide"
   On a : X = A ∩ I donc : $P(X) = P(A \cap I) = P(A) \cdot P_A(I) = \dfrac{20}{100} \times \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{100}$
   b) On pose : B " la lampe est fabriquée par la machine B ", on a Y = B ∩ I alors :
   $P(Y) = P(B \cap I) = P(B) \cdot P_B(I) = \dfrac{30}{100} \times \dfrac{4}{100} = \dfrac{12}{1000}$

c) On pose : C " la lampe est fabriquée par la machine C ", on a Z = C ∩ I alors :
$P(Z) = P(C \cap I) = P(C) \cdot P_C(I) = \dfrac{50}{100} \times \dfrac{1}{100} = \dfrac{5}{1000}$

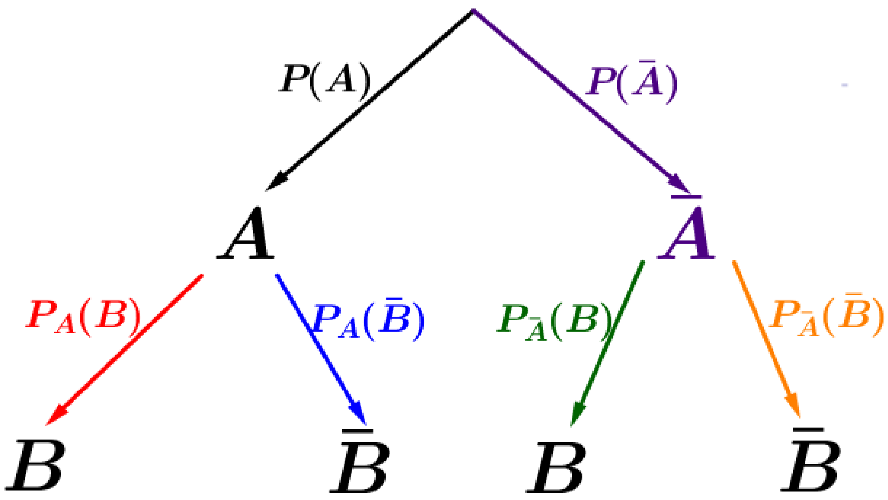
2) On a les événements A ; B et C formant une partition de Ω alors la probabilité de I " lampe est invalide " est :

$$P(I) = P_A(I) \cdot P(A) + P_B(I) \cdot P(B) + P_C(I) \cdot P(C) = \frac{1}{10} + \frac{12}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{27}{1000}.$$

3) La probabilité que "lampe fabriquée par la machine A sachant que la lampe est invalide " est :

$$P_I(A) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{27}{1000}} = \frac{10}{27}$$

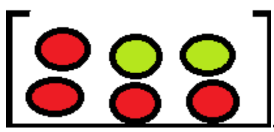
Arbre des possibilités :



13.3 Indépendance :

13.3.1 Indépendance de deux événements :

activité :

Une urne contient 4 **boules rouges** et deux **boules Vertes** : .
On tire successivement deux boule de l'urne. Considérons les deux événements :
R_1 " La première boule est rouge " et R_2 " La deuxième boule est rouge "
▷ Calculer $P(R_2)$ et $P_{R_1}(R_2)$ et comparer les deux dans les deux cas suivantes :

1) Le tirage est avec remis
2) Le tirage est sans remis

Solution de l'activité :

1) ▷ Puisque le tirage est avec remis alors : $P(R_2) = \dfrac{4}{6}$ (La boule tirée nous le retournons)

▷ La probabilité que la deuxième boule soit **rouge** sachant que la première est **rouge** est la même : $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{4}{6}$.

(Car la première boule tirée nous le retournons Sa couleur n'a pas d'importance).
On a donc : $P_{R_1}(R_2) = P(R_2)$ c'est à dire $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2)$ dans ce cas on dit que les deux événements R_1 et R_2 sont indépendants.

2) ▷ Considérons l'événement : $\bar{R_1}$ " La première boule n'est pas rouge ", on sait que les événements R_1 et $\bar{R_1}$ formant une partition de Ω alors :

$$P(R_2) = P_{R_1}(R_2) \times P(R_1) + P_{\bar{R_1}}(R_2) \times P(\bar{R_1}) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Car le tirage est avec remis (La boule tirée nous ne le retournons pas).

▷ $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{5}$. On remarque que : $P_{R_1}(R_2) \neq P(R_2)$ dans ce cas on dit que les deux événements
R_1 et R_2 ne sont pas indépendants c'est à dire : $P(R_1 \cap R_2) \neq P(R_1) \times P(R_2)$

Définition 13.10
On dit que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Théorème 13.5
Si $P(A) \neq 0$ alors : les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Exercice :

On lance un dé dont les six faces sont numérotées : $1;2;3;4;5;6$ deux fois successives considérons les événements suivants :
A " Obtenir le nombre 4 au premier lancer "
B " Obtenir deux nombres leur somme est égale à 7 "
C " Obtenir de nombre pairs "

1) Les deux événements A et B sont-ils indépendants ?
2) Les deux événements A et C sont-ils indépendants ?

13.3.2 Indépendance de deux expériences :

On sait que certains expériences il se constitué d'une expérience ou bien de plusieurs expériences par exemples :

(a) Si on lance une pièce  n fois successives : est une expérience aléatoire constitué de n expérience " lancement d'une pièce "

(b) Si on lance un dé  n fois successives : est une expérience aléatoire constitué de n expérience " lancement d'un dé "

(c) Tirage de n boules parmi m successivement avec remis : est est une expérience aléatoire constitué de n expérience " Tirage d'une boule "

(d) Tirage de n boules parmi m successivement et sans remis : est est une expérience aléatoire constitué de n expérience " Tirage d'une boule "

▷ On remarque que dans certains expériences : les résultats de l'une n'a aucune influence sur les résultats de l'autre par exemple : les expériences : (a) ; (b) et (c).

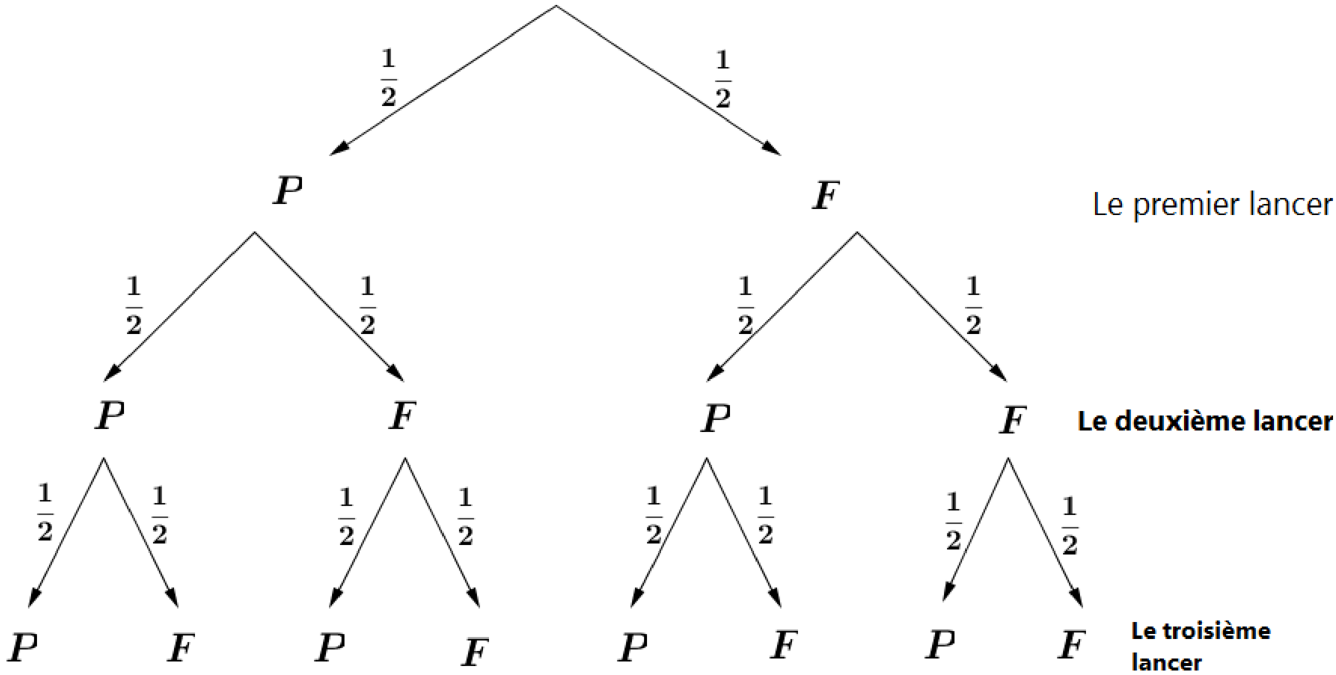
▷ et dans les autres expériences Il y a un effet sur les expériences par exemple (d).

Définition 13.11
On considère une expérience aléatoire constitué de deux expériences.
On dit que les deux expériences sont indépendantes lorsque les résultats de l'une n'a aucune influence sur l'autre .

Cas particulier : Les expériences répétés :

Exemple :

Si on lance une pièce  3 fois successives.
Calculons la probabilité de l'événement : A " Obtenir la face F deux fois exactement " :



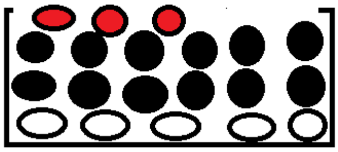
$$
\begin{aligned}
A &= \{FFP; FPF; PFF\} \\
P(A) &= P(FFP) + P(FPF) + P(PFF) \\
P(A) &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \\
&= 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3
\end{aligned}
$$

Proprieté 13.5
Soit A un événement tel que $P(A) = p$ dans une expérience aléatoire,
Si on répète cette expérience n fois alors la probabilité pour que A se réalise k fois exactement est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

Remarque :

Dans l'exemple on a : $n = 3$ et $k = 2$ et $p = \dfrac{1}{2}$ et $1 - p = \dfrac{1}{2}$ c-a-d : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_3^2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

Exercice 1 :



Une urne contient 5 boules blanches et 12 boules noires et 3 boules rouges.
On tire successivement avec remis 8 boules

▷ Quelle est la probabilité d'obtenir 6 boules blanches exactement. ?

13.4 Variables aléatoires - Loi de probabilité d'une variable aléatoire :

13.4.1 Activité :

On lance une pièce de monnaie équilibré deux fois ;

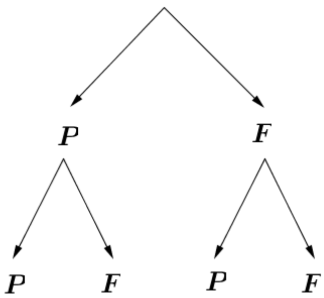
Nous gagnons **4** dirhams à chaque fois nous obtenons la face F  ,

et nous perdons **2** dirhams à chaque fois nous obtenons la face P  .

1) Donner l'arbre des possibilité et déterminer Ω l'univers de cette expérience.
2) Soit X Valeur de profit ou de la perte, quelle est les valeurs possible de X. ?

Solution de l'activité :

1) L'arbre des possibilités et l'univers Ω :



$\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$

2)
- Si on obtient $\{PP\}$  alors : $X = -4$,
- Si on obtient $\{PF\}$ ou $\{FP\}$  ou  alors : $X = 2$,
- Si on obtient $\{FF\}$  alors : $X = 8$,

X est appelée La variable aléatoire de cette expérience, on écrit : $X(\Omega) = \{-4; 2; 8\}$

X est la relation qui à chaque événement de Ω associé un nombre réel unique : $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$

Remarques :

♠ On écrit généralement $X(\Omega)$ sous la forme $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \cdots; x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

♠ L'événement (" X prend la valeur x_i ") sera noté par $(X = x_i)$

♠ $(X \leq x_i)$ c'est l'événement (" X prend des valeurs inférieurs ou égale à x_i ")

3 Soit x_i un élément de $X(\Omega)$ et soit l'événement $(X = x_i)$:
$(X = x_i)$ = (" à la fin de l'expérience, le joueur a obtenu x_i dirhams ")

a) Calculer $P(X = x_i)$ dans les cas suivantes : $X = -4$ et $X = 2$ et $X = 8$?

En effet : on a la pièce est équilibré donc on a **l'équiprobabilité**
on a $\Omega = \{PP;PF;FP;FF\}$ donc : $card(\Omega) = 4$
• Calcul de $P(X = -4)$: l'événement $(X = -4)$ est réalisé si on obtient $\{PP\}$ donc
$P(X = -4) = \dfrac{card(X = -4)}{card(\Omega)} = \dfrac{1}{4}$
• Calcul de $P(X = 2)$: l'événement $(X = 2)$ est réalisé si on obtient $\{PF\}$ ou $\{FP\}$ donc :
$P(X = 2) = \dfrac{card(X = 2)}{card(\Omega)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
• Calcul de $P(X = 8)$: l'événement $(X = 8)$ est réalisé si on obtient $\{FF\}$ donc :
$P(X = 8) = \dfrac{card(X = 8)}{card(\Omega)} = \dfrac{1}{4}$
Attention : Il faut que la somme des probabilité est égal à 1 : $P(X = -4) + P(X = 2) + P(X = 8) = 1$.

On peut résumé ceci dans un tableau :

x_i	-4	2	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Remarque :

Si on déterminer tout les valeurs de la variable aléatoire X et on calculé les probabilités des événements $(X = x_i)$ on dit qu'on a déterminer **La loi de la variable aléatoire** X_i et on écrit :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\cdots$	$P(X = x_n)$

$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

b) Déterminer la valeur des expressions suivants :

- $E(X) = -4 \cdot P(X = -4) + 2 \cdot P(X = 2) + 8 \cdot P(X = 8)$
- $E(X^2) = (-4)^2 \cdot P(X = -4) + 2^2 \cdot P(X = 2) + 8^2 \cdot P(X = 8)$
- $V(X) = E(X^2) - (E(x))^2$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$\triangleleft$ On a :

- $E(X) = -4 \cdot P(X = -4) + 2 \cdot P(X = 2) + 8 \cdot P(X = 8) = -4 \times \dfrac{1}{4} + 2 \times \dfrac{2}{4} + 8 \times \dfrac{1}{4} = 2.$
- $E(X^2) = (-4)^2 \cdot P(X = -4) + 2^2 \cdot P(X = 2) + 8^2 \cdot P(X = 8) = 16 \times \dfrac{1}{4} + 4 \times \dfrac{2}{4} + 64 \times \dfrac{1}{4} = 22.$
- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 22 - 2^2 = 18.$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$

13.4.2 Espérance mathématiques - Variance et écart type

Définitions 13.1
Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1; x_2; \cdots x_n$ c'est à dire :
$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \cdots; x_n\}$:

a) **L'espérance mathématique** de la variable aléatoire X noté $E(X)$ est :

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \cdots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Par exemple voir l'activité précédente.

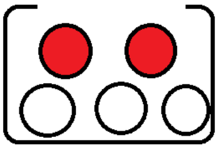
b) **La variance** de la variable aléatoire X noté $V(X)$ est :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \cdot P(X = x_i) - (E(X))^2$$

Par exemple voir l'activité précédente.

c) **L'écart type** de la variable aléatoire X noté $\sigma(X)$ est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exercice :

Une urne contient 3 boules blanches et deux boule rouges  **indiscernables** au toucher. On tire **simultanément** 3 boules de l'urne,
Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associé le nombre de boules blanches obtenu.

1) Déterminer $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X.
2) Déterminer la loi probabilité de la variable aléatoire X.
3) Calculer Espérance ; Variance et écart type de la variable aléatoire X.

Solution de l'exercice :

Puisque les boules sont **indiscernables** donc les tout les tirage sont supposé **équiprobables** :
• Le tirage est **simultané** alors chaque tirage est une combinatoire de 3 boules parmi 5, donc $card(\Omega) = C_5^3 = 10$,

1) Détermination de $X(\Omega)$: $(X = 3)$ c'est (" Le tirage de 3 boules blanches ") 
$(X = 2)$ c'est (" Le tirage de 2 boules blanches et une boule rouge ") 
$(X = 1)$ c'est (" Le tirage d'une boule blanche et 2 boules rouges ") 
Alors $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$

2) • Calcul de $P(X = 3)$:
L'événement $(X = 3)$ est réalisé si on tire 3 boules blanches parmi 3 boules blanches alors :
$$P(X = 3) = \frac{card(X = 3)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^3}{10} = \frac{1}{10}$$
• Calcul de $P(X = 2)$:
L'événement $(X = 2)$ est réalisé si on tire 2 boules blanches parmi 3 et une boule rouge parmi deux alors :
$$P(X = 2) = \frac{card(X = 2)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^2 \times C_2^1}{10} = \frac{3 \times 2}{10} = \frac{6}{10}$$

- Calcul de $P(X=1)$:
L'événement $(X=1)$ est réalisé si on tire une boule blanche parmi 3 et deux boules rouges parmi deux alors :
$$P(X=1)=\frac{card(X=1)}{card(\Omega)}=\frac{C_3^1\times C_2^2}{10}=\frac{3\times 1}{10}=\frac{3}{10}$$

Vérifions que : $\sum_{i=1}^{3}P(X=i)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{3}{10}+\frac{6}{10}+\frac{1}{10}=\frac{10}{10}=1$

3) Calculons Espérance ; Variance et écart type de la variable aléatoire X.

a) L'espérance mathématique $E(X)$:

$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_iP(X=x_i)=1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)+3\cdot P(X=3)=1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{6}{10}+3\cdot\frac{1}{10}=\frac{18}{10}$

b) La variance $V(X)$:

$E(X^2)=\sum_{i=1}^{3}(x_i)^2P(X=x_i)=1^2\cdot P(X=1)+2^2\cdot P(X=2)+3^2\cdot P(X=3)=1\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{6}{10}+9\cdot\frac{1}{10}=\frac{36}{10}=\frac{18}{5}$

et donc la variance est : $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{18}{5}-\frac{81}{25}=\frac{90-81}{25}=\frac{9}{25}$

c) L'écart type $\sigma(X)$: $\quad\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

13.4.3 Loi binomial :

Définition 13.12
Considérons une expérience aléatoire à deux issu. L'une qu'on appelle "sucée" et avec une probabilité p, et l'autre, l'événement contraire qu'on appelle "échec" avec une probabilité $1-p$.
On répète n fois cette expérience de façon indépendante et dans les mêmes conditions.
La variable aléatoire X associée aux épreuves répétées et qui donne le nombre de succès, est appelé **variable aléatoire binomiale** de paramètres n et p.
La loi de la variable aléatoire binomiale X est appelée **loi de probabilité binomiale**

Proprieté 13.6
- $X(\Omega)=\{0;1;\cdots;n\}$
- $k\in X(\Omega)$: $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$.
- **L'espérance mathématique :** $E(X)=n\cdot p$.
- **La variance :** $V(X)=n\cdot p(1-p)$.
- **L'écart type** : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n\cdot p(1-p)}$.

Exercice (Normal 2018)

Exercice 3 : (3 *points*)

*Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : **cinq boules rouges** portant les nombres 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 et **quatre boules blanches** portant les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 2.*

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

Soient les événements :

A :" les trois boules tirées sont de même couleur "

B :" les trois boules tirées portent le même nombre "

C :" les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même nombre "

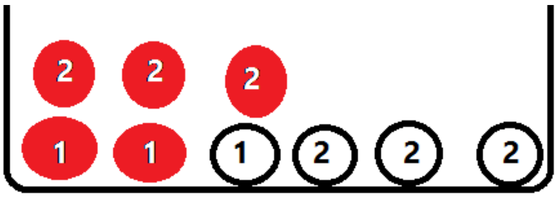
1,5 — **1.** *Montrer que* $p(A)=\frac{1}{6}$, $p(B)=\frac{1}{4}$ *et* $p(C)=\frac{1}{42}$.

2. *On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'événement A.*

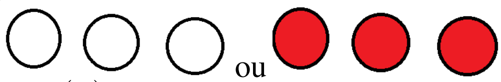
0,5 — **a)** *Déterminer les paramètres de la variable aléatoire binomiale X.*

1 — **b)** *Montrer que* $p(X=1)=\frac{25}{72}$ *et calculer* $p(X=2)$.

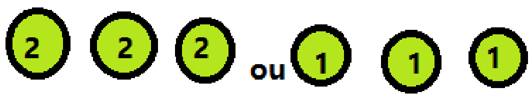
Solution de normal 2018 - Concentrez-vous sur l'exercice 2 :



1) L'expérience " Tirage simultané de 3 boules de l'urne "
   Soit Ω l'univers de cette expérience on a : $card(\Omega) = C_9^3 = 84$

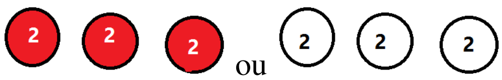
   A " Les trois boules tirées sont de même couleur " c-a-d : 

   Donc $card(A) = C_4^3 + C_5^3 = 4 + 10 = 14$ alors : $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$

   B " Les trois boules tirées portent le même numéro " c-a-d : 

   Donc $card(B) = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$ alors : $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$

   C " Les trois boule tirées sont de même couleur et portent le même numéro " c-a-d :



   Donc $card(C) = C_3^3 + C_3^3 = 1 + 1 = 2$ alors : $P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$

2) On répète l'expérience trois fois avec remis ....
   Considérons la variable aléatoire X qui égale au nombre de fois de la réalisation de l'événement A

a) On a X est une variable aléatoire de paramètres n et p avec :
n est le nombre de répétition de l'expérience : $n = 3$ et $p = P(A) = \frac{1}{6}$

b)

$$\begin{aligned} P(X=1) &= C_3^1\left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-1} = 3\times\frac{1}{6}\times\frac{25}{36} = \frac{25}{72} \\ P(X=2) &= C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2} = 3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6} = \frac{5}{72} \end{aligned}$$

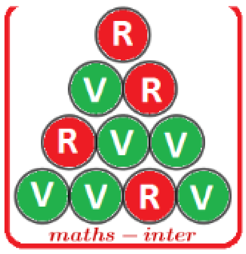
Rappel :

$$P(X=k) = C_n^k\left(\frac{1}{6}\right)^k \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{n-k}$$

13.4.4 Série des exercices :

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac 2016 – Ss1 .3

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher.
4 Boules rouges, 6 boules vertes (voir figure ci-contre)
On tire simultanément et au hasard 2 boules du sac.



1) On considère l'événement : A : « les deux boules tirées sont rouges »

Montrer que : $p(A) = \frac{2}{15}$.

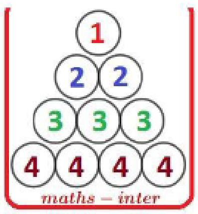
2) Soit X la variable aléatoire liant chaque tirage au nombre de boules rouges restantes dans le sac après le tirage des deux boules.

a) Montrer que l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire X est $\{2,3,4\}$.

b) Montrer que $p(X=3) = \frac{8}{15}$, puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac 2016 – Ss2 .3

Un sac contient 10 boules, indiscernables au toucher, portant les chiffres suivants :
1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 .
On considère l'expérience :
« On tire successivement et sans remise 2 boules du sac. »



1) Soit l'événement : A « les deux boules tirée portent chacune un nombre pair »

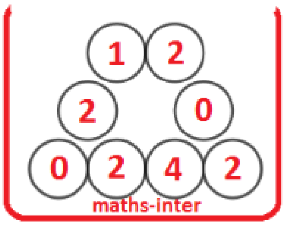
Montrer que : $p(A) = \frac{1}{3}$.

2) On répète l'expérience précédente 3 fois de suite sachant que les deux boules tirées sont remis dans le sac après chaque nouveau tirage .
Soit X la variable aléatoire égal au nombre de fois que l'événement A est réalisé.

Montrer que $p(X=1) = \frac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exercice .3 **Site : maths-inter.ma -Bac 2017 – Ss1** .3

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher. Chacune des 8 boules est marquée d'un nombre comme l'indique la figure ci-contre
On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.



1) **On considère les deux événements .**
A : « aucune des trois boules tirées ne porte le numéro 0 »
B : « le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égal à 8 »
Montrer que : $p(A)=\frac{5}{14}$ **et** $p(B)=\frac{1}{7}$.

2) **Soit** X **la variable aléatoire liant égal au produit des nombres portés par les trois boules tirées.**

a) **Montrer que** $p(X=16)=\frac{3}{28}$.

b) **Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de la variable aléatoire** X .
Copier ce tableau et compléter le sur la copie en justifiant les réponses.

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$				$\frac{3}{28}$

Exercice .3 **Site : maths-inter.ma -Bac 2017 – Ss2** .3

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher.
5 Boules blanches, 3 boules rouges et 2 boules vertes (voir figure ci-contre)
On tire simultanément et au hasard 4 boules du sac.

1) **On considère les deux événements.**
A : « parmi les quatre boules tirées une boule exactement est verte »
B : « parmi les quatre boules tirées trois boules exactement sont de même couleur »
Montrer que : $p(A)=\frac{8}{15}$ **et** $p(B)=\frac{19}{70}$.

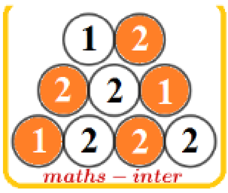
2) **Soit** X **la variable aléatoire liant chaque tirage au nombre de boules vertes tirées.**

a) **Montrer que** $p(X=2)=\frac{2}{15}$.

b) **Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire** X **et montrer que l'espérance mathématique** $E(X)$ **est égale à** $\frac{4}{5}$

Exercice .3 **Site : maths-inter.ma -Bac 2018 – Ss1** .3

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher :<u>cinq boules rouges</u> portant les nombres 2 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1 et <u>quatre boules blanches</u> portant les nombres 2 ; 2 ; 2 ; 1 .
On considère l'expérience suivante :
on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.



Soient les événements.
A : « les trois boules tirées sont de même couleur »
B : « les trois boules tirées portent le même nombre »
C : « les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même nombre »

1) **Montrer que :**
$p(A)=\frac{1}{6}$, $p(B)=\frac{1}{4}$ **et** $p(C)=\frac{1}{42}$.

2) **On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire** X **qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'événement A.**

a) **Déterminer les paramètres de la variable aléatoire binomiale** X .

b) **Montrer que** $p(X=1)=\frac{25}{72}$ **et calculer** $p(X=2)$.

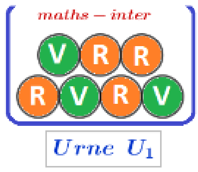
Exercice 3 — **Site : maths-inter.ma -Bac 2018 – Ss2**

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : trois boules rouges portant chacune le nombre 1 et trois boules rouges portant chacune le nombre 2 et six boules vertes portant chacune le nombre 2 .
On considère l'expérience suivante :
on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.
Soient les événements.
A : « les deux boules tirées portent le même nombre »
B : « les deux boules tirées sont de même couleur»
C : « les deux boules tirées portent des deux nombres dont la somme est 3 »

1) Montrer que : $p(A)=\frac{13}{22}$, $p(B)=\frac{6}{11}$ et calculer $p(C)$.
2) a) Montrer que $p(A\cap B)=\frac{3}{11}$
   b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3) Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité pour que les deux boules tirées portent le même nombre.

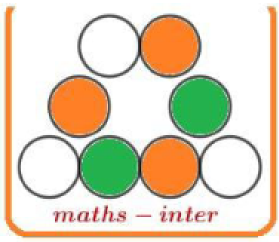
Exercice 3 — **Site : maths-inter.ma -Bac 2015 – Ss1 – Version A**

Une urne U_1 contient 7 boules indiscernables au toucher : 4 Boules rouges et 3 boules vertes
Une urne U_2 contient 5 boules indiscernables au toucher : 3 Boules rouges et 2 boules vertes
1) On considère l'expérience suivante :
On tire simultanément trois boules de l'urne U_1
On considère les deux événements :
A : « Obtenir une boule rouge et deux boules vertes »
B : « les trois boules tirées sont de même couleur »
Montrer que : $p(A)=\frac{12}{35}$ et $p(B)=\frac{1}{7}$.
2) On considère l'expérience suivante :
On tire simultanément deux boules de l'urne U_1, puis on tire une seule boule de l'urne U_2
Soit C l'événement :
« les trois boules tirées sont rouges »
Montrer que : $p(C)=\frac{6}{35}$



Exercice 3 — **Site : maths-inter.ma -Bac 2015 – Ss1 – Version B**

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher.
2 Boules blanches, 3 boules rouges et 3 boules vertes (voir figure ci-contre)
On tire successivement et sans remise 2 boules du sac.



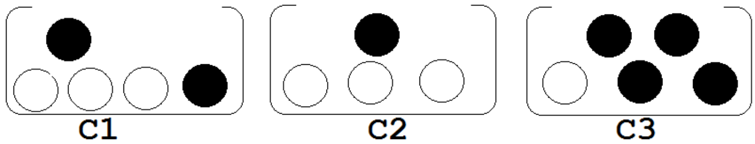
1) On considère les deux événements .
   A : « Obtenir une boule blanche au moins »
   B : « les deux boules tirées sont de même couleur »
Montrer que : $p(A)=\frac{13}{28}$ et $p(B)=\frac{1}{4}$.
2) Soit X la variable aléatoire égal au nombre de boules blanches tirées.
   a) Montrer que $p(X=2)=\frac{1}{28}$.
   b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Devoir libre 3 S_2

Exercice 1 (.... pts) Trois urnes C_1 ; C_2 et C_3 indiscernables :

C_1 Contient 3 boules blanches et deux boules noires.

C_2 Contient 3 boules blanches et une boule noire. C_3 Contient une boule blanche et 4 boules noires.



▷ On choisi une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

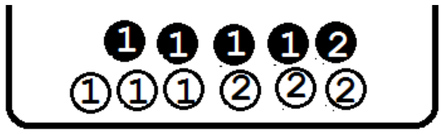
1) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ○ ?

2) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire ● (par deux méthodes).

3) Est que les deux événements : N :" obtenir une boule noire " et C_1 : " Choisir l'urne C_1 " sont indépendants ?

Exercice 2 (.... pts)

Une urne contient 5 boules noires numérotés $2;1;1;1;1$ et 6 boules blanches numérotés $2;2;2;1;1;1$.



On tire successivement et sans remis deux boules :

Calculer la probabilité des événements suivants :

I " Obtenir deux boules noires et la somme des nombres portés par les deux $= 2$ "

J " Obtenir deux boules noires sachant que la somme des nombres portés par les deux $= 2$ "

Exercice 3 (........... pts) On lance une pièce de monnaie équilibré deux fois ;

Nous gagnons **5** dirhams à chaque fois nous obtenons la face F ,

et nous perdons **2** dirhams à chaque fois nous obtenons la face P .

1) Déterminer Ω l'univers des possibilités.

2) Déterminer $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X.

3) Déterminer la loi probabilité de la variable aléatoire X.

4) Calculer Espérance $E(X)$; Variance $V(X)$ et écart type de la variable aléatoire X.

Exercice 4 (........... pts)

I) Dans une classe est composée de 6 filles et 9 garçons.

Le professeur voulait choisir 3 élèves pour faire un exposé.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A " Obtenir les élevés garçons uniquement ".

B " Obtenir au moins deux élevés filles ".

C " Obtenir deux élevés garçons exactement ".

II) Une urne contient 8 boules blanches et 4 boules noires et 6 boules rouges.

On tire successivement avec remis 10 boules

▷ Quelle est la probabilité d'obtenir 6 boules blanches exactement. ?

Exercice 5 (.... pts)

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac 2018 – Ss2 — .3

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : trois boules rouges portant chacune le nombre 1 et trois boules rouges portant chacune le nombre 2 et six boules vertes portant chacune le nombre 2 .
On considère l'expérience suivante :
on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.
Soient les événements.
A : « les deux boules tirées portent le même nombre »
B : « les deux boules tirées sont de même couleur»
C : « les deux boules tirées portent des deux nombres dont la somme est 3 »

1) Montrer que : $p(A)=\frac{13}{22}$, $p(B)=\frac{6}{11}$ et calculer $p(C)$.

2) a) Montrer que $p(A\cap B)=\frac{3}{11}$

b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3) Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité pour que les deux boules tirées portent le même nombre.

Exercice 6 (.... pts)

Exercice .2 — Site : maths-inter.ma -Bac 2018 – Ss1 — .2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0,-2,-2)$, $B(1,-2,-4)$, $C(-3,-1,2)$

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ et en déduire que $2x+2y+z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Soit la sphère (S) dont une équation est : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$
Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega(1,0,1)$ et pour rayon $R=5$.

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

b) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

4) Montrer que $d(\Omega,(ABC))=3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre.

Correction du devoir libre 3 :

Solution de l'exercice 1 :

1)

$$\begin{aligned}P(B) &= P_{C_1}(B)\times P(C_1)+P_{C_2}(B)\times P(C_2)+P_{C_3}(B)\times P(C_3)\\ &= \frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{15}=\frac{31}{60}\end{aligned}$$

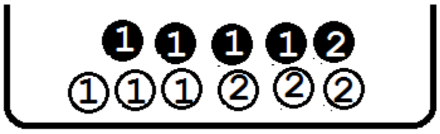
2)

$$\begin{aligned}P(N) &= P_{C_1}(N)\times P(C_1)+P_{C_2}(N)\times P(C_2)+P_{C_3}(N)\times P(C_3)\\ &= \frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}\\ &= \frac{2}{15}+\frac{1}{12}+\frac{4}{15}=\frac{29}{60}\end{aligned}$$

<u>2^{eme} Méthode</u> : On a : $N=\overline{B}$ donc : $P(N)=P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{31}{60}=\frac{29}{60}$

Exercice 2 (.... pts)

Une urne contient 5 boules noires numérotés $2;1;1;1;1$ et 6 boules blanches numérotés $2;2;2;1;1;1$.



On tire successivement et sans remis deux boules :
Calculer la probabilité des événements suivants :
I " Obtenir deux boules noires et la somme des nombres portés par les deux $= 2$ "
J " Obtenir deux boules noires sachant que la somme des nombres portés par les deux $= 2$ "

Solution de l'exercice 2 :

Tirage successivement et sans remis de 2 boules parmi 11 donc : $card(\Omega) = A_{11}^2 = 11 \times 10 = 110$
Considérons les événement : A : " Obtenir deux boules noirs "
B : " La somme des nombres portées par les deux boules obtenu est = 2 "
On a : $I = A \cap B$ donc : $card(I) = A_4^2 = 4 \times 3 = 12$ alors : $P(I) = \dfrac{card(I)}{card(\Omega)} = \dfrac{12}{110} = \dfrac{6}{55}$

et on a : $P(J) = P(A/B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{A_4^2}{A_{11}^2}}{\frac{A_7^2}{A_{11}^2}} = \dfrac{A_4^2}{A_7^2} = \dfrac{12}{42} = \dfrac{2}{7}$

Exercice 3 (........... pts)

On lance une pièce de monnaie équilibré deux fois ;

Nous gagnons **5** dirhams à chaque fois nous obtenons la face F ,

et nous perdons **2** dirhams à chaque fois nous obtenons la face P .

Soit X la variable aléatoire associée à la valeur de la profit ou de la perte

1) Déterminer Ω l'univers des possibilités.
2) Déterminer $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X.
3) Déterminer la loi probabilité de la variable aléatoire X.
4) Calculer Espérance $E(X)$; Variance $V(X)$ et écart type de la variable aléatoire X.

Solution de l'exercice 3 :

1) $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$
2) - L'événement : PP donne $-2-2=-4$
   - Les deux événements : PF et FP donnent $5-2=3$
   - L'événement : FF donne $5+5=10$ donc : $X(\Omega) = \{-4; 3; 10\}$
3) Déterminer la loi probabilité de la variable aléatoire X :
   c'est à dire déterminer la probabilité de toutes les valeurs de la variable X
   donc il faut calculer : $P(X=-4)$ et $P(X=3)$ et $P(X=10)$
   On a : $P(X=-4) = \dfrac{1}{4}$ et $P(X=3) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $P(X=10) = \dfrac{1}{4}$

4) $E(X) = -4P(X=-4) + 3P(X=3) + 10P(X=10)$

$$= -4 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} = 10 \times \frac{1}{4}$$

$$= -1 + \frac{3}{2} + \frac{10}{4} = 3$$

- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

  On a : $E(X^2) = (-4)^2 \times P(X=-4) + 3^2 \times P(X=3) + 10^2 \times P(X=10)$

  $$= \frac{16}{4} + \frac{9}{2} + \frac{100}{4} = \frac{67}{2}$$

  Donc : $V(X) = \frac{67}{2} - 3^2 = \frac{49}{2}$

- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

Exercice 4 (........... pts)

I) Dans une classe est composée de 6 filles et 9 garçons.

Le professeur voulait choisir 3 élèves pour faire un exposé.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A " Obtenir les élevés garçons uniquement ".

B " Obtenir au moins deux élevés filles ".

C " Obtenir deux élevés garçons exactement ".

II) Une urne contient 8 boules blanches et 4 boules noires et 6 boules rouges.

On tire successivement avec remis 10 boules

▷ Quelle est la probabilité d'obtenir 6 boules blanches exactement. ?

Solution de l'exercice 4 :

I) • Le choix simultané de 3 élevés parmi 15 donc : $card(\Omega) = C_{15}^3 = 455$

• L'événement : $A = \{GGG\}$ donc : $card(A) = C_9^3 = 84$ alors : $P(A) = \frac{84}{455}$

• L'événement : $B = \{FFG \; ou \; FFF\}$ donc :

$card(B) = (C_6^2 \times C_9^1) + C_6^3 = 155$ alors : $P(B) = \frac{155}{455} = \frac{31}{91}$

• L'événement : $C = \{GGF\}$ donc : $card(C) = C_9^2 \times C_6^1 = 36 \times 6 = 216$ alors : $P(C) = \frac{216}{455}$

II) On tire une boule, soit l'événement : D : " Obtenir une boule blanche "

On a : $p = P(D) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

On répète cette tirage (avec remis) 10 fois,

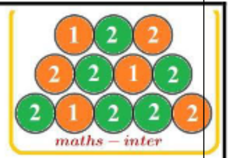
soit l'événement : $D = 6$: " Obtenir 6 boules blanches exactement"

On a : $P(D=6) = C_{10}^6 p^6 (1-p)^4 = C_{10}^6 \left(\frac{4}{9}\right)^6 \left(\frac{5}{9}\right)^4 =$

Exercice 5 (.... pts)

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac 2018 – Ss2 .3

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher :trois boules rouges portant chacune le nombre 1 et trois boules rouges portant chacune le nombre 2 et six boules vertes portant chacune le nombre 2 .
On considère l'expérience suivante :
on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.
Soient les événements.
A : « les deux boules tirées portent le même nombre »
B : « les deux boules tirées sont de même couleur»
C : « les deux boules tirées portent des deux nombres dont la somme est 3 »



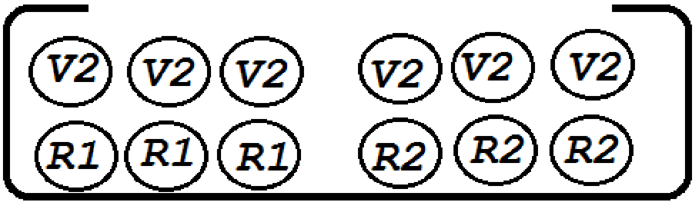
1) Montrer que : $p(A)=\frac{13}{22}$, $p(B)=\frac{6}{11}$ et calculer $p(C)$.

2) a) Montrer que $p(A\cap B)=\frac{3}{11}$

b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3) Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité pour que les deux boules tirées portent le même nombre.

Solution de l'exercice 5 :



R1: La boule est rouge est poté le nombre 1

On a tirage **simultané** de 2 boules parmi 12 donc : $card(\Omega)=C_{12}^{2}=66$

1) On a A : " Les deux boules tirées portent le même nombre " : 1 1 ou 2 2

Donc : $card(A)=C_3^2+C_9^2=3+36=39$ et $P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{39}{66}=\frac{13}{22}$

On a B : " Les deux boules tirées sont de même couleur " : V V ou R R

Donc : $card(B)=C_6^2+C_6^2=15+15=30$ et $P(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{30}{66}=\frac{5}{11}$

On a C : " Les deux boules tirées portent des deux nombres dont la somme est 3 " : 1 2

Donc : $card(C)=C_3^1\times C_6^1=3\times 6=18$ et $P(C)=\frac{card(C)}{card(\Omega)}=\frac{18}{66}=\frac{3}{11}$

2) On a $A\cap B$: " Les deux boules tirées portent le même nombre et de même couleur " :

R1 R1 ou R2 R2 ou V2 V2

Donc : $card(A\cap B)=C_3^2+C_3^2+C_6^2=3+3+15=21$ et $P(A\cap B)=\frac{card(A\cap B)}{card(\Omega)}=\frac{21}{66}=\frac{7}{22}$

b) On a : $P(A)\times P(B)=\frac{13}{22}\times\frac{5}{11}\neq P(A\cap B)=\frac{7}{22}$

Alors les deux événements A et B ne sont pas indépendants : car : $P(A)\times P(B)\neq P(A\cap B)$

3) Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité pour que les deux boules tirées portent le même nombre : c'est à dire : calculer $P(A/B)$

On a : $P(A/B) = \frac{A \cap B}{P(B)} = \frac{\frac{7}{22}}{\frac{5}{11}} = \frac{7}{10}$

Exercice 6 (.... pts)

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac 2018 – Ss1 .2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0,-2,-2)$, $B(1,-2,-4)$, $C(-3,-1,2)$

1) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et en déduire que $2x+2y+z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Soit la sphère (S) dont une équation est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$$

Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega(1,0,1)$ et pour rayon $R=5$.

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

b) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

4) Montrer que $d(\Omega,(ABC)) = 3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre.

Solution de l'exercice 6 :

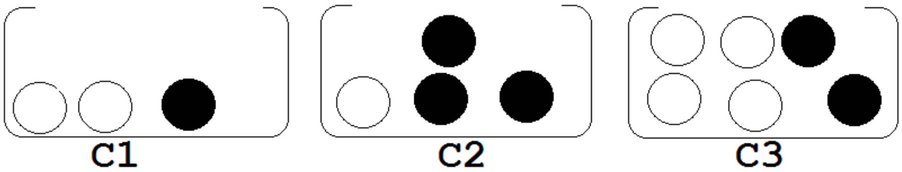
Devoir libre 2

Exercice 1 (4 pts) Trois urnes C_1 ; C_2 et C_3 indiscernables :

C_1 Contient 2 boules blanches et une boule noire.

C_2 Contient une boule blanche et 3 boules noires.

C_3 Contient 4 blanche et 2 boules noires.



▷ On choisi une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

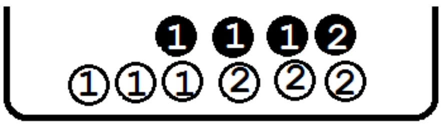
1) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ○ ? — 1.25

2) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire ● (par deux méthodes). — 1.75

3) Est que les deux événements :

N :" obtenir une boule noire " et C_1 : " Choisir l'urne C_1 " : sont indépendants ? — 1

Exercice 2 (3 pts) Une urne contient 4 boules noires numérotés $2;1;1;1$ et 6 boules blanches numérotés $2;2;2;1;1;1$. On tire successivement et sans remis deux boules :



Calculer la probabilité des événements suivants :

I" Obtenir deux boules noires et la somme des nombres portés par les deux $= 2$ "

J" Obtenir deux boules noires sachant que la somme des nombres portés par les deux $= 2$" — 3

Exercice 3 (5 pts) On lance une pièce de monnaie équilibré deux fois ;

Nous gagnons **3** dirhams à chaque fois nous obtenons la face F ,

et nous perdons **2** dirhams à chaque fois nous obtenons la face P .

1) Déterminer Ω l'univers des possibilités. — 0.5

2) Soit X la valeur de profit ou de la perte :

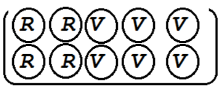
Déterminer $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X. — 0.75

3) Déterminer la loi probabilité de la variable aléatoire X. — 1.5

4) Calculer $E(X)$ l'espérance de X, puis calculer $V(X)$ Variance de X. — 2.25

Exercice 4 (4.5 pts)

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher. (4 boules rouge et 2 boules vertes)



On tire simultanément et au hasard 2 boules du sac.

1) On considère l'événement : A :" Les deux boules tirées sont rouges"

Montrer que $P(A) = \dfrac{2}{15}$ 2) Soit X la variables aléatoires liant chaque tirage au nombre de boules rouges restantes dans le sac après le tirage des deux boules.

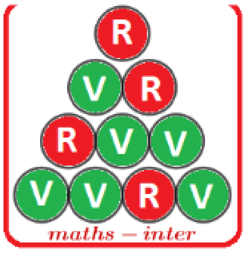
a) Montrer que l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire X sont : $\{2;3;4\}$

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Normal 2016

Exercice .3 **Site : maths-inter.ma -Bac 2016 – Ss1** .3

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher.
4 Boules rouges, 6 boules vertes (voir figure ci-contre)
On tire simultanément et au hasard 2 boules du sac.



1) On considère l'événement : A : « les deux boules tirées sont rouges »

Montrer que : $p(A)=\frac{2}{15}$.

2) Soit X la variable aléatoire liant chaque tirage au nombre de boules rouges restantes dans le sac après le tirage des deux boules.

a) Montrer que l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire X est $\{2,3,4\}$.

b) Montrer que $p(X=3)=\frac{8}{15}$, puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Solution : normal 2016

On a tirage simultané de 2 boules parmi 10 donc : $card(\Omega)=C_{10}^2=45$

1) Soit : A : " Les deux boules tirées sont rouges ", on a $card(A)=C_4^2=6$

et donc : $P(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}=\dfrac{6}{45}=\dfrac{2}{15}$

2)a) Soit X la variable aléatoire liant chaque tirage au nombre de boules rouges restantes dans le sac après le tirage des boules :

• On a les tirages possibles sont : **RR** ou **RV** ou **VV**

- L'événement : **RR** signifie que les deux boules tirées sont rouges, dans ce cas nombre de boules rouges restantes dans le sac est : 2 : donc : $X=2$

- L'événement : **RV** signifie que les deux boules tirées l'une est rouge l'autre est verte, dans ce cas nombre de boules rouges restantes dans le sac est : 3 : donc : $X=3$

- L'événement : **VV** signifie que les deux boules tirées sont vertes, dans ce cas nombre de boules rouges restantes dans le sac est : 4 : donc : $X=4$, alors : $X(\Omega)=\{2;3;4\}$

b) L'événement : $\{X=3\}$ est **RV** c'est à dire obtenir une boule rouge et une boule verte donc :

$card(X=3)=C_4^1\times C_6^1=4\times 6=24$ et donc : $P(X=3)=\dfrac{24}{45}=\dfrac{8}{15}$

- L'événement : $\{X=2\}$ est **RR** c'est à dire obtenir deux boules rouges donc :

$card(X=2)=C_4^2=6$ et donc : $P(X=2)=\dfrac{6}{45}=\dfrac{2}{15}$

- L'événement : $\{X=4\}$ est **VV** c'est à dire obtenir deux boules vertes donc :

$card(X=4)=C_6^2=15$ et donc : $P(X=2)=\dfrac{15}{45}=\dfrac{1}{3}$

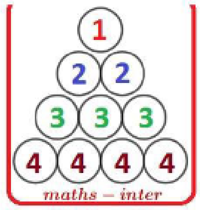
La loi de probabilité de X est :

k	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{3}$

Rattrapage 2016

Exercice .3 **Site : maths-inter.ma -Bac 2016 – Ss2** .3

Un sac contient 10 boules, indiscernables au toucher, portant les chiffres suivants :
1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 .
On considère l'expérience :
« On tire successivement et sans remise 2 boules du sac. »



1) Soit l'événement : A « les deux boules tirée portent chacune un nombre pair »

Montrer que : $p(A)=\frac{1}{3}$.

2) On répète l'expérience précédente 3 fois de suite sachant que les deux boules tirées sont remis dans le sac après chaque nouveau tirage .
Soit X la variable aléatoire égal au nombre de fois que l'événement A est réalisé.

Montrer que $p(X=1)=\frac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Solution rattrapage 2016 :

L'expérience : Tirage de successive et sans remis de 2 parmi 10 donc : $card(\Omega)=A_{10}^2=90$

1) Soit L'événement : A : " Les deux boules tirer portent chacune un nombre pair"
donc : card$(A)=A_6^2=30$ et donc : $P(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}=\dfrac{30}{90}=\dfrac{1}{3}$

2) On répète cette expérience 3 fois et soit X la variable aléatoire égal au nombre de fois que l'événement A est réalisé. donc $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

- $P(X=1)=C_3^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=3\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{4}{9}$
- $P(X=0)=C_3^0\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=1\times1\times\dfrac{8}{27}=\dfrac{8}{27}$
- $P(X=2)=C_3^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^1=3\times\dfrac{1}{9}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$
- $P(X=3)=C_3^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=1\times\dfrac{1}{27}\times1=\dfrac{1}{27}$

La loi de probabilité de X est :

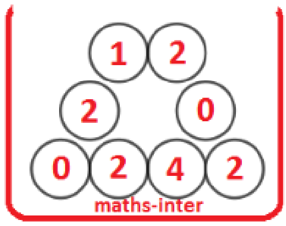
k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

Normal 2017

Exercice .3 **Site : maths-inter.ma -Bac 2017 – Ss1** .3

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher. Chacune des 8 boules est marquée d'un nombre comme l'indique la figure ci-contre

On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.



1) On considère les deux événements .

A : « aucune des trois boules tirées ne porte le numéro 0 »

B : « le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égal à 8 »

Montrer que : $p(A)=\frac{5}{14}$ et $p(B)=\frac{1}{7}$.

2) Soit X la variable aléatoire liant égal au produit des nombres portés par les trois boules tirées.

a) Montrer que $p(X=16)=\frac{3}{28}$.

b) Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Copier ce tableau et compléter le sur la copie en justifiant les réponses.

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$				$\frac{3}{28}$

Solution normal 2017

L'expérience : " Tirage simultané de 3 boule parmi 8 " donc : $card(\Omega)=C_8^3=56$

1) Les probabilité des événement A et B :

$$p(B)=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{C_4^3+C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{4}{56}=\frac{1}{7} \quad \text{et} \quad p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$$

2)a) Soit X la variable aléatoire liant égal au produit des nombres portés par les trois boules tirées.

$$p(X=16)=\frac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$$

b) La loi de probabilité de X :

Les valeurs possibles de X: $X(\Omega)=\{0,4,8,16\}$

On a: $p(X=0)=1-p(\overline{X=0})=1-\frac{C_6^3}{C_8^3}=1-\frac{20}{56}=\frac{36}{56}=\frac{9}{14}$

et: $p(X=4)=\frac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

et: $p(X=8)=\frac{C_4^3+C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$

et: $p(X=16)=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

et donc:

$X=x_i$	0	4	8	16
$p(X=x_i)$	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

Rattrapage 2017

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac 2017 – Ss2 — .3

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher.
5 Boules blanches, 3 boules rouges et 2 boules vertes (voir figure ci-contre)
On tire simultanément et au hasard 4 boules du sac.

1) On considère les deux événements.
A : « parmi les quatre boules tirées une boule exactement est verte »
B : « parmi les quatre boules tirées trois boules exactement sont de même couleur »
Montrer que : $p(A)=\frac{8}{15}$ et $p(B)=\frac{19}{70}$.

2) Soit X la variable aléatoire liant chaque tirage au nombre de boules vertes tirées.

a) Montrer que $p(X=2)=\frac{2}{15}$.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et montrer que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à $\frac{4}{5}$

Solution rattrapage 2017

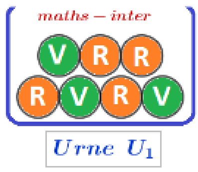
normal 2015

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac 2015 – Ss1 – Version A — .3

Une urne U_1 contient 7 boules indiscernables au toucher : 4 Boules rouges et 3 boules vertes
Une urne U_2 contient 5 boules indiscernables au toucher : 3 Boules rouges et 2 boules vertes

1) On considère l'expérience suivante :
On tire simultanément trois boules de l'urne U_1
On considère les deux événements :
A : « Obtenir une boule rouge et deux boules vertes »
B : « les trois boules tirées sont de même couleur »
Montrer que : $p(A)=\frac{12}{35}$ et $p(B)=\frac{1}{7}$.

2) On considère l'expérience suivante :
On tire simultanément deux boules de l'urne U_1, puis on tire une seule boule de l'urne U_2
Soit C l'événement :
« les trois boules tirées sont rouges »
Montrer que : $p(C)=\frac{6}{35}$

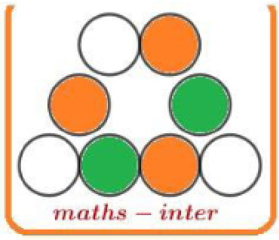


Solution normal 2015

normal 2015 - 2

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac 2015 – Ss1 – Version B .3

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher.
2 Boules blanches, 3 boules rouges et 3 boules vertes (voir figure ci-contre)
On tire successivement et sans remise 2 boules du sac.



1) On considère les deux événements .
   A : « Obtenir une boule blanche au moins »
   B : « les deux boules tirées sont de même couleur »

Montrer que : $p(A)=\frac{13}{28}$ et $p(B)=\frac{1}{4}$.

2) Soit X la variable aléatoire égal au nombre de boules blanches tirées.
   a) Montrer que $p(X=2)=\frac{1}{28}$.
   b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

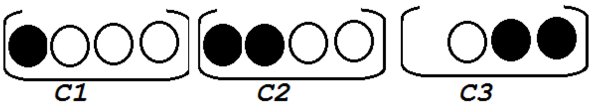
Solution normal 2015 - 2

Devoir surveiller 3 s2

Exercice 1 (4.5 pts) Trois urnes C_1 ; C_2 et C_3 indiscernables :

C_1 Contient 3 boules blanches et une boule noire. C_2 Contient 2 boules blanches et 2 boules noires.

C_3 Contient une blanche et 2 boules noires.



▷ On choisi une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ◯ ? 1.5

2) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire ● (par deux méthodes). 2

3) Est que les deux événements :

N :" obtenir une boule noire " et C_1 : " Choisir l'urne C_1 " : sont indépendants ? 1

Exercice 2 (5.5 pts) L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points : $A(2;1;3)$; $B(3;1;1)$ et $C(2;2;1)$.

et soit (S) la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$. 1

1)a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, en déduire que les points A ; B et C ne sont pas alignés. 0.25

b) Montrer que le plan $2x+2y+z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). 0.75

2) a) Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(1;-1;0)$ et que son rayon est 6.

b) Montrer que $d(\Omega;(ABC))=3$, en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C). 1

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC). 1

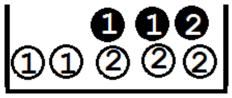
b) Montrer que le centre du cercle (C) est le point B. 1

4) Calculer l'aire du triangle ABC. 0.5

Exercice 3 (3 pts)

Une urne contient 3 boules noires numérotés $2; 1; 1$ et 5 boules blanches numérotés $2; 2; 2; 1; 1$.

On tire successivement et sans remis deux boules :



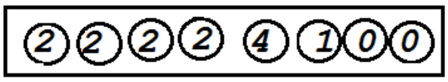
Calculer la probabilité des événements suivants :

I" Obtenir deux boules noires et la somme des nombres portés par les deux $= 2$ "

J" Obtenir deux boules noires sachant que la somme des nombres portés par les deux $= 2$" 3

Exercice 4 (7 pts)

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher. chacune des 8 boules est marquée d'un nombre comme l'indique la figure ci-contre.



On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

1) On considère les deux événements : A :" aucune des trois boules tirées ne porte le numéro 0 "

B : " le produit des nombres portés par les trois boules égal à 8 "

Montrer que $P(A) = \frac{5}{14}$ et $P(B) = \frac{1}{7}$ 2

2) Soit X la variables aléatoires liant égal au produit des nombres portés par les trois boules tirées.

a) Montrer que $P(X = 16) = \frac{3}{28}$

b) Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de la variable aléatoire X. 2

x_i	0	4	8	16
$P(X = x_i)$				$\frac{3}{28}$

Copier ce tableau et compléter le (en justifiant les réponses).

3) Calculer $E(X)$ l'espérance de la variable X. 2

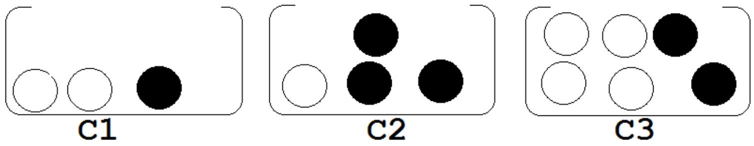
4) Soit C l'événement C " Les nombres portés sont pairs ". Calculer $P(C)$ 1

Devoir surveiller 3 S2 Modèle B

Exercice 1 (4.5 pts) Trois urnes C_1 ; C_2 et C_3 indiscernables :

C_1 Contient 2 boules blanches et une boule noire. C_2 Contient une boule blanche et 3 boules noires.

C_3 Contient 4 blanche et 2 boules noires.



▷ On choisi une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ◯ ? 1.5

2) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire ● (par deux méthodes). 2

3) Est que les deux événements :

N :" obtenir une boule noire " et C_1 : " Choisir l'urne C_1 " : sont indépendants ? 1

Exercice 2 (4.75 pts) L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points : $A(0;-2;-2)$; $B(1;-2;-4)$ et $C(-3;-1;2)$.

1)a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ 1

b) en déduire que $2x+2y+z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). 0.5

2) On considère la sphère (S) dont une équation est : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$

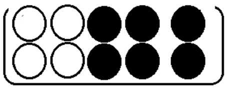
Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega(1;0;1)$ et pour rayon $R=5$. 0.75

3) a) Vérifier que : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) 0.5

passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC).

b) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) 0.75

4) Vérifier que : $d(\Omega;(ABC)) = 3$, puis montrer que la plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre. 1.25

Exercice 3 (4.5 pts) On lance une pièce de monnaie équilibré deux fois ;	
Nous gagnons **3** dirhams à chaque fois nous obtenons la face F	
et nous perdons **2** dirhams à chaque fois nous obtenons la face P	
1) Déterminer Ω l'univers des possibilités.	0.5
2) Soit X la valeur de profit ou de la perte :	
Déterminer $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X.	0.75
3) Déterminer la loi probabilité de la variable aléatoire X.	1.25
4) Calculer $E(X)$ l'espérance de X, puis calculer $V(X)$ Variance de X.	2
Exercice 4 (6.25 pts)	
Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher. (4 boules blanche et 6 boules noires)	
 On tire successivement et sans remis 2 boules du sac.	
1) On considère l'événement : A :” Les deux boules tirées sont noires”	
Montrer que $P(A) = \frac{1}{3}$	1
2) On répète l'expérience précédente 3 fois de suite sachant que les deux boules tirées sont remis dans le sac après chaque nouveau tirage.	
Soit X la variables aléatoires égal au nombre de fois que l'événement A est réalisé.	
a) Montrer $P(X = 1) = \frac{4}{9}$	0.75
b) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.	2
c) Calculer : $E(X)$ (l'espérance de X) et $V(X)$ (la variance de X).	1.25
3) Soit B l'événement : " Les deux boules tirées sont de couleurs différents ", calculer $P(B)$.	1.25

الصفحة
1
3
∂

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

المسالك الدولية

الدورة العادية 2022

-الموضوع-

FFFFFFFFFFFFFFFFFF

NS 29A

Royaume du maroc
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
Ministère de l'Education National
de l'Eseignement préscolaire & de spor
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⵓⵏⴰⵎⵓ
ⴷ ⵓⵙⵏⵎⵍⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	المعامل	7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	**Géométrie dans l'espace**	**3 points**
Exercice 2	**Nombres complexes**	**3 points**
Exercice 3	**Calcul de probabilités**	**3 points**
Problème	**Etude d'une fonction numérique, calcul intégral et suites numériques**	**11 points**

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z.
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien.

الصفحة 2 / 3	NS29A	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا -الدورة العادية 2022 -الموضوع :مادة الرياضيات -شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة و الأرض و مسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)

Exercice 1 : (3 points)

Soit l'espace rapporté au repère orthonormé direct$(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points :

$A(1;1;-1)$, $B(0;1;-2)$ et $C(3;2;1)$

0,5 1) a) Montrer : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ puis déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

0,5 b) Vérifier que l'aire du triangle ABC est : $S=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et déduire la distance de A à la droite (BC)

0,5 c) Vérifier que : $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(-1;0;1)$ et coupe le plan (ABC) suivant un cercle (C) de rayon $r=2$.

0,5 a) Montrer que le rayon de la sphère (S) est : $R=2\sqrt{3}$ puis déterminer une équation cartésienne de (S)

0,5 b) Montrer que le centre de (C) est le point $H(1;0;-1)$

0,5 c) Montrer que pour tout point $M(a;b;c)$ de (C) on a : $a^2+b^2+c^2=6$

Solution :

1) a) On a : $\overrightarrow{AB}(-1;0;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(2;1;2)$, alors :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-1&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&2\\-1&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&2\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$$

donc : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-0\vec{j}-\vec{k}=\vec{i}-\vec{k}$ c'est à dire : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;0;-1)$

On a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors les points A ; B et C ne sont pas alignés.

b) $S=\dfrac{||\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}||}{2}=\dfrac{\sqrt{1^2+0^0+(-1)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On a la droite (BC) passe par le point $B(0;1;-2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}(3;1;3)$ alors :

$d(A;(BC))=\dfrac{||\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}||}{||\overrightarrow{BC}||}=\dfrac{||\vec{i}-\vec{k}||}{\sqrt{3^2+1^2+3^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$

c) On a : $A\in(ABC)$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\perp(ABC)$ alors :

$$\begin{aligned}M(x:y:z)\in(ABC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0\\ &\Leftrightarrow 1(x-1)+0(y-1)-1(z+1)=0\\ &\Leftrightarrow x-1-z-1=0\\ &\Leftrightarrow x-z-2=0\end{aligned}$$

Donc : $(ABC): x-z-2=0$

2) a) Si le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle alors : R le rayon de la sphère est vérifier : $r^2=R^2-d^2$ avec $d=d(\Omega;(ABC))$ on a donc : $R=\sqrt{r^2+d^2}$

Calculons : $d=d(\Omega;(ABC))=\dfrac{|x_\Omega-z_\Omega-2|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{-1-1-2}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

Donc : $R=\sqrt{4+8}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Une équation de (S)

$$\begin{aligned} M(x;y;z)\in(S) &\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2+(z-1)^2=(2\sqrt{3})^2 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+z^2-2z+1=12 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-2z-10=0 \end{aligned}$$

b) H Le centre du cercle (C) est la projection orthogonal de Ω sur le plan (ABC),
Soit (Δ) la droite passant par Ω et $\perp$ (ABC) on a : $H=(ABC)\cap(\Delta)$
Déterminant la représentation paramétrique de (Δ), on a : (Δ) passe par $\Omega(-1;0;1)$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\perp(ABC)$ alors : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;0-1)$ est un vecteur directeur de (Δ) alors :

$$(\Delta)\begin{cases} x=-1+t \\ y=0 \qquad / \, t\in\mathbb{R} \\ z=1-t \end{cases}$$

$$H(x;y;z)\in(ABC)\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1+t \\ y=0 \\ z=1-t \\ x-z-2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1+t \\ y=0 \\ z=1-t \\ t=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases} \text{ alors : } H(1;0;-1)$$

c)

$$\begin{aligned} M(a;b;c)\in(C) &\Leftrightarrow (a-1)^2+b^2+(c+1)^2=r^2 \\ &\Leftrightarrow a^2-2a+1+b^2+c^2+2c+1=4 \\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=2+2a-2c \end{aligned}$$

	Exercice 2 : (3 points)
0,5	1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-6z+10=0$
	2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct$(O;\vec{u};\vec{v})$,on considère les points A et B d'affixes respectives $a=4$ et $b=3-i$. Soient z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M',image de M par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
0,25	a) Montrer que : $z'=-iz+4+4i$
0,5	b) Vérifier que l'affixe du point C l'image du point B par la rotation R est : $c=3+i$
0,25	c) En déduire la nature du triangle ABC
0,25	3) Soit $\boldsymbol{t}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et D l'image du point C par la translation $\boldsymbol{t}$. a) Déterminer d l'affixe du point .
0,5	b) En déduire la nature du quadrilatère$ABDC$.
0,25	4) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\lvert\bar{z}-3-i\rvert=\lvert 3+i\rvert$

Solution :

1) Résolvons l'équation : $z^2-6z+10=0$
On a : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times10=36-40=-4<0$
alors l'équation admet deux solutions non réels z_1 et z_2 avec
$z_1=\dfrac{-(-6)-i\sqrt{4}}{2}=\dfrac{6-4i}{2}=3-2i$ et $z_2=\bar{z}_1=3+2i$

2) a) Soit R la rotation : $R\left(A;-\frac{\pi}{2}\right)$, et soient : $M(z)$ et $M'(z')$ on a :

$$\begin{aligned} R(M)=M' &\Leftrightarrow z'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a) \\ &\Leftrightarrow z'-4=-i(z-a) \\ &\Leftrightarrow z'=-iz+4i+4 \end{aligned}$$

b) Soit $C=R(B)$ et soit $c=aff(C)$ on a :

$$\begin{aligned} R(B)=C &\Leftrightarrow c=-ib+4i+4 \\ &\Leftrightarrow c=-i(3-i)+4i+4 \\ &\Leftrightarrow c=3+i \end{aligned}$$

c) On a : $R(B)=C \Leftrightarrow \begin{cases} AB=AC \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc le triangle ABC est isocèle est rectangle en A.

3) a) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et soit $t(C)=D$

$$\begin{aligned} t(C)=D &\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow d-c=b-a \\ &\Leftrightarrow d=b-a+c \\ &\Leftrightarrow d=3-i-4+3+i=2 \end{aligned}$$

b) On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ alors le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme
et on a : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors : le quadrilatère $ABDC$ est un rectangle
et on a : $AB=AC$ alors le quadrilatère est un carré.

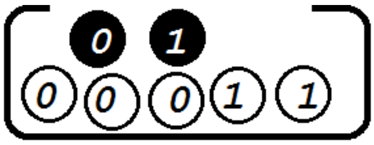
4) Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|\bar{z}-3-i|=|3+i|$

$$\begin{aligned} |\bar{z}-3-i|=|3+i| &\Leftrightarrow |\overline{\bar{z}-3-i}|=|3+i| \qquad (car : |\bar{z}|=|z|) \\ &\Leftrightarrow |z-3+i|=\sqrt{3^2+1^1} \\ &\Leftrightarrow |z-(3-i)|=\sqrt{10} \\ &\Leftrightarrow |z-b|=\sqrt{10} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points c'est le cercle de centre b et de rayon $\sqrt{10}$.

	Exercice 3 : (3 points)
	Une urne contient sept boules : 5 blanches portent les numéros 0; 0; 0; 1; 1 et 2 boules noires portent les numéros 0; 1 (indiscernables au toucher).
	On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.
1	1) On considère les événements suivants : A :'' Les deux boules tirées portent la même couleur '' B : ''Le produit des nombres tirées marqué sur les boules est nul'' Montrer que : $P(A)=\frac{11}{21}$ puis calculer $P(B)$.
	2) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage la somme des nombres marquée sur les deux boules tirées.
0,5	a) Montrer que : $X(\Omega)=\{0;1;2\}$
1,5	b) Montrer que : $P(X=0)=\frac{2}{7}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable X.

Solution :



On tire simultanément deux boules :

1) Soit l'événement A : " Les deux boules tirées portent la même couleur "
B " Le produit des nombres portés par les deux boules est = 0 "

A =  ou  donc : $card(A) = C_2^2 + C_5^2 = 1 + 10 = 11$

et on a : $card(\Omega) = C_7^2 = 21$ alors : $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{11}{21}$.

B = 0 0 ou 0 1 donc : $card(B) = C_4^2 + (C_4^1 \times C_3^1) = 6 + (4 \times 3) = 18$

alors : $P(B) = \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} = \dfrac{18}{21} = \dfrac{6}{7}$.

2) a) Pour les nombres portés par les deux boules tirées on a3 événements possibles :

0 0 ou 0 1 ou 1 1

- Pour le tirage : 0 0 On a : $X = 0 + 0 = 0$
- Pour le tirage : 0 1 On a : $X = 0 + 1 = 1$
- Pour le tirage : 0 0 On a : $X = 1 + 1 = 2$ alors : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

b) L'événement : $X = 0$ est : 0 0 donc :

$card(X = 0) = C_4^2 = 6$ donc : $P(X = 0) = \dfrac{card(X = 0)}{card(\Omega)} = \dfrac{6}{21} = \dfrac{2}{7}$

- L'événement : $X = 1$ est : 0 1 donc :

$card(X = 0) = C_4^1 \times C_3^1 = 12$ donc : $P(X = 1) = \dfrac{card(X = 1)}{card(\Omega)} = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$

- L'événement : $X = 2$ est : 1 1 donc :

$card(X = 0) = C_3^2 = 3$ donc : $P(X = 1) = \dfrac{card(X = 2)}{card(\Omega)} = \dfrac{3}{21} = \dfrac{1}{7}$

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Il faut vérifier que : $\dfrac{2}{7} + \dfrac{4}{7} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{7}{7} = 1$

الصفحة 3/3	NS29A	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا -الدورة العادية 2022 –الموضوع مادة الرياضيات –شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة و الأرض و مسلك العلوم الفيزيائية – خيار فرنسية	∂

Problème (11 points)

Partie I

Soient g et h deux fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - \ln(x)$ et $h(x) = x + (x-2)\ln(x)$.

0,75 1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ puis dresser le tableau de variations de g.

0,25 2) Montrer que : $(\forall x > 0) : g(x) \geq 0$

0,25 3) a) Vérifier que : $(\forall x > 0) : h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln(x)$

0,5 b) Montrer que : $(\forall x > 0) : (x-1)ln(x) \geq 0$ et déduire que : $(\forall x > 0) : h(x) > 0$

Partie II

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 1 + xln(x) - (\ln(x))^2$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(\|\vec{i}\| = 2cm)$

0,5 1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.

1 b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$. Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0,75 2) a) Montrer que : $(\forall x > 0) : f'(x) = \frac{h(x)}{x}$ puis dresser le tableau de variations de f.

0,25 b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

0,75 c) Montrer que f^{-1} est dérivable au point d'abscisse **e** et calculer $(f^{-1})'(e)$(remarquer que $f(e) = e$)

0,25 3) a) Montrer que C_f admet au point $A(1;1)$ une tangente (T) d'équation : $(T) : y = x$.

0,75 b) Montrer que : $(\forall x > 0) : f(x) - x = (\ln(x) - 1)g(x)$ puis déduire la position relative de C_f par rapport à la droite (T).

0,25 c) Montrer que C_f coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse α tel que : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$

1 d) Tracer C_f et (T) (On admettre que C_f admet un point d'inflexion d'abscisse compris entre 1 et 1,5)

4) On considère les intégrales suivants :$I = \int_1^e \ln(x)\,dx$; $J = \int_1^e (\ln(x))^2 dx$ et $K = \int_1^e x\ln(x)dx$

0,75 a) Montrer que : $L : x \to x(\ln(x) - 1)$ est une primitive de $l : x \to \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$ et déduire que : $I = 1$.

0,75 b) En utilisant une intégration par parties, calculer J et Montrer que : $K = \frac{e^2+1}{4}$.

0,5 c) Calculer l'aire de la partie limitée par C_f et les droites d'équations : $y = 0, x = 1$ et $x = e$

Partie III

On considère la suite définie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{e} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

0,5 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq e$

0,75 2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq \sqrt{e}$

0,5 3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite .

Solution :

Partie I :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{ln(x)}{x}\right) = +\infty$

car : $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}-\frac{ln(x)}{x}=1-0-0=1>0$. $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{x}=0\right)$

et $\lim_{x\to0^+} g(x)=+\infty$; car : $\lim_{x\to0^+} x-1=-1$ et $\lim_{x\to0^+} ln(x)=-\infty$, donc : $\lim_{x\to0^+} -ln(x)=+\infty$

La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$, (La somme des fonctions le sont).

$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	|	$-$	0	$+$	
g	| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) D'après le tableau des variations de la fonction g on a : $(\forall x>0)$: $g(x)\geq 0$

3) a)

$$\begin{aligned} h(x) &= x+(x-2)\ln(x) \\ &= x+(x-1)\ln(x)-\ln(x) \\ &= x-1-\ln(x)+1+(x-1)\ln(x) \\ &= 1+g(x)+(x-1)\ln(x) \end{aligned}$$

b) Si $0<x<1$ alors : $x-1<0$ et $\ln(x)<0$ alors : $(x-1)\ln(x)>0$
Si $x\geq$ alors : $x-1\geq 0$ et $\ln(x)\geq 0$ alors : $(x-1)\ln(x)\geq 0$
donc : $(\forall x>)0$: $(x-1)\ln(x)\geq 0$
On a : aussi : $(\forall x>)0$: $g(x)\geq 0$, alors : $(\forall x>)0$: $h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln(x)\geq 1>0$

Partie II :

1) a) Soit f la fonction définie par : $f(x)=1+x\ln(x)-(\ln(x))^2$
On a : $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ donc : $\lim_{x\to0^+}(\ln(x))^2=+\infty$ et donc : $\lim_{x\to0^+}-(\ln(x))^2=-\infty$ et on a :
$\lim_{x\to0^+} x\ln(x)=0$ alors : $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

b) Pour montrer que : $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)^2}{x}=0$ on peut montrer que : $\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{\ln(x)^2}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=0$
Pour ce la on pose : $t=\sqrt{x}$: si $x\to0^+$ alors : $t\to0^+$, et donc :
$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(t^2)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{2\ln(t)}{t}=2\times0=0$
On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x}+\ln(x)-\frac{\ln(x)^2}{x}\right)$
et on a : $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)^2}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ alors : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
et aussi : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\ln(x)-\frac{\ln(x)^2}{x}=+\infty$
et donc (C_f) la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2) a) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$, (la somme et le produit de fonction le sont), et :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(1+x\ln(x)-(\ln(x))^2\right)' \\
&= x'\ln(x)+x\ln'(x)-2\ln'(x)\ln(x) \\
&= \ln(x)+\frac{x}{x}-2\frac{\ln(x)}{x} \\
&= \frac{x\ln(x)+x-2\ln(x)}{x} \\
&= \frac{(x-2)\ln(x)+x}{x} \\
&= \frac{h(x)}{x}
\end{aligned}$$

On a $(\forall x>0) : h(x)>0$ alors : $(\forall x>0) : f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\|$ $\qquad$ $+$
f	$\|$ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

b) On a la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ (car elle est dérivable) et strictement croissante alors f admet une fonction réciproque f^{-1},
et f^{-1} définie sur : $J=f(]0;+\infty[)=]\lim\limits_{x\to 0^+} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$

c) On a : $f(e)=e$ et $f'(e)=\dfrac{e+(e-2)\ln(e)}{e}=\dfrac{2(e-1)}{e}\neq 0$ alors : f^{-1} est dérivable en $f(e)=e$
et : $(f^{-1})'(e)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(e))}=\dfrac{1}{f'(e)}=\dfrac{e}{2(e-1)}$

3) a) L'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point $A(1;1)$ est :
$(T) : y=f'(1)(x-1)+f(1)$ c-a-d $(T) : y=1(x-1)+1$ c-a-d : $(T) : y=x$
(car : $f'(1)=\dfrac{1+(1-2)\ln(1)}{1}=1$ et $f(1)=1+1\ln(1)-(\ln(1))^2=1$

b)

$$\begin{aligned}
f(x)-x &= 1+x\ln(x)-(\ln(x))^2-x \\
&= (\ln(x)-1)x+1-\ln^2(x) \\
&= (\ln(x)-1)x+(1-\ln(x))(1+\ln(x)) \qquad (car : a^2-b^2=(a-b)(a+b)) \\
&= (\ln(x)-1)\left[x-(1+\ln(x))\right] \\
&= (\ln(x)-1)(x-1-\ln(x)) \\
&= (\ln(x)-1)g(x)
\end{aligned}$$

Pour étudier les positions relatives de (C_f) et la droite $(T) : y=x$, il faut étudier le signe de $f(x)-x$, on a $(\forall x>0) : g(x)\geq 0$ alors le signe de $f(x)-x$ est ce lui de $\ln(x)-1$.

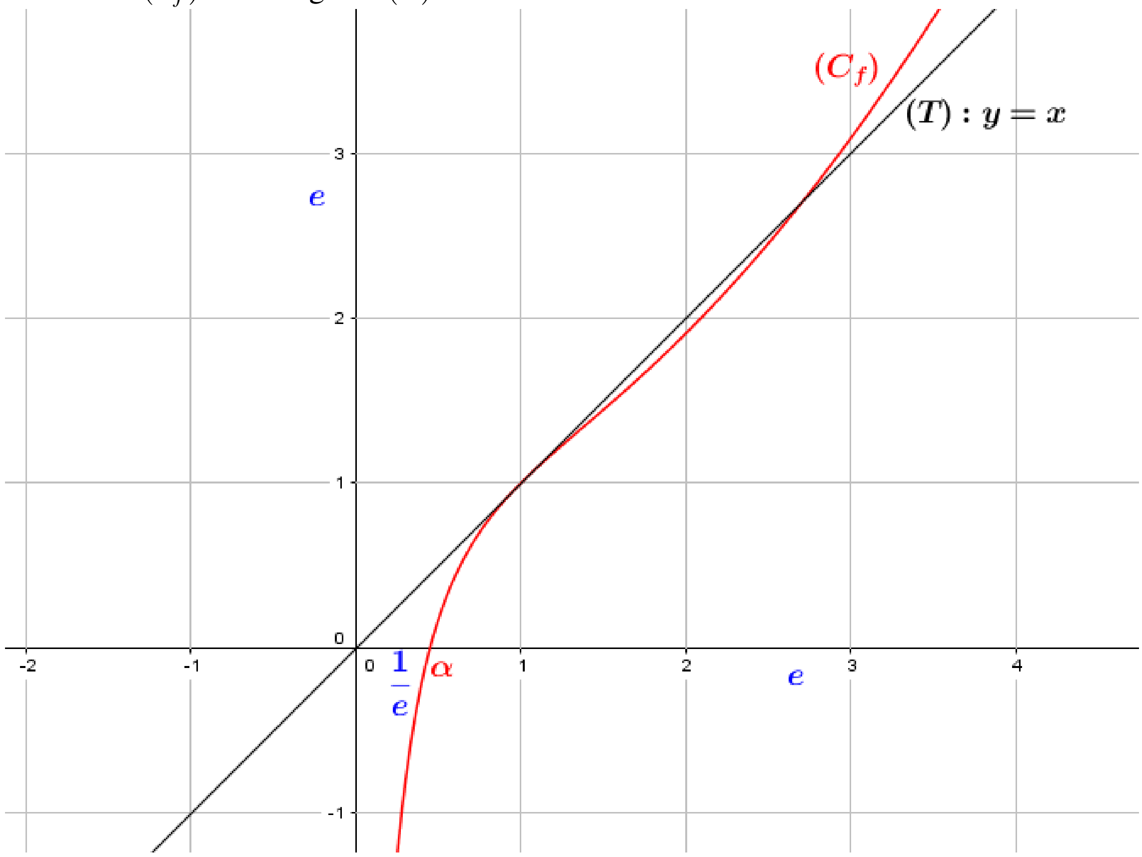
x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)-1$	$\|$	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$	$\|$	$-$	0	$-$	0	$+$	
Les positions relatives de (C_f) et (T)	$\|$	C_f est au dessous de (T)	$\|$	C_f est au dessous de (T)	$\|$	C_f est au dessus de (T)	

c) La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ en particulier sur $\left[\frac{1}{e};1\right]$, et :

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=1+\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)-\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2=1-\frac{1}{e}-1=-\frac{1}{e}<0 \quad \text{et} \quad f(1)=1>0 \text{ alors}$$

d'après le théorème des valeurs intermédiaire $(\exists\alpha\in]\frac{1}{e};1[)$: $f(\alpha)=0$ et comme la fonction f est strictement croissante alors α est unique.
c'est à dire que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse α.

d) La courbe (C_f) et la tangente (T) :



4 a) On pose : $L(x)=x\ln(x)-x$, on a : L est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :
$L'(x)=x'\ln(x)+x\ln'(x)-1=\ln(x)+1-1=\ln(x)$; donc L est une primitive de ln sur R_+^*
et donc : $I=\int_1^e \ln(x)dx=[x\ln(x)-x]_1^e=e-e-(0-1)=1$

b) En utilisant une intégration par partie calculons : $K=\int_1^e x\ln(x)dx$:

On pose : $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ donc :

$$\begin{aligned} K &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x}dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - 0 - \int_1^e \frac{1}{2}xdx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}x^2]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} \\ &= \frac{e^2+1}{4} \end{aligned}$$

• En utilisant une intégration par partie calculons : $J = \int_1^e \ln^2(x)dx$:

On pose : $\begin{cases} u'(x) = \ln(x) \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u(x) = x\ln(x) - x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ donc :

$$\begin{aligned} J &= [\ln(x)(x\ln(x) - x)]_1^e - \int_1^e \ln(x) - 1dx \\ &= 0 - 0 - [x\ln(x) - x - x]_1^e \\ &= -[(e - e - e) - (-1 - 1)] \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e |f(x)|dx(U.A) \\ &= \int_1^e f(x)dx \qquad\qquad (car f > 0 sur [1;e]) \\ &= \int_1^e 1 + x\ln(x) - (\ln(x))^2\, dx \\ &= [x]_1^e + \int_1^e x\ln(x)dx - \int_1^e (\ln(x))^2\, dx \\ &= e - 1 + K - J \\ &= e - 1 + \frac{e^2+1}{4} - (e-2) = 2e + 1 + \frac{e^2+1}{4} = \frac{e^2+8e+5}{4}cm^2 \end{aligned}$$

Partie II :

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \sqrt{e} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq U_n \leq e$
   - Pour $n = 0$ on a : $1 \leq U_0 = \sqrt{e} \leq e$
   - Supposons que : $1 \leq U_n \leq e$ et montrons que : $1 \leq U_{n+1} \leq e$
   On a f est croissante sur $]0;+\infty[$ donc croissante sur $[1;e]$ et comme : $1 \leq U_n \leq e$ alors $f(1) \leq f(U_n) \leq f(e)$ et donc : $1 \leq U_{n+1} \leq e$ (car : $f(1) = 1$; $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(e) = e$).
   donc d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq U_n \leq e$

2) On a $(\forall x \in [1;e]) : f(x) \leq x$ d'après la questions 3)b) partie II.
   et comme $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n \in [1;e]$ alors : $f(U_n) \leq U_n$ c'est à dire : $U_{n+1} \leq U_n$
   et donc la suite (U_n) est décroissante.
   donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n \leq U_0 = \sqrt{e}$
3) On a (U_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{e}$ donc convergente :

- f est continue sur $[1;e]$
- $f([1;e]) = [1;e] \subset [1;e]$
- La suite (U_n) est convergente :

donc la limite de (U_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$: donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e$
puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n \leq \sqrt{e}$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux et un problème, répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Équations différentielles et calcul intégral	2,5 points
Problème	Étude de fonctions numériques Suites numériques	8,5 points

- On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z et $|z|$ son module
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 || 3 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$. On considère les points $A(0;1;1)$, $B(1;2;0)$ et $C(-1;1;2)$

1. a Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}$ $(0,5)$

   a En déduire que $x+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) $(0,25)$
2. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1;1;2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$
   Déterminer une équation de la sphère (S) $(0,5)$
3. Montrer que (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A $(0,5)$
4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

   a Déterminer une représentation paramétrique de (Δ) $(0,25)$

   b Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées $(0,5)$

   c Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$, puis en déduire la distance $d\left(A,(\Delta)\right)$ $(0,5)$

Solution de l'exercice 1 :

1) a) On a : $\overrightarrow{AB}(1;1;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$, alors :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

donc : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \vec{i} - 0\vec{j} + \vec{k} = \vec{i} + \vec{k}$ c'est à dire : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;0;1)$

b) On a : $A \in (ABC)$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \perp (ABC)$ alors :

$$\begin{aligned} M(x:y:z)\in(ABC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0 \\ &\Leftrightarrow 1(x-0)+0(y-1)+1(z-1)=0 \\ &\Leftrightarrow x+z-1=0 \end{aligned}$$

Donc : $(ABC) : x+z-1=0$

2) Déterminons une équation de la sphère (S) de centre $\Omega(1;1;2)$ et de rayon : $R=\sqrt{2}$: on a :

$$\begin{aligned} M(x;y;z)\in(S) &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(\sqrt{2})^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-4z+4=2 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+4=0 \end{aligned}$$

C'est à dire : $(S) : x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+4=0$

3) On a : $d(\Omega;(ABC))=\dfrac{|x_\Omega+z_\Omega-1|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\dfrac{1+2-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=R$
donc le plan (ABC) coupe la sphère (S) en un seul point,
on a : $A\in(ABC)$, pour montrer que : $(ABC)\cap(S)=\{A\}$, il suffit de montrer que : $A\in(S)$
on a : $\Omega A=\sqrt{(0-1)^2+(1-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}=R$ donc $A\in(S)$,
et donc : $(ABC)\cap(S)=\{A\}$

4) a) On a : $(\Delta)\perp(ABC)$ et $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\perp(ABC)$, alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de (Δ)

et on a : $C\in(\Delta)$ alors : $(\Delta)\begin{cases} x=-1+t \\ y=1 \\ z=2+t \end{cases} \quad / \, t\in\mathbb{R}$

b) Montrons que : (Δ) coupe la sphère (S) en un seul point :
Méthode 1 :

$$M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(S)\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1+t \\ y=1 \\ z=2+t \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2 \end{cases}$$

Remplaçons x ; y et z dans la dernière équation on trouve :

$$\begin{aligned} t^2-4t+4+t^2=2 &\Leftrightarrow 2t^2-4t+2=0 \\ &\Leftrightarrow 2(t^2-2t+1)=0 \\ &\Leftrightarrow 2(t-1)^2=0 \\ &\Leftrightarrow t=1 \end{aligned}$$

Remplaçons t par 1 on trouve : $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$ et donc : $(\Delta)\cap(S)=D(0;1;3)$

Méthode 2 :
On a : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de (Δ) et on a : $C\in(\Delta)$ alors :
$d(\Omega;(\Delta))=\dfrac{||\overrightarrow{C\Omega}\wedge\vec{u}||}{||\vec{u}||}=\sqrt{2}=R$, donc (Δ) coupe la sphère (S) en un seul point.
Pour déterminer les cordonnées de cet point il faut utilisé la méthode 1.

c) On a ; $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$, donc : $\overrightarrow{AC}\cdot(\vec{i}+\vec{k}) = -1\times1+0\times0+1\times1 = 0$

$d(A;(\Delta)) = \dfrac{||\overrightarrow{CA}\wedge(\vec{i}+\vec{k})||}{||\vec{u}||} = \dfrac{||0\vec{i}-2\vec{j}+0\vec{k}||}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

Méthode 2 : On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot(\vec{i}+\vec{k}) = 0 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\perp(\vec{i}+\vec{k})\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\perp(\Delta)\end{aligned}$$

et donc C est le projeté orthogonale de A sur (Δ) et donc : $d(A;(\Delta)) = AC = \sqrt{2}$

Exercice 2 || 3 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = -1-\mathrm{i}\sqrt{3}$,le point B d'affixe $b = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

1. Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d = -2$ $(0,5)$
2. On considère la rotation R de centre D et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Montrer que l'affixe du point C image du B par la rotation R est $c = -4$ $(0,5)$
3. a Écrire le nombre $\dfrac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique $(0,5)$

   b En déduire que $\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)^2 = \dfrac{c-d}{b-d}$ $(0,5)$
4. Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2 , (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ')

   a Vérifier que $|z+2| = 2$ $(0,25)$

   b Prouver que $z+\bar{z} = -8$. Remarquer que $|z| = 4$ $(0,5)$

   c En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera $(0,25)$

Solution de l'exercice 2 :

1)

$$\begin{aligned}t(B) = D &\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA}\\ &\Leftrightarrow d-b = a\\ &\Leftrightarrow d = a+b\\ &\Leftrightarrow d = -1-i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow d = -2\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} C=R(B) &\Leftrightarrow c-d=e^{\frac{2\pi}{3}i}(b-d)\\ &\Leftrightarrow c+2=e^{\frac{2\pi}{3}i}(-1+i\sqrt{3}+2)\\ &\Leftrightarrow c=e^{\frac{2\pi}{3}i}(1+i\sqrt{3})-2\\ &\Leftrightarrow c=e^{\frac{2\pi}{3}i}(2e^{\frac{\pi}{3}i})-2\\ &\Leftrightarrow c=2e^{(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3})i}-2\\ &\Leftrightarrow c=2e^{\pi i}-2\\ &\Leftrightarrow c=-2-2=-4 \end{aligned}$$

3)

$$\frac{b-c}{a-c}=\frac{-1+i\sqrt{3}+4}{-1-i\sqrt{3}+4}=\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}=\frac{3^2+6\sqrt{3}i-3}{3^2+\sqrt{3}^2}=\frac{6+6\sqrt{3}i}{12}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

et

$$\frac{c-d}{b-d}=\frac{-4+2}{-1+i\sqrt{3}i+2}=\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}=\frac{-2}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}=-e^{-i\frac{\pi}{3}}=e^{i(\pi-\frac{\pi}{3})}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

On a : $(e^{i\frac{\pi}{3}})^2=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc : $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2=\frac{c-d}{b-d}$

4) a) $M\in(\Gamma)\Leftrightarrow DM=2\Leftrightarrow |z+2|=2$

b) $M\in(\Gamma')\Leftrightarrow OM=4\Leftrightarrow |z|=4$

On pose : $z=x+iy$ avec $x;y\in\mathbb{R}$ on a : $z+\bar{z}=2x$: donc il suffit de calculer : x.
on a : $|z|=4$ donc : $\sqrt{x^2+y^2}=4$ et donc : $x^2+y^2=16$ (*)
et : $|z+2|=2$ donc : $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2$ et donc : $(x+2)^2+y^2=4$ (**)
La différence : (*)−(**) donne : $x^2-(x+2)^2=12$ c-a-d : $-4x-4=12$ donc $x=-4$
d'où : $z+\bar{z}=2Re(z)=2x=-8$

c) Soit $M(z)$ et $z=x+iy$ avec : $x;y\in\mathbb{R}$ on a : $M(z)\in(\Gamma)\cap(\Gamma')\Leftrightarrow |z+2|=2$ et $|z|=4$ d'après : 4)b) on a : $x=-4$ et comme : $|z|=4$ et $|-4|=4$ alors : $y=0$ et par suite : $z=-4=c$ donc : $(\Gamma)\cap(\Gamma')=C(-4)$

Exercice 3 || 3 points

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher
On tire au hasard simultanément, trois boules de l'urne

1. Montrer que $p(A)=\frac{1}{6}$; où A est l'évènement : N'obtenir aucune boule rouge $(0,75)$
2. Calculer $p(B)$; où B est l'évènement : Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes $(0,75)$
3. Montrer que $p(C)=\frac{1}{2}$; où C est l'évènement : Obtenir exactement une boule rouge $(0,75)$
4. Calculer $p(D)$; où D est l'évènement : Obtenir au moins deux boules rouges $(0,75)$

Solution de l'exercice 3 :

1) On a : $A = \{\overline{R};\overline{R};\overline{R}\}$ donc : $card(A) = C_6^3 = 20$ et $card(\Omega) = C_{10}^3 = 120$,
donc : $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}$

2) On a : $B =$ "$\{B;B;B\}$ *ou* $\{V;V;V\}$" donc : $card(B) = C_3^3 + C_3^3 = 2$,
donc : $P(B) = \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} = \dfrac{2}{120} = \dfrac{1}{60}$

3) On a : $C = \{R;\overline{R};\overline{R}\}$ donc : $card(C) = C_4^1 + C_6^2 = 4 \times 15 = 60$,
donc : $P(C) = \dfrac{card(C)}{card(\Omega)} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$

4) On a : $D =$ "$\{R;R;\overline{R}\}$ *ou* $\{R;R;R\}$ donc : $card(D) = (C_4^2 \times C_6^1) + C_4^3 = (6 \times 6) + 4 = 40$,
donc : $P(D) = \dfrac{card(D)}{card(\Omega)} = \dfrac{40}{120} = \dfrac{1}{3}$

Exercice 4 || 2,5 points

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (x+1)e^x$$

1. a. Vérifier que $x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction h sur R ; puis calculer $I = \int_{-1}^{0} h(x)\, dx$ $(0,75)$
   b. A l'aide d'une intégration par parties calculer $J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^x\, dx$ $(0,75)$
2. a. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 0$ $(0,5)$
   b. Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$ $(0,5)$

Solution de l'exercice 4 :

1) a) On pose : $H(x) = xe^x$, la fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $(\forall x \in \mathbb{R})$:
$H'(x) = e^x + xe^e = (x+1)e^x = h(x)$: donc : H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
$I = \int_{-1}^{0} h(x)dx = [xe^x]_{-1}^{0} = e^{-1}$

b) En utilisant une intégration par partie calculons : $J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^x dx$:

On pose : $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = (1+x)^2 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 2(1+x) \end{cases}$ donc :

$$\begin{aligned} J &= \left[(x+1)^2 e^x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2(x+1)e^x dx \\ &= 1 - 2\int_{-1}^{0} (x+1)e^x dx \\ &= 1 - 2\int_{-1}^{0} h(x)dx \\ &= 1 - 2\times I \\ &= 1 - 2e^{-1} \end{aligned}$$

2) a) $(E) : y'' - 2y' + y = 0$, l'équation caractéristique de (E) est : $r^2 - 2r + 1 = 0$
on a : $\Delta = 0$ et $r = 1$ donc la solution générale est : $y = (\alpha x + \beta)e^x \ \alpha ; \beta \in \mathbb{R}$

b) on a : $y(0) = \beta$ et $y'(x) = \alpha e^x + (\alpha x + \beta)e^x$ donc : $y'(0) = \alpha + \beta$

$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$ et donc : $y(x) = (x+1)e^x = h(x)$

Problème || 8,5 points

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(e^{x/2} - 1\right)^2$
$(\mathscr{C}_f)$ est la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ (Unité :1cm)

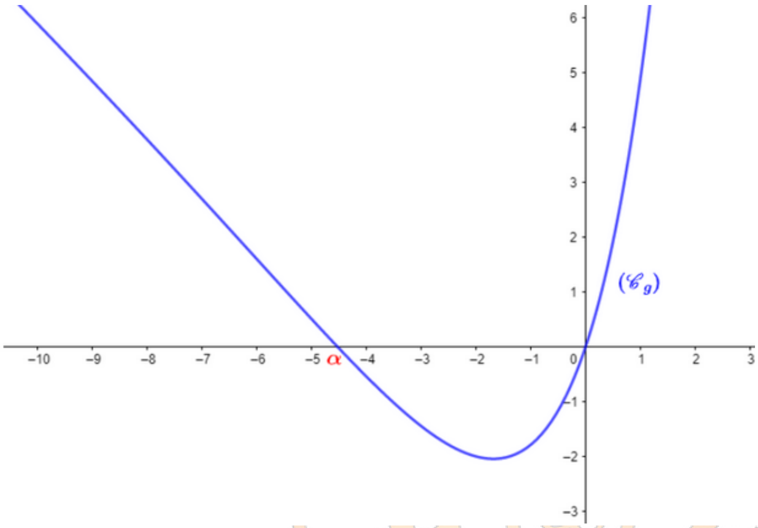
1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $(0,5)$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat $(0,5)$

3. a Montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ $(0,5)$
   b Étudier le signe de $\big(f(x) - x\big)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (Δ) $(0,75)$

4. a Montrer que $f'(x) = \left(e^{x/2} - 1\right)^2 + xe^{x/2}\left(e^{x/2} - 1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ $(0,5)$
   b Vérifier que $x\left(e^{x/2} - 1\right) \geqslant 0$ pour x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ $(0,5)$
   c Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ $(0,25)$

5. a Montrer que $f''(x) = \dfrac{1}{2}e^{x/2}g(x)$; où $g(x) = (2x+4)e^{x/2} - x - 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$ $(0,5)$
   b A partir de la courbe ci-contre de la fonction g , déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$. Remarquer que : $g(\alpha) = 0$ $(0,5)$
   c Étudier la concavité de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions $(0,5)$



6. Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
   On prend : $\ln(4) \approx 1,4$, $\alpha \approx -4,5$ et $f(\alpha) \approx -3,5$ (1)

7. a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ $(0,5)$
   b. Calculer $(f^{-1})'\left[\ln(4)\right]$ $(0,25)$

8. Soit (U_n) la suite numérique définie par :
   $$U_0 = 1 \text{ et } U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$
   a. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, 0 < U_n < \ln(4)$ $(0,5)$
   b. Montrer que la suite (U_n) est décroissante $(0,5)$
   c. En déduire que (U_n) est convergente $(0,25)$
   d. Calculer la limite de la suite (U_n) $(0,5)$

Solution du problème :

1) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   et : $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}(e^{\frac{x}{2}}-1)^2 = (0-1)^2 = 1 > 0$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^{\frac{x}{2}}-1)^2 = +\infty,$ car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$
   Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) a) On a : $f(x)-x = x(e^{\frac{x}{2}}-1)^2 - x = x(e^x-2e^x+1)-x = x(e^x-2e^{\frac{x}{2}}) = xe^x - 2xe^{\frac{x}{2}}$
   on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{x}{2}} = 0$ et donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x = 0$
   donc la droite d'équation : $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

   b)
$$\begin{aligned}
f(x)-x=0 &\Leftrightarrow x(e^x-2e^{\frac{x}{2}})=0\\
&\Leftrightarrow xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}-2)=0\\
&\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad e^{\frac{x}{2}}-2=0 \qquad (car: e^{\frac{x}{2}}>0)\\
&\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad e^{\frac{x}{2}}=2\\
&\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad \frac{x}{2}=\ln(2)\\
&\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad x=\ln(4)
\end{aligned}$$

Tableau des positions relatives de (Δ) et (C_f) :

x	$-\infty$		0		$\ln(4)$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{\frac{x}{2}}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Les positions relatives de (C_f) et (Δ)		C_f est au dessus de (Δ)	|	C_f est au dessous de (Δ)	|	C_f est au dessus de (Δ)	

4) a)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= x'(e^{\frac{x}{2}}-1)^2+x\cdot\left((e^{\frac{x}{2}}-1)^2\right)' \\
&= (e^{\frac{x}{2}}-1)^2+x\left[2\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)'(e^{\frac{x}{2}}-1)\right] \\
&= (e^{\frac{x}{2}}-1)^2+x\left[2\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)(e^{\frac{x}{2}}-1)\right] \\
&= (e^{\frac{x}{2}}-1)^2+xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}-1)
\end{aligned}$$

b) On a si : $x\leq 0$ alors : $e^{\frac{x}{2}}\leq 1$ donc : $e^{\frac{x}{2}}-1\leq 0$ et donc : $x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geq 0$

si : $x\geq 0$ alors : $e^{\frac{x}{2}}\geq 1$ donc : $e^{\frac{x}{2}}-1\geq 0$ et donc : $x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geq 0$

donc : $(\forall x\in\mathbb{R}) : x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geq 0,$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{\frac{x}{2}}-1$		$-$	0	$+$	
$xe^{\frac{x}{2}}-1$		$+$	0	$+$	

b) On a : $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2\geq 0$ et $x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geq 0$ et $e^{\frac{x}{2}}>0$

donc : $(\forall x\in\mathbb{R}) : f'(x)\geq 0$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) a)

$$\begin{aligned}
f''(x)=(f'(x))' &= \left[(e^{\frac{x}{2}}-1)^2+xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}-1)\right]' \\
&= \left[(e^{\frac{x}{2}}-1)^2+xe^{x}-xe^{\frac{x}{2}}\right]' \\
&= 2(e^{\frac{x}{2}}-1)'(e^{\frac{x}{2}}-1)+e^x+xe^x-e^{\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} \\
&= 2\times\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(2e^{\frac{x}{2}}2xe^{\frac{x}{2}}-2-x) \\
&= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(2e^{\frac{x}{2}}-2+2e^{\frac{x}{2}}+2xe^{\frac{x}{2}}-2-x\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}(4+2x)-x-4\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)
\end{aligned}$$

avec : $g(x) = (2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4$

b) D'après la courbe de g on a : le signe de $g(x)$:

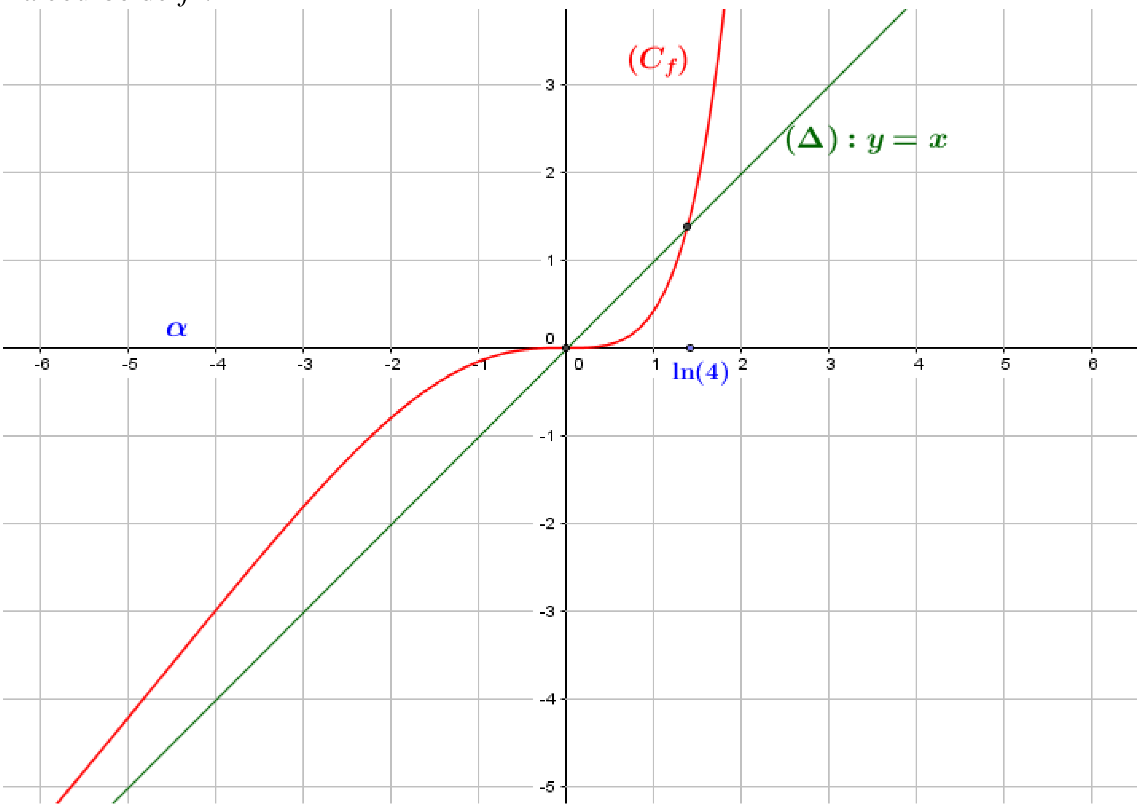
x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^{\frac{x}{2}} > 0$: donc le signe de $f''(x)$ est le même de $g(x)$ de $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
(C_f)		Convexe $\cup$	0	Concave $\cap$	0	Convexe $\cup$	

Donc : (C_f) est convexe sur $]-\infty;\alpha]$ et sur $[0;+\infty[$ et concave sur $[0;\alpha]$

6) La courbe de f :



7) a) f est continue sur $\mathbb{R}$ (le produit et la composée de fonctions le sont), et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: donc admet une fonction réciproque définie sur : $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

b) On a : $f(\ln(4)) = \ln(4)$ et $f'(\ln(4)) = 1 + 2\ln(4) \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en $\ln(4)$ et :

$$\left(f^{-1}\right)'(\ln(4)) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(\ln(4))\right)} = \frac{1}{f'(\ln(4))} = \frac{1}{1+2\ln(4)}$$

8) a) Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < \ln(4)$
- Pour $n = 0$ on a : $0 < U_0 = 1 < \ln(4)$: vraie pour $n = 0$
- Supposons que : $0 < U_n < \ln(4)$ et montrons que : $0 < U_{n+1} < \ln(4)$
on a la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0;\ln(4)[$ et donc :
$f(0) < f(U_n) < f(\ln(4))$ et donc : $0 < U_{n+1} < \ln(4)$
Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < \ln(4)$

b) D'après $3)b)$ on a : $(\forall x \in]0;\ln(4)[) : f(x) - x < 0$
et comme $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n \in]0;\ln(4)[$ alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) : f(U_n) - U_n < 0$
c'est à dire : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} - U_n < 0$ et donc la suite (U_n) est décroissante.

c) (U_n) est décroissante et minorée par 0 donc (U_n) est converge.

d) On a : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n \in I =]0;\ln(4)[$

- f est continue sur $]0;\ln(4)[$
- $f(]0;\ln(4)[) =]0;ln(4)[\subset]0;ln(4)[$
- la suite (U_n) est converge

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ est la solution de l'équation $f(x) - x = 0$ sur $]0;\ln(4)[$

D'après la question : 3)b) $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x = \ln(4)$

on a $U_0 = 1$ et la suite (U_n) décroissante alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq 1$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Examen rattrapage 2022

Exercice 1 (2.5 pts)	
Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}U_n + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$	
1) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $U_n > 1$	0.5
b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{\sqrt{2}-2}{2}(U_n - 1)$ et déduire que la suite (U_n) est décroissante et convergente.	0.75
2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $V_n = U_n - 1$	
a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.	0.5
b) Écrire U_n en fonction de n puis déduire la limite de la suite (U_n).	0.5
c) Calculer la somme : $S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{2021}$	0.25

Correction de l'exercice 1 :

1) a) Pour $n = 0$ on a : $U_0 = 2 > 1$
Supposons que $U_n > 1$ et montrons que $U_{n+1} > 1$, on a :

$$\begin{aligned} U_n > 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}U_n > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}U_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 \\ &\Rightarrow \quad U_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

Donc d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > 1$

b)

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{\sqrt{2}}{2}U_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} - U_n \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)U_n + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)(U_n - 1) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}-2}{2}\right)(U_n - 1) \end{aligned}$$

On a d'après la question a), $U_n - 1 > 0$ et $\dfrac{\sqrt{2}-2}{2} < 0$ donc : $U_{n+1} - U_n < 0$ et donc la suite (U_n) est décroissante et comme (U_n) est minorée alors elle est convergente.

2) On pose $V_n = U_n - 1$

a) On a : $V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}U_n + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} - 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}U_n + 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(U_n - 1)$

donc la suite (V_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 1 = 1$

b) On a (V_n) est une suite géométrique alors : $V_n = V_0 \times q^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

et on a : $V_n = U_n - 1$ donc : $U_n = V_n + 1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + 1$

et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0+1 = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0 \quad (-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1)$

c)

$$\begin{aligned}
S &= U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{2021} \\
&= (V_0+1) + (V_1+1) + (V_2+1) + \cdots + (V_{2021}+1) \\
&= V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{2021} + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{\textit{2022 fois}} \\
&= V_0 \left(\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2021+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) + 2022 \qquad (\ \textit{car la suite } (V_n) \textit{ est géométrique}). \\
&= \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2022}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2022
\end{aligned}$$

Exercice 2 (3 pts)	
Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les deux points $A(1;-1;1)$ et $B(5;1;-3)$.	
Soit (S) la sphère de centre $\Omega(3;0;-1)$ et de rayon $R=3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-2;1)$	
1) a) Calculer la distance ΩA	0.25
b) Montrer que les droites (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.	0.5
c) Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S)	0.25
2) Soit le point $M_a(2a-3;3-2a;a-1)$ où $a\in\mathbb{R}$, montrer que : $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ et déduire que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $a\in\mathbb{R}$.	0.5
3) a) Vérifier que : $2x-2y+z-9a+13=0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ)	0.5
b) Montrer que $d(\Omega;(P_a)) = \lvert 3a-6\rvert$	0.5
c) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S).	0.5

Correction de l'exercice 2 :

1) a) $\Omega A = \sqrt{(1-3)^2+(-1-0)^2+(1-(-1))^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$

b) On a $\vec{u}(2;-2;1)$ est un vecteur directeur de (Δ) et $\overrightarrow{\Omega A}(-2;-1;2)$ est un vecteur directeur de (ΩA) et on a : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{\Omega A} = 2\times -2 + (-2)\times -1 + 1\times 2 = 0$
donc : $\vec{u} \perp \overrightarrow{\Omega A}$ et donc : $(\Delta) \perp (\Omega A)$

c) On a : $A \in (\Delta)$ et $(A\Omega) \perp (\Delta)$ donc A est la projection orthogonale de Ω à (Δ) et donc : $d(A;(\Delta)) = A\Omega = 3 = R$, alors : (Δ) est tangente à la sphère (S), c-a-d coupe la sphère en un seul point.

2) On a : $\overrightarrow{AM_a}(2a-4;4-2a;a-2)$ et $(a-2)\vec{u}(2(a-2);-2(a-2);a-2) = \overrightarrow{AM_a}$
On a : $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (Δ) et $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ donc $\overrightarrow{AM_a}$ est aussi un vecteur directeur de (Δ) et comme $A \in (\Delta)$ alors $M_a \in (\Delta)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

3) a) (P_a) est passe par M_a et $\perp (\Delta)$ donc, $\vec{u}(2;-2;1)$ est un vecteur normal à (P_a) :
donc : $(P_a) : 2x-2y+z+d = 0$, pour déterminer la valeur de d : on a : $M_a \in (P_a)$

$$\begin{aligned} M_a \in (P_a) &\Leftrightarrow 2x_{M_a} - 2y_{M_a} + z_{M_a} + d = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(2a-3) - 2(3-2a) + a - 1 + d = 0 \\ &\Leftrightarrow 4a - 6 - 6 + 4a + a - 1 + d = 0 \\ &\Leftrightarrow d = 13 - 9a \end{aligned}$$

donc : $(P_a) : 2x-2y+z-9a+13 = 0$

b) $d(\Omega;(P_a)) = \dfrac{|2x_\Omega - 2y_\Omega + z_\Omega - 9a + 13|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \dfrac{|6-1-9a+13|}{3} = \dfrac{|18-9a|}{3} = |3a-6|$

c)

$$\begin{aligned} (P_a) \text{ est tangente à la sphère } (S) &\Leftrightarrow d(\Omega;(P_a)) = R \\ &\Leftrightarrow |3a-6| = 3 \\ &\Leftrightarrow 3a-6 = 3 \quad ou \quad 3a-6 = -3 \\ &\Leftrightarrow a = 3 \quad ou \quad a = 1 \end{aligned}$$

Exercice 3 (3 pts)	
Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A ; B et C d'affixes respectives : $Z_A = 1+5i$; $Z_B = 1-5i$ et $Z_C = 5-3i$	
1) Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$	0.25
2) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$.	
Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de B par h.	0.5
3) On considère la rotation R de centre C et d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, déterminer l'image de B par R	0.5
4) Soit F le point d'affixe $Z_F = -1+i$	
a) Vérifier que : $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$	0.25
b) En déduire que : $\overline{\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF}\right)} \equiv \pi[2\pi]$	0.5
c) Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et déduire la nature du triangle AEF	0.5
d) Déduire que les points A ; D ; E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.	0.5

Solution de l'exercice 3 :

1) $Z_D = \dfrac{Z_A + Z_C}{2} = \dfrac{1+5i+5-3i}{2} = \dfrac{6+2i}{2} = 3+i$

2) Soit $E(Z_E)$ limage de B par l'homothétie $h\left(A;\frac{1}{2}\right)$, on a :

$$\begin{aligned}
h(B)=E &\Leftrightarrow Z_E-Z_A=\frac{1}{2}(Z_B-Z_A)\\
&\Leftrightarrow Z_E=\frac{1}{2}(Z_B-Z_A)+Z_A\\
&\Leftrightarrow Z_E=\frac{1}{2}(1-5i-1-5i)+1+5i\\
&\Leftrightarrow Z_E=-5i+1+5i\\
&\Leftrightarrow Z_E=1
\end{aligned}$$

3) Soit $B'(Z_{B'})$ limage de B par la rotation $R\left(C;-\frac{\pi}{2}\right)$, on a :

$$\begin{aligned}
R(B)=B' &\Leftrightarrow Z_{B'}-Z_C=e^{i\frac{-\pi}{2}}(Z_B-Z_C)\\
&\Leftrightarrow Z_{B'}=e^{i\frac{-\pi}{2}}(Z_B-Z_C)+Z_C\\
&\Leftrightarrow Z_{B'}=-i(1-5i-5+3i)+5-3i\\
&\Leftrightarrow Z_{B'}=-i(-4-2i)+5-3i\\
&\Leftrightarrow Z_{B'}=4i-2+5-3i\\
&\Leftrightarrow Z_{B'}=3+i=Z_D
\end{aligned}$$

et donc : $R(B)=D$

4) a) On a :

$$\begin{aligned}
\frac{Z_D-Z_A}{Z_F-Z_A}\times\frac{Z_F-Z_E}{Z_D-Z_E} &= \frac{3+i-1-5i}{-1+i-1-5i}\times\frac{-1+i-1}{3+i-1}\\
&= \frac{2-4i}{-2-4i}\times\frac{-2+i}{2+i}\\
&= \frac{-4+2i+8i+4}{-4-2i-8i+4}\\
&= \frac{10i}{-10i}\\
&= -1
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AD}\right)}+\overline{\left(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF}\right)} &\equiv arg\left(\frac{Z_D-Z_A}{Z_F-Z_A}\right)+arg\left(\frac{Z_F-Z_E}{Z_D-Z_E}\right)[2\pi]\\
&\equiv arg\left(\frac{Z_D-Z_A}{Z_F-Z_A}\times\frac{Z_F-Z_E}{Z_D-Z_E}\right)[2\pi]\\
&\equiv arg(-1)[2\pi]\\
&\equiv \pi[2\pi]
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} &= \frac{1-(-1+i)}{1+5i-(-1+i)}\\ &= \frac{2-i}{2+4i}\\ &= \frac{i(-1-2i)}{2+4i}\\ &= -\frac{i}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Donc : $(EF) \perp (AF)$ alors le triangle AEF est rectangle en F.

d) $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1 \in \mathbb{R}$ alors les points A ; D ; E et F sont cocycliques et puisque la triangle AEF est rectangle en F alors $[AE]$ est un diamètre de ce cercle.

Exercice 4 (3 pts)	
Une urne contient trois boules blanches, quatre boules rouges et cinq boules vertes, indiscernable au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.	
1) On considère les événements suivants : A : " Obtenir exactement deux boules rouges " B : " Obtenir exactement une boule verte "	
a) Montrer que : $P(A) = \dfrac{12}{55}$ et $P(B) = \dfrac{21}{44}$	0.75
b) Calculer $P(A/B)$: la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé. Les événements A et B sont-ils indépendants ?	0.75
2) Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées	
a) Déterminer la loi de probabilité de X	1
b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes.	0.5

Solution de l'exercice 4 :

1) On a tirage simultané de 3 boules parmi 12 donc : $card(\Omega) = C_{12}^3 = 220$

a) A : " Obtenir exactement deux boules rouges " donc : $card(A) = C_4^2 \times C_8^1 = 6 \times 8 = 48$
alors : $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{48}{220} = \dfrac{12}{55}$
B : " Obtenir exactement une boule verte " donc : $crad(B) = C_5^1 \times C_7^2 = 5 \times 21 = 105$
alors : $P(B) = \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} = \dfrac{105}{220} = \dfrac{21}{44}$

b) On a : l'événement : $A \cap B$: "obtenir deux boules rouges et une boule verte"
alors : $card(A \cap B) = C_4^2 \times C_5^1 = 30$ et donc : $P(A \cap B) = \dfrac{30}{220} = \dfrac{3}{22}$

alors on a : $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{3}{22}}{\frac{21}{44}} = \dfrac{2}{7}$

2) a) On a : $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$, déterminons la loi de X : on a :

- $card(X=0) = C_7^3 = 35$ donc : $P(X=0) = \dfrac{35}{220} = \dfrac{7}{44}$

- $P(X=1) = \dfrac{card(X=1)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_5^1 \times C_7^2}{220} = \dfrac{105}{220} = \dfrac{21}{44}$
- $P(X=2) = \dfrac{card(X=2)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_5^2 \times C_7^1}{220} = \dfrac{70}{220} = \dfrac{7}{22}$
- $P(X=3) = \dfrac{card(X=3)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_5^3}{220} = \dfrac{10}{220} = \dfrac{1}{22}$

On a : $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

b) C : " Obtenir au moins deux boules vertes "
on a : $card(C) = C_5^2 \times C_7^1 + C_5^3 = 10\times 7 + 10 = 70+10 = 80$
alors : $P(C) = \dfrac{card(C)}{card(\Omega)} = \dfrac{80}{220} = \dfrac{4}{11}$

Problème (8.5 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^4(\ln(x)-1)^2 \ ; \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (Unité : $1cm$)	
1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$	0.75
2) a) Montrer que f est continue à droite en 0	0.5
b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement	0.5
3) a) Montrer que : $f'(x) = 2x^3(\ln(x)-1)(2\ln(x)-1)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$	0.75
b) Dresser le tableau de variations de f	0.5
4) a) Sachant que : $f''(x) = 2x^2(6\ln(x)-5)\ln(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0;+\infty[$	0.5
b) Déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexions dont on déterminera les abscisses	0.5
5) a) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on prend : $\sqrt{e} \simeq 1,6$ et $e^2 \simeq 7,2$)	1
b) En utilisant la courbe (C), déterminer le nombre de solutions de l'équation : $x^2(\ln(x)-1) = -1$	0.5
6) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(\|x\|)$	
a) Montrer que la fonction g est paire	0.5
b) Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$	0.5
7) a) On pose $I = \displaystyle\int_1^e x^4(\ln(x)-1)dx$, en utilisant une intégration par parties, montrer que $I = \dfrac{6-e^5}{25}$	0.5
b) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $h(x) = x^5(\ln(x)-1)^2$. Vérifier que : $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln(x)-1)$	0.5
c) Déduire que : $\displaystyle\int_1^e f(x)dx = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I$	0.5
d) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$	0.5

Solution du problème

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

On a : $\dfrac{f(x)}{x} = x^3(\ln(x)-1)^2$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2) a) On a : $f(x) = x^4(\ln(x)-1)^2 = x^2(x\ln(x)-x)^2$ alors : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$
car : $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$, donc f est continue à droite en 0.

b) On a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^3(\ln(x)-1)^2 = x(x\ln(x)-x)^2$ alors : $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$
car : $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ donc f est dérivable à droite en 0 et (C) admet une demi tangente horizontal en 0.

3) a)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^4(\ln(x)-1)^2)' \\
&= 4x^3(\ln(x)-1)^2 + x^4 \times 2 \times \frac{1}{x}(\ln(x)-1) \\
&= 4x^3(\ln(x)-1)^2 + 2x^3(\ln(x)-1) \\
&= 2x^3(\ln(x)-1)\,[2(\ln(x)-1)+1] \\
&= 2x^3(\ln(x)-1)\,[2\ln(x)-1]
\end{aligned}$$

b) Tableau des variations :

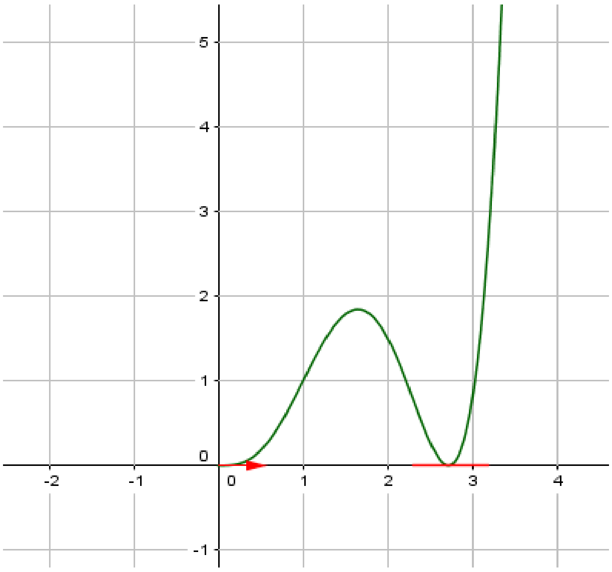
x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		e		$+\infty$
$\ln(x)$ - 1	|	$-$		$-$	0	$+$	
$2\ln(x)-1$	|	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f'(x)$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{e^2}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) $f''(x) = 2x^3(6\ln(x)-5)\ln(x)$, Tableau de signe de $f''(x)$:

x	0		1		$e^{\frac{5}{6}}$		$+\infty$
$\ln(x)$	|	$-$	0	$+$		$+$	
$6\ln(x)-5$	|	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$	|	$+$		$-$		$+$	
La concavité de C		C est convexe	$\bigwedge$	C est concave	$\bigwedge$	C est convexe	

b) On a : $f''(1) = f''\left(e^{\frac{5}{6}}\right) = 0$ et f'' change de signe en 1 et en $e^{\frac{5}{6}}$ alors les points $(1; f(1))$ et $\left(e^{\frac{5}{6}}; f(e^{\frac{5}{6}})\right)$ sont des points d'inflexions de (C)

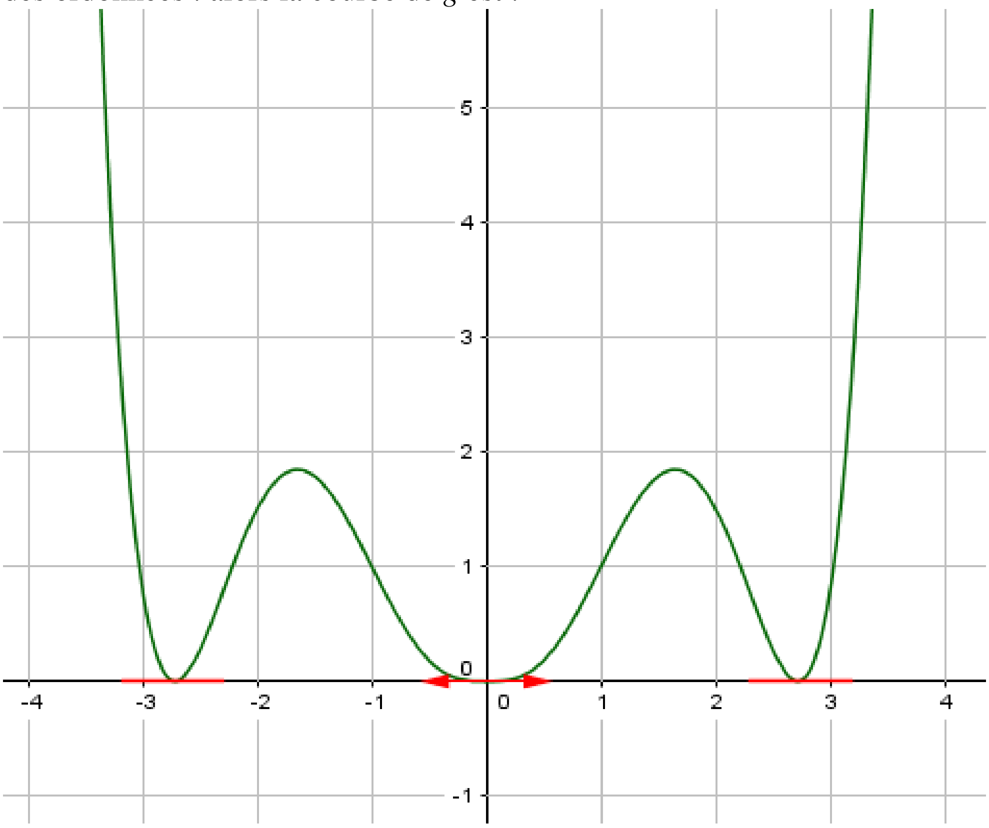
5) a) La courbe de f :



b) On a : $x^2(\ln(x)-1)=-1 \Leftrightarrow x^4(\ln(x)-1)^2=1 \Leftrightarrow f(x)=1$
D'après la courbe : (C) coupe la droite $y=1$ en trois points alors le nombre des solutions de l'équation est : 3.

6) a) On a : $D_g=\mathbb{R}$: $(\forall x\in\mathbb{R}) : -x\in\mathbb{R}$
et $(\forall x\in\mathbb{R}) : g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$ donc la fonction g est paire.

b) On a sur $]0;+\infty[$: $g(x)=f(x)$ et la fonction g paire alors (C_g) est symétrie par rapport à l'axe des ordonnées : alors la courbe de g est :



7) a) En utilisant une intégration par partie calculons : $I=\int_1^e x^4(\ln(x)-1)dx$:

On pose : $\begin{cases} u'(x) = x^4 \\ v(x) = \ln(x) - 1 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{x^5}{5} \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ donc :

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{5}x^5 \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{5}x^4 dx \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^e \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{e^5 - 1}{5} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{e^5 - 1}{25} \\ &= \frac{6 - e^5}{25} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x^5(\ln(x) - 1)^2)' \\ &= 5x^4(\ln(x) - 1)^2 + x^5 \times 2 \times \frac{1}{x}(\ln(x) - 1) \\ &= 5x^4(\ln(x) - 1)^2 + 2x^4(\ln(x) - 1) \\ &= 5f(x) + 2x^4(\ln(x) - 1) \end{aligned}$$

c) On a : d'après 7)b) : $f(x) = \frac{1}{5}h(x) - \frac{2}{5}x^4(\ln(x) - 1)$, donc :

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x)dx &= \frac{1}{5}\int_1^e h'(x)dx - \frac{2}{5}\int_1^e x^4(\ln(x) - 1)dx \\ &= \frac{1}{5}[h(x)]_1^e - \frac{2}{5}I \\ &= \frac{1}{5}\left[x^5(\ln(x) - 1)^2\right]_1^e - \frac{2}{5}I \\ &= -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I \end{aligned}$$

d) On a d'après la courbe (C) : $(\forall x \in]0;+\infty[) : f(x \geq 0)$ donc : $|f(x)| = f(x)$.
Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e |f(x)|dx \cdot (U.A) \\ &= \int_1^e f(x)dx \cdot cm^2 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{5}Icm^2 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{6 - e^5}{25} \\ &= \frac{2e^5 - 37}{125} \end{aligned}$$