

Correction du Devoir Surveillé N°1

Semestre I (2BAC)

www.coursfacile.com

Exo1:

$$\textcircled{1} A = \frac{\sqrt[3]{8} \sqrt{2^3} \sqrt{2}}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^3} \sqrt{2^3} \sqrt{2}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{2^{\frac{3}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{6}{3}}} = 2^{1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2} = 2^1 = 2$$

$$\textcircled{2} \left. \begin{array}{l} 10\sqrt{4} = 20\sqrt{4^2} = 20\sqrt{16} \\ 5\sqrt{6} = 20\sqrt{6^4} = 20\sqrt{1296} \\ 4\sqrt{5} = 20\sqrt{5^5} = 20\sqrt{3125} \end{array} \right\} 20\sqrt{3125} > 20\sqrt{1296} > 20\sqrt{16}$$

$$\boxed{4\sqrt{5} > 5\sqrt{6} > 10\sqrt{4}}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt[3]{x+5}-2} = \frac{0}{0} \text{ F.I}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt[3]{x+5}^2 + 2\sqrt[3]{x+5} + 2^2)}{(\sqrt[3]{x+5}-2)(\sqrt[3]{x+5}^2 + 2\sqrt[3]{x+5} + 2^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt[3]{x+5}^2 + 2\sqrt[3]{x+5} + 4)}{x+5-8}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt[3]{x+5}^2 + 2\sqrt[3]{x+5} + 4)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{x+5}^2 + 2\sqrt[3]{x+5} + 4 = \sqrt[3]{3+5}^2 + 2\sqrt[3]{3+5} + 4$$

$$= \sqrt[3]{8}^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4 = \sqrt[3]{2^3}^2 + 2\sqrt[3]{2^3} + 4 = 4 + 4 + 4 = \boxed{12}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+3x}}{-2x} = \frac{+\infty}{-\infty} \text{ F.I}$$

$$\sqrt[3]{1}$$

$$1$$

$$|-2|$$

$$2$$

factorisation par α

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+3x} = +\infty \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty \end{array} \right.$$

Conjugue

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{3x}{x^3}\right)} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2}} - 2x \quad (*)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2}} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2}} - 2 \right) = -\infty$$

car

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2}} - 2 = \sqrt[3]{1 - 2} = 1 - 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

⑧ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-1} = \frac{-2}{0}$

Tableau de signe

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+

on a $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{x-1} - 2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-1} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-1} = -\infty$$

EX 02: $f(x) = -2x^3 - 4x + 2$

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 - 4x + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 - 4x + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$

② on a f dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -6x^2 - 4 = -(\underbrace{6x^2 + 4}_{>0}) < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

$$f(x) = 0 \quad x \in [0, 1]$$

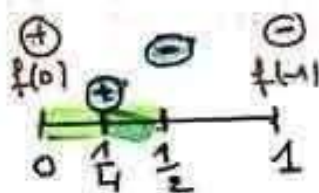
*) on a f continue sur $\mathbb{R}$ (car f est polynôme)
et on a $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, Donc f est continue sur $[0, 1]$

**) on a f est strictement décroissante sur $[0, 1]$

$$\dots) \left. \begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(1) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \times f(1) < 0$$

d'où; et d'après T.V.I, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [0, 1]$

(4) on a $x \in [0, 1]$



(*) Le centre de $[0, 1]$ est: $\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$
 $f(\frac{1}{2}) = -2 \times (\frac{1}{2})^3 - 4 \times \frac{1}{2} + 2 = -\frac{1}{4} < 0$ et on a $f(0) > 0$
 d'où: $f(0) \times f(\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow x \in [0, \frac{1}{2}]$

L'amplitude de $[0, \frac{1}{2}]$ est: $\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} = 0.5$

(**) Le centre de $[0, \frac{1}{2}]$ est: $\frac{\frac{1}{2} + 0}{2} = \frac{1}{4}$
 $f(\frac{1}{4}) = -2 \times (\frac{1}{4})^3 - 4 \times \frac{1}{4} + 2 = -2 \times (\frac{2}{4})^3 + 2 = \frac{31}{32} > 0$
 Donc on a $f(\frac{1}{4}) < 0 \Rightarrow f(\frac{1}{4}) \times f(\frac{1}{2}) < 0$

D'où $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

L'amplitude de $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ est: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\text{donc } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$$

(5) $(2x-1) \times f(x) = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0$ ou $f(x) = 0$
 $\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = \alpha$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, \alpha \right\}$$

⑥ $f'(d) = \frac{-6+8d}{d}$

$f'(x) = -6x^2 - 4 = 0 \Rightarrow f'(d) = -6d^2 - 4$

on a $f(d) = 0 \Rightarrow -2d^3 - 4d + 2 = 0$

$\Rightarrow -2d^3 = 4d - 2 \Rightarrow d^3 = \frac{4d-2}{-2}$

$\Rightarrow d^3 = \frac{2d-1}{-1} \Rightarrow d^3 = \frac{1-2d}{1}$

$\Rightarrow d^2 = \frac{1-2d}{d}$

Donc $f'(d) = -6\left(\frac{1-2d}{d}\right) - 4$

$= \frac{-6 + 12d - 4d}{d} = \frac{-6 + 8d}{d}$

Donc $f'(d) = \frac{-6+8d}{d}$

EX 03

$f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$

① $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \geq 0\} = [1, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x-1} = +\infty - \infty$ F.I

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x^2} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2x \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}\right)$

Car: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = 1$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

② on a $Df = [1, +\infty[$

on a $f(x) = \underbrace{x}_{Df} - \underbrace{2\sqrt{x-1}}_{Df}$

$\sqrt{g} \rightarrow 0 \text{ I}$

g continu
et $g > 0$

• $x \rightarrow x$ est continue sur $\mathbb{R}$ ($[1, +\infty[\subset \mathbb{R}$) donc

est continue sur $[1, +\infty[$

• $x \rightarrow x-1$ continue et positif sur $[1, +\infty[$

d'où $x \rightarrow \sqrt{x-1}$ continue sur $[1, +\infty[$

donc $x \rightarrow -2\sqrt{x-1}$ continue sur $[1, +\infty[$

g con I
d g con I

Alors f est continue sur $[1, +\infty[$

$f(1) = 1$

③ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2\sqrt{x-1} - 1}{x - 1}$

$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1 - 2\sqrt{x-1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - \frac{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}{(x-1)\sqrt{x-1}}$

$= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - \frac{2(x-1)}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - \frac{2}{\sqrt{x-1}} = -\infty$

on a $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1

interprétation géométrique

$(\mathcal{C}_f)$ admet une Demi-tangente verticale au point $A(1, 1)$
Dirigée vers le bas

4) a/ on a f est dérivable sur $]1, +\infty[$

$$f'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{(x-1)'}{\sqrt{x-1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$(\sqrt{g})' = \frac{g'}{2\sqrt{g}} \quad (5)$$

$$= \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1)}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} + 1)}$$

$$= \frac{x-1-1}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{(x-2)}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)}$$

b/ on a $\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1) > 0$

www.coursfacile.com

Donc Le signe de $f'(x)$ est le signe de $x-2$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

x	1	2	+
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	1	0	$+\infty$

$$D_f = [1, +\infty[$$

$$f(2) = 2 - 2\sqrt{2-1} = 2 - 2 = 0$$

5) L'équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ en 5 :

on a f est dérivable sur $]1, +\infty[$
et $5 \in]1, +\infty[$ donc f est dérivable en 5

$$y = \underbrace{f'(5)} (x-5) + \underbrace{f(5)}$$

$$\bullet) f(5) = 5 - 2\sqrt{5-1} = 5 - 2 \times 2 = 1$$

$$\bullet) f'(5) = \frac{5-2}{\sqrt{5-1}(\sqrt{5-1}+1)} = \frac{3}{2(2+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } y = \frac{1}{2}(x-5) + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} + 1$$

$$\text{Donc } \boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{6} (\sqrt{x-1} - 1)^2 &= x - \cancel{x} - 2\sqrt{x-1} + \cancel{1} \\ &= x - 2\sqrt{x-1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

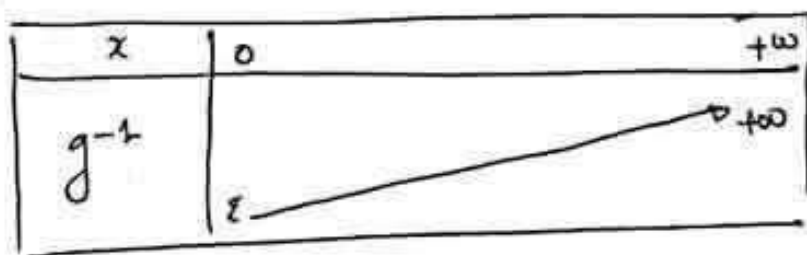
$$\textcircled{7} g(x) = x - 2\sqrt{x-1}, \quad I = [2, +\infty[$$

a/) on a f continue sur $[1, +\infty[$ et $I \subset [2, +\infty[$
Donc g est continue sur $[2, +\infty[$

..) on a g est strictement croissante sur $[2, +\infty[$
d'où la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1}
définie sur J : $J = g(I) = g([2, +\infty[)$
 $= [g(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[= [0, +\infty[$

$$\text{Donc } \boxed{J = [0, +\infty[}$$

b/ puisque la g est strictement croissante sur $]1, +\infty[$
 Alors g^{-1} est strictement croissante sur $J =]0, +\infty[$



c/ $g(10) = 10 - 2\sqrt{10-1} = 10 - 2 \times 3 = 10 - 6 = \boxed{4}$

puisque g admet une fonction réciproque g^{-1}

Donc $\boxed{g^{-1}(4) = 10}$

d/ Montrons que g^{-1} est Dérivable en 4 : ; $g(10) = 4$

condition $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ vérifie que } g \text{ Dérivable en } \underline{10} \\ \bullet g'(10) \neq 0 \end{array} \right.$

•) on a g Dérivable sur $]1, +\infty[$ et $10 \in]1, +\infty[$

Donc $\boxed{g \text{ est Dérivable en } 10} \text{ ①}$

•) $g'(10) = \frac{10-2}{\sqrt{10-2}(\sqrt{10-2}+1)} = \frac{8}{3(3+1)} = \frac{2}{3} \neq 0$

Donc $\boxed{g'(10) \neq 0} \text{ ②}$

d'après ① et ② g^{-1} est Dérivable en 4

$(g^{-1})'(4) = \frac{1}{g'(\underbrace{g^{-1}(4)}_{10})} = \frac{1}{\underline{g'(10)}}$

$= \frac{1}{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{3}{2}}$

Donc $\boxed{(g^{-1})'(4) = \frac{3}{2}}$ ✓

$x \in [0, +\infty[$ $g^{-1}(x) = ?$

$x \in [0, +\infty[$ et $y \in [2, +\infty[$

$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

$\Leftrightarrow (\sqrt{y-1} - 1)^2 = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{y-1} - 1)^2} = \sqrt{x}$

ona $x \in [0, +\infty[$
 $\Rightarrow x \geq 0$

$\Leftrightarrow |\sqrt{y-1} - 1| = \sqrt{x}$

$y \in [2, +\infty[$

$y \geq 2$

$\sqrt{y-1} \geq 1$

$\sqrt{y-1} - 1 \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{y-1} - 1 = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \sqrt{y-1} = \sqrt{x} + 1$

$\Rightarrow y-1 = (\sqrt{x} + 1)^2$

$\Rightarrow y = (\sqrt{x} + 1)^2 + 1$

Donc $g^{-1}(x) = (\sqrt{x} + 1)^2 + 1 \quad \forall x \in [0, +\infty[$

$g^{-1}(4) = (2 + 1)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

$$(I) : \sqrt[3]{x+1} < 2$$

$$D_I = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\} = [-1, +\infty[$$

$$\sqrt[3]{x+1} < 2 \Leftrightarrow x+1 < 8 \Leftrightarrow x < 7 \Rightarrow x \in]-\infty, 7[$$

$$S = [-1, +\infty[\cap]-\infty, 7[= [-1, 7[$$

$$S = [-1, 7[$$

$$(E) \sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{5-x} = \sqrt[3]{10}$$

$$D_E = \{x \in \mathbb{R} / 5+x \geq 0 \text{ et } 5-x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -5 \text{ et } -x \geq -5\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x \geq -5 \text{ et } x \leq 5\} = [-5, 5]$$

$$(\sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{5-x})^3 = (\sqrt[3]{10})^3 = 10$$

$$= (\sqrt[3]{5+x})^3 + 3(\sqrt[3]{5+x})^2(\sqrt[3]{5-x}) + 3(\sqrt[3]{5+x})(\sqrt[3]{5-x})^2 + (\sqrt[3]{5-x})^3 = 10$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\Rightarrow 5+x + 3\sqrt[3]{5+x}\sqrt[3]{5-x}(\sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{5-x}) + 5-x = 10$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{10}\sqrt[3]{5+x}\sqrt[3]{5-x} = 0$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{5+x}\sqrt[3]{5-x} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{5+x} = 0 \text{ ou } \sqrt[3]{5-x} = 0$$

$$\Rightarrow 5+x = 0 \text{ ou } 5-x = 0 \Rightarrow x = -5 \text{ ou } x = 5$$

puisque $-5 \in [-5, 5]$ et $5 \in [-5, 5]$ donc $S = \{-5, 5\}$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \stackrel{?}{=} f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-1} = \frac{0}{0} \text{ F.I.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x-3 = -2$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ Alors f est continue en 1.

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 4x + 3 & x-1 \\ \hline x^2 - x & x-3 \\ \hline 0 - 3x + 3 & \\ -3x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$$(I) : \sqrt[3]{x+1} < 2$$

$$D_I = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\} = [-1, +\infty[$$

$$\sqrt[3]{x+1} < 2 \Leftrightarrow x+1 < 8 \Leftrightarrow x < 7 \Rightarrow x \in]-\infty, 7[$$

$$S = [-1, +\infty[\cap]-\infty, 7[= [-1, 7[$$

$$S = \boxed{[-1, 7[}$$

$$(E) \sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{5-x} = \sqrt[3]{10}$$

$$D_E = \{x \in \mathbb{R} / 5+x \geq 0 \text{ et } 5-x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -5 \text{ et } -x \geq -5\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x \geq -5 \text{ et } x \leq 5\} = \boxed{[-5, 5]}$$

$$(\sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{5-x})^3 = (\sqrt[3]{10})^3$$

$$= (\sqrt[3]{5+x})^3 + 3(\sqrt[3]{5+x})^2(\sqrt[3]{5-x}) + 3(\sqrt[3]{5+x})(\sqrt[3]{5-x})^2 + (\sqrt[3]{5-x})^3 = 10$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\Rightarrow 5+x + 3\sqrt[3]{5+x}\sqrt[3]{5-x}(\sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{5-x}) + 5-x = 10$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{10}\sqrt[3]{5+x}\sqrt[3]{5-x} = 0$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{5+x}\sqrt[3]{5-x} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{5+x} = 0 \text{ ou } \sqrt[3]{5-x} = 0$$

$$\Rightarrow 5+x = 0 \text{ ou } 5-x = 0 \Rightarrow \boxed{x = -5} \text{ ou } \boxed{x = 5}$$

puisque $-5 \in [-5, 5]$ et $5 \in [-5, 5]$ donc $S = \boxed{\{-5, 5\}}$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \stackrel{?}{=} f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-1} = \frac{0}{0} \text{ F.I.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x-3 = \boxed{-2}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 4x + 3 & x-1 \\ \hline x^2 - x & x-3 \\ \hline 0 - 3x + 3 & \\ -3x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ Alors f est continue en 1.