المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

Académie Régionale d'Education et de Formation
Rabat-Salé-Kénitra
Direction provinciale Temara-Skhirat

Les mathématiques

RESUME DU COURS

2ème année du baccalauréat

Sciences expérimentales - Sciences et technologies industrielles

Réalisé par **: LAGDEM Mohamed**

Prof d'enseignement secondaire qualifiant

2020/2021

Sommaire :

Cet ouvrage est destiné aux élèves du deuxième année du baccalauréat science expérimentales et sciences et technologies industrielles, c’est un résumé précis du programme des mathématiques qui peut vous aider à mémoriser les points clés de chaque chapitre.

C’est aussi un outil de révision 100% efficace pour préparer l’épreuve des mathématiques d’examen national.

Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, ID, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, ID, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

- l'ensemble des **entiers naturels** $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5...\}$
- l'ensemble des **entiers relatifs** $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...\}$
- l'ensemble des **nombres décimaux** $ID=\left\{a.10^n \,/\, a\in\mathbb{Z} \text{ et } n\in\mathbb{Z}\right\}$

Exemples : 3,25 ; 0,08696

- l'ensemble des **nombres rationnels** $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \,/\, a\in\mathbb{Z} \text{ et } b\in\mathbb{Z}^*\right\}$

Exemples : $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{15}$; $\frac{1}{3}$

- l'ensemble des **nombres réels** est noté par $\mathbb{R}$ .C'est l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels.

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}.$$

Opérations dans $\mathbb{R}$

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$	$\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$

$\frac{a}{b}=c \Leftrightarrow a=bc$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$

Puissances

$a^n\times a^m=a^{n+m}$	$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$	$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$
$(a^n)^m=a^{nm}$	$a^n\times b^n=(ab)^n$	$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$

Racines carrés

$a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}^+$	$\sqrt{a^2}=\sqrt{a}^2=a$	$\sqrt{a^n}=\sqrt{a}^n$
$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$, $b\neq 0$	$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$, $a\neq 0$

Identités remarquables

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Comparaison de deux réels

$$a \leq b \quad \text{si} \quad a - b \leq 0$$

Ordre Et Opérations dans IR

-si $a \leq b$ **alors :** $a + c \leq b + c$
-si $a \leq b$ **et** $c \leq d$ **alors :** $a + c \leq b + d$

-si $c > 0$ **alors :** $a \leq b \iff ac \leq bc$
-si $c < 0$ **alors :** $a \leq b \iff ac \geq bc$

-si $0 \leq a \leq b$ **et** $0 \leq c \leq d$ **alors :** $0 \leq ac \leq bd$

-si $0 < a \leq b$ **alors :** $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.
-si $a \leq b < 0$ **alors :** $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$.

-si $0 \leq a \leq b$ **alors :** $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.
-si $0 \leq a \leq b$ **alors :** $a^2 \leq b^2$.
-si $a \leq b \leq 0$ **alors :** $a^2 \geq b^2$.

L'encadrement

Toute inégalité de la forme $a \leq x \leq b$ *ou* $a \leq x < b$ *ou* $a < x \leq b$ *ou* $a < x < b$ *est appelée* **<u>encadrement de</u>** x **<u>d'amplitude</u>** $b - a$.

Propriétés

-si $a \leq x \leq b$ **et** $c \leq y \leq d$ **alors :**
$$a + c \leq x + y \leq b + d \quad \text{et} \quad a - d \leq x - y \leq b - c$$

-si $0 \leq a \leq x \leq b$ **alors :** $a^2 \leq x^2 \leq b^2$.
-si $a \leq x \leq b \leq 0$ **alors :** $b^2 \leq x^2 \leq a^2$.

-si $a \leq x \leq b$ tels que a et b non nuls et de même signe **alors** :
$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}.$$

Intervalles de IR

REPRESENTATION	INEGALITE *ensemble des réels x vérifiant :*	INTERVALLE
a b --[------------]-->	$a \leq x \leq b$	$[a ; b]$
a b --]------------ [-->	$a < x < b$	$]a ; b[$
a b -- [------------ [-->	$a \leq x < b$	$[a ; b[$
a b --]------------]-->	$a < x \leq b$	$]a ; b]$
a -- [------------>	$x \geq a$	$[a ; +\infty[$
a --]------------>	$x > a$	$]a ; +\infty[$
a ------------]-->	$x \leq a$	$]-\infty ; a]$
a ------------ [-->	$x < a$	$]-\infty ; a[$

Union et Intersection d'intervalles

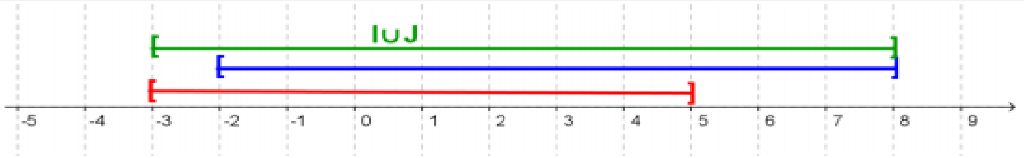
La réunion de deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres qui sont dans I OU dans J (au moins dans l'un des deux) : elle se note I ∪ J

(∪ se lit « union »)

L'intersection de deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres qui sont dans I ET dans J (les deux à la fois) : elle se note I ∩ J

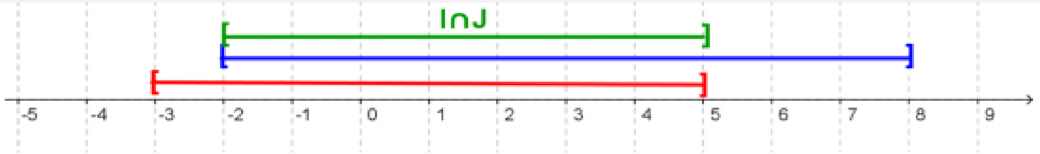
(∩ se lit « inter »).

Exemple1 (union)



[-3 ; 5] ∪ [-2 ; 8] = [-3 ; 8]

Exemple2 (intersection)



[-3 ; 5] ∩ [-2 ; 8] = [-2 ; 5]

Longueur , centre et rayon d'un intervalle $I=[a,b]$

-longueur de $I=[a,b]$ est : $b-a$

-centre de $I=[a,b]$ est : $\dfrac{a+b}{2}$

-rayon de $I=[a,b]$ est : $\dfrac{b-a}{2}$

valeur absolue

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x\leq 0 \end{cases}$$

Propriétés de la valeur absolue

$|x|=0$ équivalent à $x=0$; $|xy|=|x||y|$; $|x+y|\leq|x|+|y|$

$$|x|\geq 0 \quad ; \quad |-x|=|x| \quad ; \quad |x^2|=|x|^2=x^2 \quad ; \quad \left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|} \quad ; \quad \sqrt{x^2}=|x|$$

$(r\geq 0)$

$$\begin{array}{llll} |x|=r & \Leftrightarrow & x=r \text{ ou } x=-r \\ |x|=|y| & \Leftrightarrow & x=y \text{ ou } x=-y \\ |x|\leq r & \Leftrightarrow & -r\leq x\leq r \\ |x|\geq r & \Leftrightarrow & x\geq r \text{ ou } x\leq -r \end{array}$$

Signe du binôme $ax+b$ $(a \neq 0)$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe contraire de a	0	Signe de a

Signe et factorisation du trinôme ax^2+bx+c $(a \neq 0)$

Discriminant $\Delta = b^2-4ac$	Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$	Factorisation du trinôme ax^2+bx+c	Signe du trinôme ax^2+bx+c
$\Delta > 0$	L'équation admet deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $S=\{x_1;x_2\}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$	x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ ax^2+bx+c : Signe de a … 0 … Signe contraire de a … 0 … Signe de a (on suppose que $x_1 < x_2$)
$\Delta = 0$	L'équation admet une unique solution qui est $x_0 = \frac{-b}{2a}$. $S=\{x_0\}$	$a(x-x_0)^2$	x : $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ ax^2+bx+c : Signe de a … 0 … Signe de a
$\Delta < 0$	L'équation n'admet aucune solution dans IR $S=\phi$	Le trinôme n'admet pas de factorisation dans IR	x : $-\infty$ … $+\infty$ ax^2+bx+c : Signe de a

Somme et produit des solutions d'une équation de seconde degré	Si l'équation $ax^2+bx+c=0$ **admet deux solutions** x_1 et x_2 Alors : $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$
Détermination de deux nombres dont la somme et le produit sont connus	Deux nombres u et v dont la somme est S et le produit est P $\left(\text{càd} \begin{cases} u+v=s \\ uv=p \end{cases} \right)$ sont les solutions de l'équation : $x^2-sx+p=0$

Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

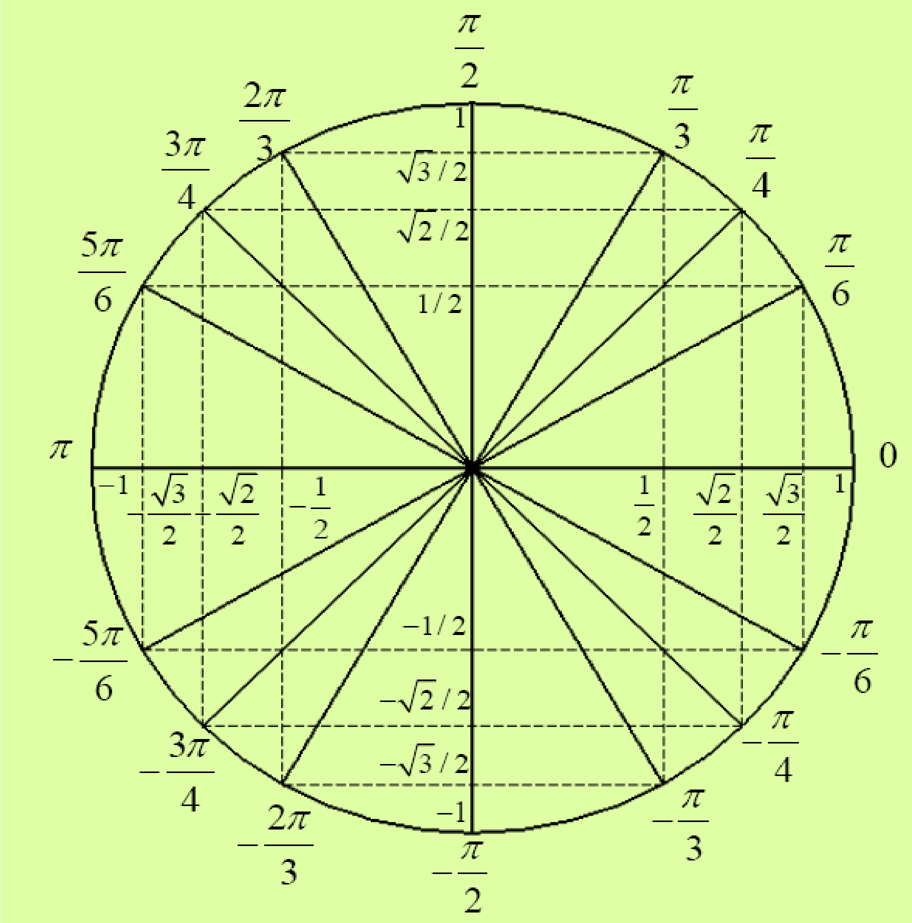
méthode de déterminant (méthode de Cramer)

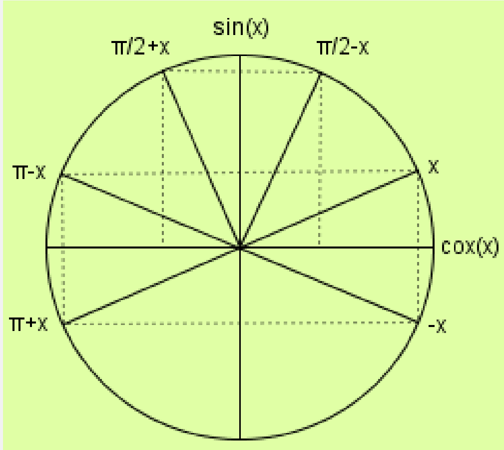
$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \longrightarrow D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b$$

$\boxed{D \neq 0} \longrightarrow$ le système admet une unique solution (x,y) tel que : $x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{D_y}{D}$ avec $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

$\boxed{D = 0} \longrightarrow$ le système soit admet une infinité de solutions dans IR^2 ($D_x=0$ et $D_y=0$) ou bien n'admet pas de solutions dans IR^2 ($D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$)

Trigonométrie





$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$
$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$$
$$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$$
$$\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

Equations trigonométriques

$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - a + 2k\pi \quad ; \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -a + 2k\pi \quad ; \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan(x) = \tan(a) \Leftrightarrow x = a + k\pi \quad ; \; k \in \mathbb{Z}$$

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$-1 \leq \cos x \leq 1$
$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$		$-1 \leq \sin x \leq 1$
$\tan(x + k\pi) = \tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Formules de transformation :

- $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$
- $sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$
- $cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$
- $sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)$

- $tan(a+b) = \frac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)tan(b)}$ ● $tan(a-b) = \frac{tan(a)-tan(b)}{1+tan(a)tan(b)}$

Résultats :

- $cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)$
  $= 2cos^2(x) - 1 \quad = 1 - 2sin^2(x)$
- $sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$
- $tan(2x) = \frac{2tan(x)}{1-tan^2(x)}$

- $cos^2(a) = \frac{1+cos(2a)}{2}$
- $sin^2(a) = \frac{1-cos(2a)}{2}$
- $tan^2(a) = \frac{1-cos(2a)}{1+cos(2a)}$

- $sin(a) = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad t = tan(\frac{a}{2})$
- $cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$

Transformation de produit en somme :

- $cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}[cos(a+b) + cos(a-b)]$
- $sin(a)sin(b) = \frac{-1}{2}[cos(a+b) - cos(a-b)]$
- $sin(a)cos(b) = \frac{1}{2}[sin(a+b) + sin(a-b)]$

Transformation de somme en produit :

- $cos(a) + cos(b) = 2cos\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $cos(a) - cos(b) = -2sin\left(\frac{a+b}{2}\right)sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $sin(a) + sin(b) = 2sin\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $sin(a) - sin(b) = 2cos\left(\frac{a+b}{2}\right)sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Transformation de formule : $acos(x) + bsin(x)$ $(a, b) \neq (0, 0)$

- $acos(x) + bsin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}sin(x)\right)$
  $= \sqrt{a^2+b^2}\,cos(x-\alpha)$

tel que α un réel qui vérifie :

$$sin(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad و \quad cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

I. Limite finie d'une fonction en un point :

1. Limites des fonctions référentielles en 0 :

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} x^n = 0 \quad (n\in\mathbb{N}^*) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\sqrt{|x|} = 0$$

Propriété (*unicité de la limite*) :

Si une fonction admet une limite ℓ en un réel a alors ℓ est unique.

2. limites des fonctions polynômes -limites des fonctions rationnelles en un réel :

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux fonctions polynômes et $a\in\mathbb{R}$.

- $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$
- **Si** $Q(a)\neq 0$ **alors** $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$

3. Propriété (Limite à droite et à gauche en un point):

Soient f une fonction numérique et a et ℓ deux nombres réels.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$$

II. Limite infinie d'une fonction en un point :

Limites usuelles :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

- $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n} = +\infty$
- **Si n est pair :** $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n} = +\infty$
- **Si n est impair :** $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n} = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

III. Limite finie et infinie d'une fonction en l'infini :

1. Limite finie d'une fonction en l'infini :

Limites usuelles :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

2. Limite infinie d'une fonction en l'infini :

Limites usuelles :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- **Si** n **est pair :** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
- **Si** n **est impair :** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

IV. Limites et opérations :

Dans les tableaux qui suivent a **désigne un réel ou** $+\infty$ **ou** $-\infty$**,** ℓ **et** ℓ' **sont deux réels.**

1. Limite de la somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**	**F.I.**

2. Limite du produit de deux fonctions :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**	**F.I.**

3. Limite de l'inverse d'une fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

4. Limite du quotient de deux fonctions :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$ **Ou** $\ell<0$	$-\infty$ **Ou** $\ell<0$	$+\infty$ **Ou** $\ell>0$	$+\infty$ **Ou** $\ell>0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$\pm\infty$	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (\frac{f}{g})(x)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**	**F.I.**

5. Limite infini d'une fonction polynôme – d'une fonction rationnelle :

La limite en $+\infty$ **(resp en** $-\infty$**) d'une fonction polynôme est la limite en** $+\infty$ **(resp en** $-\infty$**) de son monôme de plus haute degré.**

La limite en $+\infty$ **(resp en** $-\infty$**) d'une fonction rationnelle est la limite en** $+\infty$ **(resp en** $-\infty$**) du quotient des monômes de plus haute degré du numérateur et du dénominateur.**

Remarque :

La propriété précédente n'est valable que pour les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles et uniquement pour l'étude des limites en l'infini.

V. Limites et ordre :

Soient f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle de la forme $I=[a,\ +\infty[$ $(a\in\mathbb{R})$ et soit $\ell\in\mathbb{R}$

- **Si** $\begin{cases}(\forall x\in I)\ ;\quad f(x)\leq g(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\end{cases}$ **alors:** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
- **Si** $\begin{cases}(\forall x\in I)\ ;\quad f(x)\leq g(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty\end{cases}$ **alors:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
- **Si** $\begin{cases}(\forall x\in I)\ ;\quad |f(x)-\ell|\leq g(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0\end{cases}$ **alors:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.
- **Si** $\begin{cases}(\forall x\in I)\ ;\quad g(x)\leq f(x)\leq h(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ell\end{cases}$ **alors:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.

Remarque :

Les propriété précédentes restent valables quand x tend vers $-\infty$ ou tend vers a à gauche ou à droite.

VI. Limites des fonctions trigonométriques

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(x)}{x}=1$

2) - **Pour tout** $a\in\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to a}\ \cos(x)=\cos(a)$; $\lim\limits_{x\to a}\ \sin(x)=\sin(a)$

- **Pour tout** $a\in\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; $\lim\limits_{x\to a}\ \tan(x)=\tan(a)$

Conséquences :

Pour tout $a\in\mathbb{R}^*$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(ax)}{ax}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(ax)}{ax}=1$

VII. Limites d'une fonction irrationnelle

Soit f une fonction définie et positive sur un voisinage d'un réel a et soit $\ell\in\mathbb{R}^+$

- **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ **alors :** $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$.
- **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ **alors :** $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=+\infty$.

Remarque: Enoncés analogues en $+\infty$ et en $-\infty$

Continuité en un point:

•	f est continue en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
•	f est continue à droite en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
•	f est continue à gauche en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Propriété f est continue en a $\Leftrightarrow$ f est continue à droite et à gauche en a

Continuité sur un intervalle :

- ✓ f est continue sur $]a, b[$ s'elle est continue en tout point de$]a, b[$
- ✓ f est continue sur $[a, b]$ s'elle est continue sur$]a, b[$ et continue à droite en a et continue à gauche en b

Continuité des fonctions usuelles:

- Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition
- $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$
- $x \longrightarrow \sin x$ et $x \longrightarrow \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- $x \longrightarrow \tan x$ est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition.

Opération sur les fonctions continues :

Si f et g sont continues sur I

- ➢ alors les fonctions $f + g$ et $f - g$ et $f \times g$ et αf sont continues sur I , $(\alpha \in \mathbb{R})$
- ➢ si de plus g ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I

L'image d'un intervalle par une fonction continue

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b[$	$\left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a)\right]$
$]a, b]$	$\left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$
$[a, +\infty[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(a)\right]$
$]a, +\infty[$	$\left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty, b]$	$\left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty, b[$	$\left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty, +\infty[$	$\left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right[$

Continuité de la composée de deux fonction :

Si f est continue sur I et g continue sur J tel que $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I

Résultats -si f est continue et positive sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur .

-si f est continue sur I alors f^n est continue sur I . $(n \in \mathbb{N}^*)$

Théorème des valeurs intermédiaires:

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ \beta \text{ entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{cases} \Longrightarrow \exists \alpha \in [a,b]\ ;\ f(\alpha) = \beta$$

Résultats :

- f continue sur $[a,b]$
- $f(a).f(b) < 0$

$\Longrightarrow$ L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[a,b]$

- f continue et strictement monotone sur$[a,b]$
- $f(a).f(b) < 0$

$\Longrightarrow$ L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[a,b]$

La méthode de dichotomie

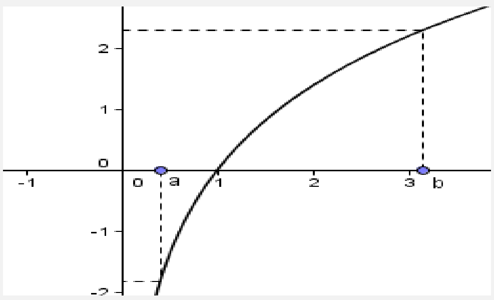
Est une méthode pour trouver une solution approchée à une équation f(x)=0. Précisément, supposons que la fonction f est continue sur l'intervalle [a,b], avec f(a)<0 et f(b)>0. On sait donc qu'il existe au moins un réel c dans l'intervalle [a,b] tel que f(c)=0.

L'idée est alors d'évaluer ce que vaut f au milieu de [a,b], et de distinguer les deux cas suivants :

- **si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, alors on sait qu'on a une racine dans l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$**
- **sinon, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ et on sait qu'on a une racine dans l'intervalle $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$.**

Ainsi, dans les deux cas, on a trouvé un intervalle de longueur moitié dans lequel est située une racine de l'équation f(x)=0. On recommence alors avec cet intervalle, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve une approximation qui nous convienne

$f(\alpha) = 0 \iff (C_f)$ coupe l'axe des abscisses au point $A(\alpha, 0)$



lagdem.smhd@gmail.com

+212676453608

Fonction réciproque

Propriétés :

- Si f continue et strictement monotone sur I
- Et $y \in f(I)$

$\Rightarrow$ L'équation $f(x) = y$ admet une seule solution dans I

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.

$f: I \rightarrow J$ et $f^{-1}: J \rightarrow I$

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

$(\forall x \in I), f^{-1} o f(x) = x$

$(\forall y \in J), f o f^{-1}(y) = y$

- ✓ La fonction f^{-1} est continue sur J et a le même sens de variation de f sur I
- ✓ Les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétrique par rapport la droite (D) : $y = x$

La fonction racine n^{ieme} :$(\sqrt[n]{\ \ })$, $n \in IN^*$

$x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$

$$x^n = y \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{y} = x$$

- ✓ La fonction $x \longrightarrow \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$
- ✓ Cas particuliers : $\sqrt[1]{x} = x$, $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ pour tout $x \in IR^+$

Propriétés : $x, y \in IR^+$; $n, m \in IN^*$

$\sqrt[n]{x^n} = x$; $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$; $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$; $\sqrt[nm]{x^m} = \sqrt[n]{x}$

$\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$; $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ $(y \neq 0)$; $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$; $\sqrt[p]{x^{np}} = x^n$

Limites :

$lim\, f(x) = +\infty \Longrightarrow lim\, \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$; $lim\, f(x) = \ell \geq 0 \Longrightarrow lim\, \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \rightarrow \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a}^2 + \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}^2}$$

Continuité :

si f est une fonction <u>continue et positive</u> sur I alors $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I

Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif :

$n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{Z}$ Pour tout x de $]0,+\infty[$ on a : $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

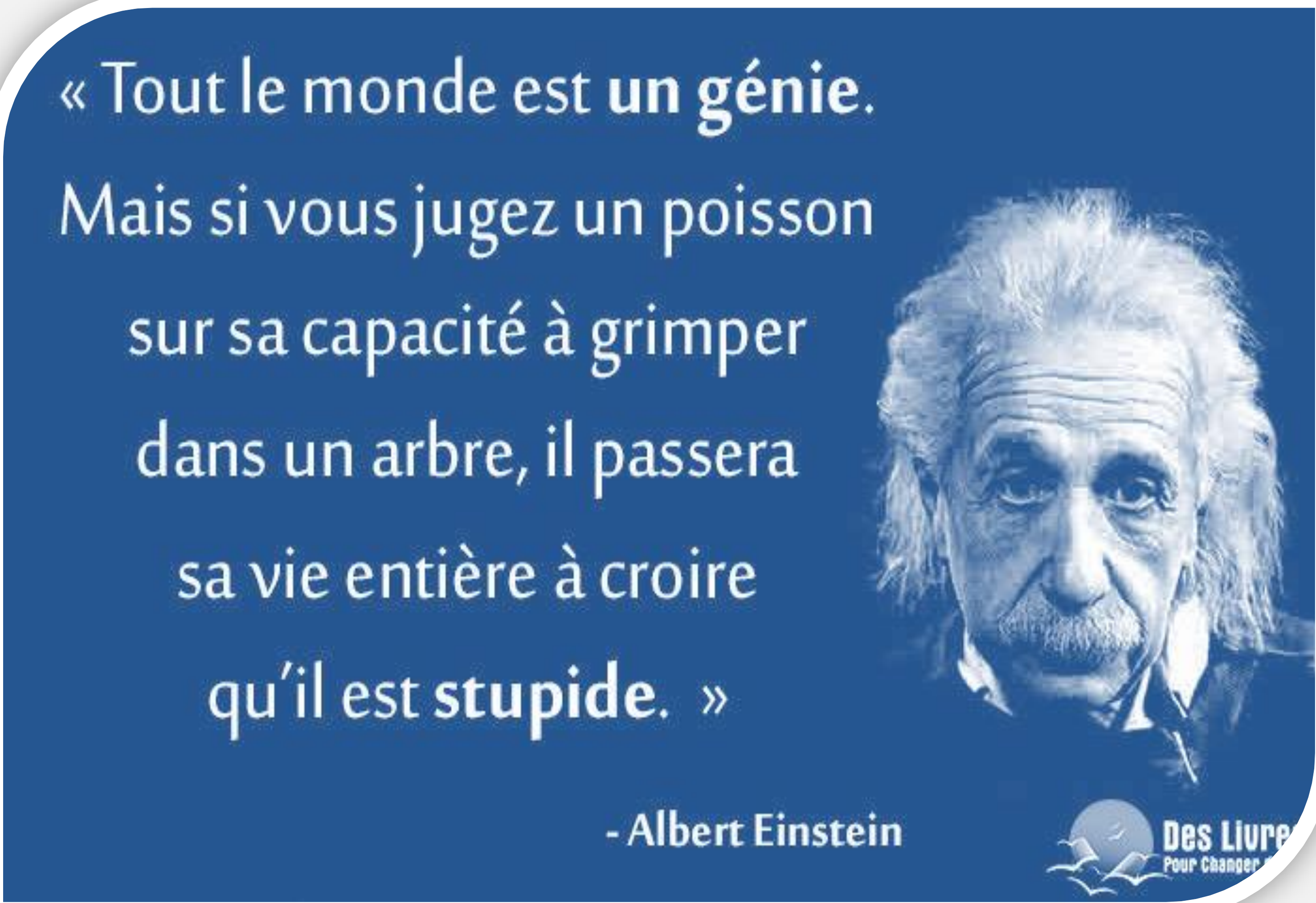
$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad ; \qquad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Propriété : $r\,,r' \in Q \quad ; \quad x, y \in IR_+^*$

$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} \qquad , \qquad (x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$$

$$(xy)^r = x^r \times y^{r'} \qquad , \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \qquad , \qquad x^{-r} = \frac{1}{x^r}$$



Définition :

✓ On dit que f est dérivable en a si : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \in \mathbb{R}$

→ Le nombre ℓ est appelé <u>le nombre dérivé de f en a</u> et noté $f'(a)$

Dérivabilité à droit - Dérivabilité à gauche

✓ On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \in \mathbb{R}$

→ ℓ est appelé <u>le nombre dérivé de f à droite en a</u> et noté $f'_d(a)$

✓ On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell' \in \mathbb{R}$

→ ℓ' est appelé <u>le nombre dérivé de f à gauche en a</u> et noté $f'_g(a)$

Propriété

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ dérivable à droite et à gauche en } a \\ \text{et} \quad f'_d(a) = f'_g(a) \end{array}\right\} \Leftrightarrow f \text{ est dérivable en } a$$

L'équation de la tangente à (Cf)

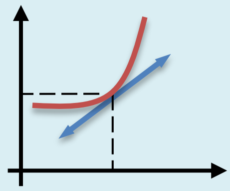
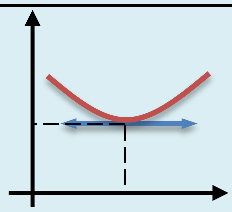
✓ <u>L'équation de la tangente à la courbe (Cf) au point d'abscisse a</u> est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Fonction affine tangente à f

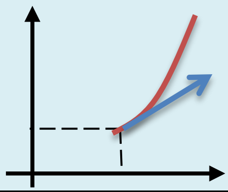
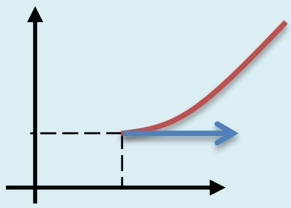
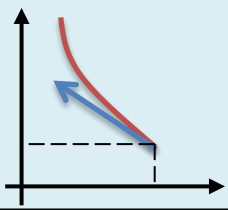
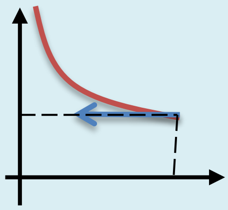
Si f est dérivable en a, la fonction $x \to f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée la fonction affine tangente à f en a . Autrement dit : Si $x \simeq a$: $f(x) \simeq f'(a)(x-a) + f(a)$

Interprétation géométrique de la dérivation

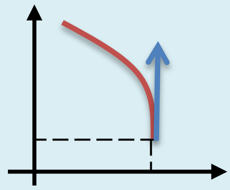
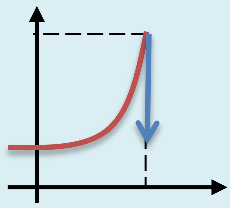
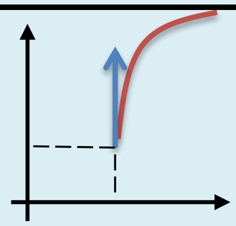
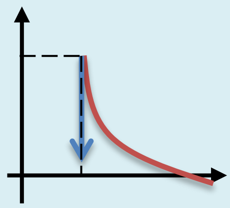
❖ f est dérivable en a

La limite	Interprétation géométrique	Représentation graphique (en exemple)
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in IR^*$ $f'(a)=l$	(Cf)admet une tangente au point $A(a,f(a))$ d'équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$	
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$ $f'(a)=0$	(Cf)admet une tangente horizontale au point $A(a,f(a))$	

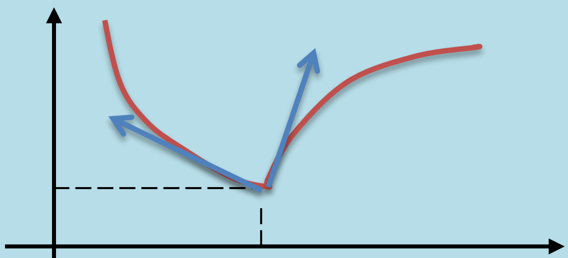
❖ f dérivable à gauche ou à droite en a

La limite	Interprétation géométrique	Représentation graphique (en exemple)
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in IR^*$ $f'_d(a)=l$	(Cf)admet une demi tangente à droite au point $A(a,f(a))$ d'équation $\begin{cases}y=f'_d(a)(x-a)+f(a)\\x\geq a\end{cases}$	
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$ $f'_d(a)=0$	(Cf)admet une demi tangente horizontale à droite au point $A(a,f(a))$	
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in IR^*$ $f'_g(a)=l$	(Cf)admet une demi tangente à gauche au point $A(a,f(a))$ d'équation $\begin{cases}y=f'_d(a)(x-a)+f(a)\\x\leq a\end{cases}$	
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$ $f'_g(a)=0$	(Cf)admet une demi tangente horizontale à gauche au point $A(a,f(a))$	

❖ f n’est pas dérivable en a

La limite	Interprétation géométrique	Représentation graphique (en exemples)
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$	(Cf)admet une demi tangente à droite au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le haut	
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$	(Cf)admet une demi tangente à droite au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le bas	
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$	(Cf)admet une demi tangente à gauche au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le haut	
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$	(Cf)admet une demi tangente à gauche au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le bas	

❖ Point anguleux :

<table>
<tr><td rowspan="2">f est dérivable à droite et à gauche en a , mais
$f'_d(a) \neq f'_g(a)$</td><td>(Cf) admet deux demi tangentes en $A(a, f(a))$
Le point $A(a, f(a))$ est appelé point anguleux</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Dérivabilité des fonctions usuelles

- ✓ toute fonction polynôme est dérivable sur IR.
- ✓ toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle de son domaine de définition.
- ✓ La fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. $(n \in IN^*)$
- ✓ Les fonctions $x \to sinx$ et $x \to cosx$ sont dérivables sur IR.
- ✓ La fonction $x \to tanx$ est dérivable en tout point de $IR \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Opérations sur les fonctions dérivables

Soient f et g deux fonctions **dérivables sur I** et $k \in IR$ et $n \in IN^*$, alors :

-> $f+g$, fg , kf , f^n sont dérivables sur I .

-> Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I .

-> Si $f > 0$ sur I , alors $\sqrt[n]{f}$ est dérivable sur I.

{ →Voir la formulaire de dérivée page suivante }

Dérivée de la composée de deux fonction :

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur $f(I)$, alors la fonction gof est dérivable sur I

$$\forall x \in I \qquad (gof)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Dérivée de la fonction réciproque :

I) Si f est **dérivable en a et $f'(a) \neq 0$** alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$

Et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

II) Si f est **dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I** alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$

Et $(\forall x \in J)$; $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

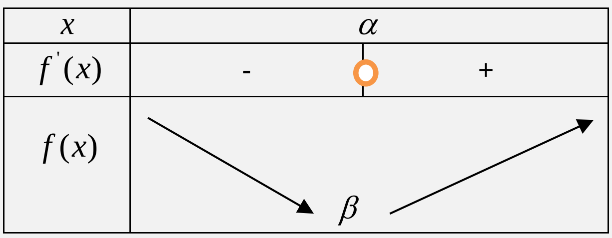
La dérivation et la monotonie

$k \in IR \qquad n \in IN^*$

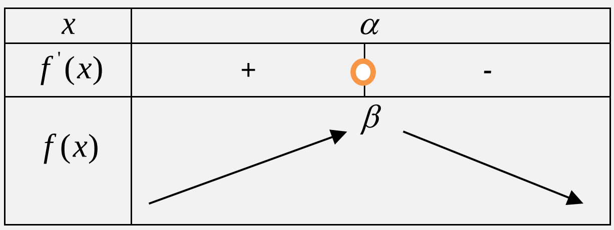
f est croissante sur I	$\forall x \in I \qquad f'(x) \geq 0$
f est décroissante sur I	$\forall x \in I \qquad f'(x) \leq 0$
f est constante sur I	$\forall x \in I \qquad f'(x) = 0$

Extremums d'une fonction

Si f' **s'annule en a en changeant de signe** alors f admet **un extremum** en a



β Valeur minimale



β valeur maximal

lagdem.smhd@gmail.com

+212676453608

Formulaire de dérivées

Dérivée des fonctions usuelles	Opérations sur les fonction dérivées
$(a)'=0$	$(af)'=af'$
$(x)'=1$	$(f+g)'=f'+g'$
$(ax)'=a$	$(fg)'=f'g+fg'$
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}$	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{f}\right)'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n}\times\frac{1}{\sqrt[n]{x}^{n-1}}$	$\left(f^n\right)'=nf'f^{n-1}$
$\cos'(x)=-\sin(x)$	$\left(\sqrt[n]{f}\right)'=\frac{1}{n}\frac{f'}{\sqrt[n]{f}^{n-1}}$
$\sin'(x)=\cos(x)$	$(fog)'=g'\times f'og$
$\tan'(x)=1+\tan^2(x)$ $=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\left(f^{-1}\right)'=\frac{1}{f'of^{-1}}$

(avec $a\in IR$ et f et g deux fonctions numériques)

Branches infinies :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

La droite d'équation $y=b$ est asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de ∞

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

- ∞ : (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés au voisinage de ∞
- 0 : (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞
- $a \neq 0$: $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax$
  - b : (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de ∞
  - ∞ : (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de ∞

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

La droite d'équation $x=a$ est asymptote verticale à (C_f)

PROPRIÉTÉ

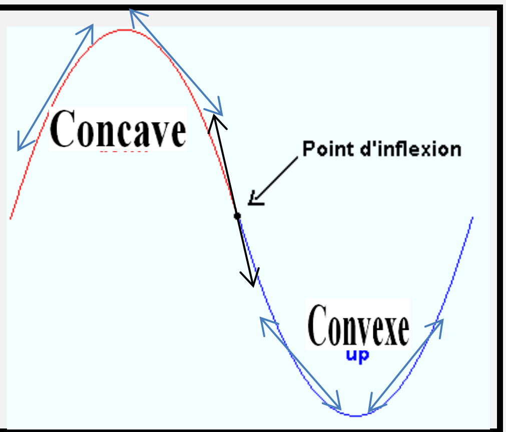
Si : $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ **alors :**

→ **la droite** d'équation $y=ax+b$ **est asymptote oblique à** (C_f) au voisinage de ∞.

Concavité d'une courbe – point d'inflexion :

Définitions

- ✓ (C_f) est convexe sur I s'il est au dessus de chacune de ses tangentes sur I
- ✓ (C_f) est concave sur I s'il est au dessous de chacune de ses tangentes sur I
- ✓ $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) si , en A , (C_f) traverse sa tangente.



Propriétés

- ✓ $f'' \geq 0$ sur I $\Longleftrightarrow$ (C_f) est convexe sur I
- ✓ $f'' \leq 0$ sur I $\Longleftrightarrow$ (C_f) est concave sur I
- ✓ f'' <u>s'annule en changeant de signe en</u> a alors $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f)

x		a	
$f''(x)$	+	0	-
Concavité de (C_f)	Convexe	Point d'inflexion $A(a, f(a))$	concave

Propriété

Si f' <u>s'annule en a et</u> <u>ne change pas de signe</u> <u>alors</u> $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f)

Eléments de symétrie de la courbe d'une fonction :

- **Centre de symétrie :**

Le point $I(a, b)$ est **centre de symétrie** de (C_f) **ssi :**

$$(\forall x \in D_f): \quad 2a - x \in D_f \quad et \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$$

- **Axe de symétrie :**

La droite (Δ): $x = a$ est **axe de symétrie** de (C_f) **ssi :**

$$(\forall x \in D_f): \quad 2a - x \in D_f \quad et \quad f(2a - x) = f(x)$$

REMARQUE :

- ✓ Si f est **paire** alors (C_f) est symétrique par rapport à **l'axe des ordonnés**.
- ✓ Si f est **impaire** alors (C_f) est symétrique par rapport à **l'origine du repère**.

Compléments

- **La position relative de (C_f) et d'une droite (Δ) d'équation : $y=ax+b$**

Pour étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y=ax+b$ sur un intervalle I, on étudie le signe de $f(x)-(ax+b)$ sur I

- Si $f(x)-(ax+b)>0$ pour tout x de I alors (C_f) **est au-dessus** de (Δ) sur I.
- Si $f(x)-(ax+b)<0$ pour tout x de I alors (C_f) **est au-dessous** de (Δ) sur I.

- **L'intersection de (C_f) et les axes du repère**

- **Pour déterminer l'intersection de (C_f) et l'axe des abscisses , on résout l'équation $f(x)=0$**
- **Pour déterminer l'intersection de (C_f) et l'axe des ordonnés on calcule $f(0)$**

Plan d'étude d'une fonction

- *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction s'il n'est pas donné dans l'énoncé.*
- *Réduire éventuellement cet ensemble par la recherche de la parité et de la périodicité de la fonction.*
- *Etudier la continuité de la fonction.*
- *Déterminer les limites de la fonction aux bornes de l'ensemble d'étude .*
- *Chercher les branches infinies de la courbe.*
- *Etudier la dérivabilité de la fonction.*
- *Déterminer la dérivabilité de la fonction aux points où les théorèmes de dérivabilité ne s'appliquent pas. Interpréter géométriquement ces limites en termes de tangentes.*
- *Calculer la dérivée de la fonction et étudier le signe de cette dérivée (une étude de fonction auxiliaire est parfois nécessaire).*
- *En déduire le sens de variation de la fonction.*
- *Résumer tous les résultats précédents dans un tableau après en avoir vérifié la cohérence. Calculer les coordonnées des points « particuliers » rencontrés dans l'étude et des points à tangente horizontale ($f'(x)=0$).*
- *Calculer la dérivée seconde pour étudier la convexité de la fonction et déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe.*
- *Tracer la courbe représentative de la fonction :*

  - Choisir astucieusement la position du repère dans le plan et l'unité de longueur si elle n'est pas donnée dans l'énoncé. Sinon, respecter l'unité imposée par l'énoncé.

  - Placer les asymptotes et les points particuliers (avec leur tangente).

  - Tracer la courbe en plaçant quelques autres points sans oublier de vérifier la cohérence avec le tableau de variations

définition	*Toute fonction définie de I partie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ appelée une suite numérique*

Suite majorée	$(U_n)_{n\in I}$ *majorée par* M $\Longleftrightarrow$ $(\forall n \in I)\quad U_n \leq M$
Suite minorée	$(U_n)_{n\in I}$ *minorée par* m $\Longleftrightarrow$ $(\forall n \in I)\quad U_n \geq m$
Suite bornée	$(U_n)_{n\in I}$ *bornée* $\Longleftrightarrow$ $(U_n)_n$ *majorée et minorée* $(\forall n \in I)\quad m \leq U_n \leq M$

Suite décroissante	*Suite croissante*
$(\forall n \in I)\quad U_{n+1} - U_n \leq 0$	$(\forall n \in I)\quad U_{n+1} - U_n \geq 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$(\forall n \geq n_0)\quad U_n \leq U_{n_0}$	$(\forall n \geq n_0)\quad U_n \geq U_{n_0}$

	Suite géométrique	*Suite arithmétique*
définition	$U_{n+1} = qU_n$ *q la raison de la suitegéométrique*	$U_{n+1} = U_n + r$ *r la raison de la suite arithmétique*
le terme général	$U_n = U_0 \times q^n$ $\forall(n,p) \in I^2 \quad U_n = U_p \times q^{n-p}$	$U_n = U_0 + nr$ $\forall(n,p) \in I^2 \quad U_n = U_p + (n-p)r$
La somme de termes consécutifs	$S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n$ $S_n = U_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \quad q \neq 1$ $S_n = (n-p+1)U_p \quad q = 1$	$S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n$ $S_n = \dfrac{n-p+1}{2}(U_p + U_n)$
trois termes consécutifs	*a et b et c trois termes consécutifs* $a \times c = b^2$	*a et b et c trois termes consécutifs* $a + c = 2b$

Convergence d'une suite numérique :

Définitions	$(U_n)_n$ est une suite convergente si elle admet une limite finie càd $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$
	$(U_n)_n$ est une suite divergente si elle n'est pas convergente

Limite de la suite (n^α) $(\alpha \in \mathbb{Q}^*)$

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim n^\alpha = 0$	$\lim n^\alpha = +\infty$

Limite de la suite (q^n) $(q \in \mathbb{R})$

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
n'admet pas de limite	$\lim q^n = 0$	$\lim q^n = 1$	$\lim q^n = +\infty$

Critères de convergences

- *Toute suite croissante et majorée est convergente*
- *Toute suite décroissante et minorée est convergente*

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim u_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim v_n = +\infty$$

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim v_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim u_n = -\infty$$

$$\begin{cases} |u_n - l| \leq v_n \\ \lim v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim u_n = l$$

$$\begin{cases} w_n \leq u_n \leq v_n \\ \lim w_n = \lim v_n = l \end{cases} \Rightarrow \lim u_n = l$$

Suite de la forme $v_n = f(u_n)$:

$$\begin{cases} (U_n)_n \text{ suite convergente} \\ \lim u_n = l \\ f \text{ est continue en } l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (v_n)_n \text{ est convergente et} \\ \lim v_n = f(l) \end{cases}$$

Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

$(U_n)_n$ *Suite définie par son première terme* u_{n_0} *et la relation* $u_{n+1} = f(u_n)$

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f(I) \subset I \\ u_{n_0} \in I \\ (U_n)_n \text{ suite convergente} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{la limite de } (U_n)_n \text{ est} \\ \text{la solution de l'équation} \\ f(x) = x \text{ dans } I \end{cases}$$

Définition	On dit que F est une fonction primitive de la fonction f sur un intervalle I , si F est dérivable sur I Et $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$
Propriétés	• Toute fonction continue sur un intervalle I admet une fonction primitive sur cet intervalle. • Si F est une fonction primitive de f sur I alors l'ensemble des fonctions primitives de f sur I est l'ensemble des fonction définie sur I par : $x \to F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$ • Soient x_0 de I et y_0 de $\mathbb{R}$, il existe une unique fonction primitive G de la fonction f sur I qui vérifie la condition : $G(x_0) = y_0$

Fonctions primitives des fonctions usuelles :

F est une fonction primitive de f sur l'intervalle I

f(x)	F(x)	L'intervalle I
0	c	$\mathbb{R}$
a	$ax + c$	$\mathbb{R}$
x^r $(r \in Q^*\backslash\{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$\mathbb{R}$ si $r > 0$ $\mathbb{R}^*$ si $r < 0$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax + b)$ $(a \in \mathbb{R}^*)$	$\frac{1}{a}\sin(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax + b)$ $(a \in \mathbb{R}^*)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ $k \in \mathbb{Z}$

(suite)

f(x)	F(x)	L'intervalle I
$\frac{1}{x}$	$ln\lvert x\rvert + c$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les primitives :

F est une fonction primitive de f sur l'intervalle I

La fonction f	Primitive F de f	L'intervalle I
$U' + V'$	$U + V$	*l'intervalle où U et V sont dérivables*
$\alpha U'$	αU	*l'intervalle où U est dérivable*
$U' \times U^r$	$\frac{1}{r+1} U^{r+1}$	*l'intervalle où U est dérivable et U^r est définie*
$\frac{U'}{U^2}$	$\frac{-1}{U}$	*l'intervalle où U est dérivable et ne s'annule pas*
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2\sqrt{U}$	*l'intervalle où U est dérivable et strictement positive*
$\frac{U'}{U}$	$ln\lvert U\rvert$	*l'intervalle où U est dérivable et ne s'annule pas*
$U'e^U$	e^U	*l'intervalle où U est dérivable*

Définition	✓ ln (logarithme népérien) est la primitive de $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1 $ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0,+\infty[$ $\qquad ln(1) = 0$
propriétés	✓ ln est une fonction définie ,continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ ✓ ln est une fonction strictement croissante sur $]0,+\infty[$ • $ln(x) > ln(y) \Leftrightarrow x > y$ • $ln(x) = ln(y) \Leftrightarrow x = y$ • $ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ • $ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
Propriétés algébriques	▪ $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$ ▪ $ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)$ $\quad (x, y \in]0,+\infty[)$ ▪ $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x)$ ▪ $ln(x^r) = r\,ln(x) \quad r \in \mathbb{Q}$
Le nombre e	$ln(e) = 1 \qquad e \approx 2,71 \qquad ln(e^r) = r \qquad r \in \mathbb{Q}$ ⇨ $ln(x) = r \Leftrightarrow x = e^r$

x	0		1		$+\infty$
$ln(x)$	||	$-$	0	$+$	

Les limites :

$\lim\limits_{x \to 0^+} ln(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} x\,ln(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} x^n ln(x) = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{ln(x)}{x-1} = 1$

La dérivation :

Si u est dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors la fonction $x \to ln|u(x)|$ est dérivable sur I et on a : $(ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

La fonction logarithme de base a :

Définition	$log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$ avec a un réel strictement positive et différent de 1
Résultats	• $log_a(a) = 1$ • $log_e(x) = ln(x)$ • $log_a(a^r) = r$
Logarithme décimal	Est La fonction logarithme de base 10 , on la note log ✓ $log(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)} \qquad log(10^r) = r$

L'ensemble $\mathbb{C}$-L'écriture algébrique :

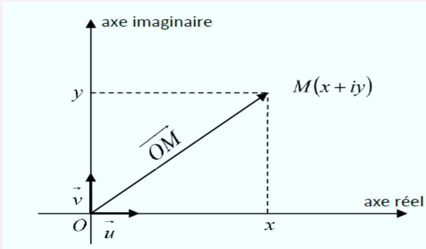
- ✓ L'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$
- ✓ Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit d'une manière unique $z = x + iy \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $i^2 = -1$
- ✓ L'écriture $x + iy$ appelée la forme algébrique de z
- ✓ Le nombre x appelé la partie réel de z et noté $Re(z)$
- ✓ Le nombre y appelé la partie imaginaire de z et noté $Im(z)$

$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$	✓ Si $Im(z) = 0$ alors z est un réel ✓ Si $Re(z) = 0$ et $Im(z) \neq 0$ alors z est un imaginaire pur

La représentation géométrique d'un nombre complexe

le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

- ✓ Le point $M(x, y)$ appelé image de z noté $M(z)$
- ✓ Le nombre z appelé affixe de M et noté z_M
- ✓ Le nombre z appelé affixe de $\overrightarrow{OM}$ et noté $z = aff(\overrightarrow{OM})$
- ✓ L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$



La notion	La relation complexe
I le milieu de $[AB]$	$z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
A et B et C points alignés	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

Le conjugué d'un nombre complexe

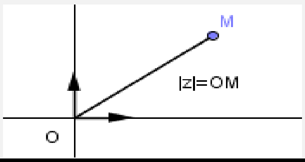
Définition	soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ▪ le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$

Propriétés	▪ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ ▪ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ ▪ $\overline{z^n} = \bar{z}^n \quad n \in \mathbb{N}^*$ ▪ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad z \neq 0$ ▪ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad z' \neq 0$	▪ z un nombre réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$ ▪ z un imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$ ▪ $z + \bar{z} = 2Re(z)$ ▪ $z - \bar{z} = 2i\,Im(z)$ ▪ $z\bar{z} = x^2 + y^2$

Le module d'un nombre complexe

Définition	Soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ Le module de z est le nombre réel positive $\lvert z\rvert = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

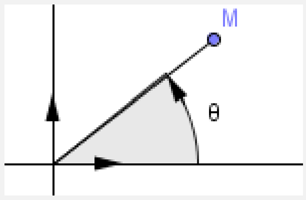
Propriétés	$\lvert z\times z'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$ $\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$ $\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$ $\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$ $\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$	$\lvert z\rvert = OM$



La distance AB	$AB = \lvert z_B - z_A\rvert$

L'argument d'un nombre complexe-la forme trigonométrique

Définition	L'argument de z est tout mesure en radians de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}})$ (M est l'image de z) et noté $arg(z)$ $arg(z) = \theta[2\pi]$



cas particulières	$z\in\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow arg(z)\equiv 0[2\pi]$ $z\in\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow arg(iz)\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$	$z\in\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow arg(z)\equiv \pi[2\pi]$ $z\in\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow arg(iz)\equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$

Mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})$	$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) = \arg(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A})[2\pi]$

La forme trigonométrique	Soit z un complexe $arg(z) = \theta[2\pi]$ et $\lvert z\rvert = r$ ▪ La forme trigonométrique de z est : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

La forme exponentielle	Soit z un complexe $arg(z) = \theta[2\pi]$ et $\lvert z\rvert = r$ La forme exponentielle de z est : $z = re^{i\theta}$	▪ Autre notation $re^{i\theta} = [r,\theta]$

Propriétés	▪ $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ ▪ $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$ ▪ $re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ ▪ $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ ▪ $\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ ▪ $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$	▪ $arg(\bar{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$ ▪ $arg(-z) \equiv \pi + arg(z)[2\pi]$ ▪ $arg(zz') \equiv (arg(z) + arg(z'))[2\pi]$ ▪ $arg(z^n) \equiv n\, arg(z)[2\pi]$ ▪ $arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -arg(z)[2\pi]$ ▪ $arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg(z) - arg(z')[2\pi]$

Formules d'Euler	$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Formule de Moivre :	$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Points cocyclique
A et B et C et D des points cocyclique si $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A} \times \dfrac{z_B-z_C}{z_D-z_C} \in \mathbb{R}$

L'ensemble des points M(z) qui vérifient	La notion géométrique
$\lvert z-z_A\rvert = r$ $\Leftrightarrow \quad AM = r$	Cercle de centre A et de rayon r
$\lvert z-z_A\rvert = \lvert z-z_B\rvert$ $\Leftrightarrow \quad AM = BM$	la médiatrice de $[AB]$

Nature du triangle

ABC triangle rectangle en A	$\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = re^{\pm i\frac{\pi}{2}}$
ABC triangle isocèle en A	$\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = e^{i\theta}$
ABC triangle isocèle et rectangle en A	$\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$
ABC triangle équilatérale	$\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a et b et c des réels)

L'équation $z^2 = a$ $z \in \mathbb{C}$	Solutions
$a > 0$	$S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$

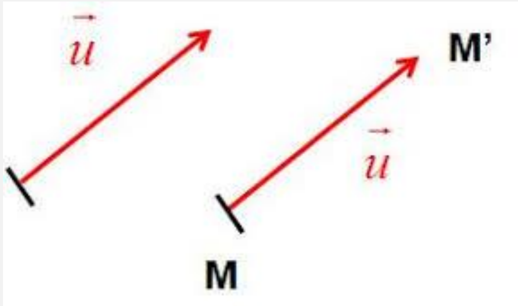
L'équation $az^2 + bz + c = 0$ $a \neq 0$ et $z \in \mathbb{C}$ On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac$	Solutions
$\Delta > 0$	$S = \left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
$\Delta = 0$	$S = \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$
$\Delta < 0$	$S = \left\{\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

Ecriture complexe des transformations géométriques

$M(z)$, $M'(z')$

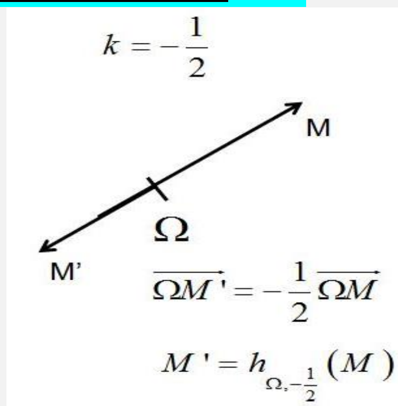
$T_{\vec{u}}$: T translation de vecteur $\vec{u}$

$$T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$
$$\Leftrightarrow z' - z = z_{\vec{u}}$$
$$\Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$$



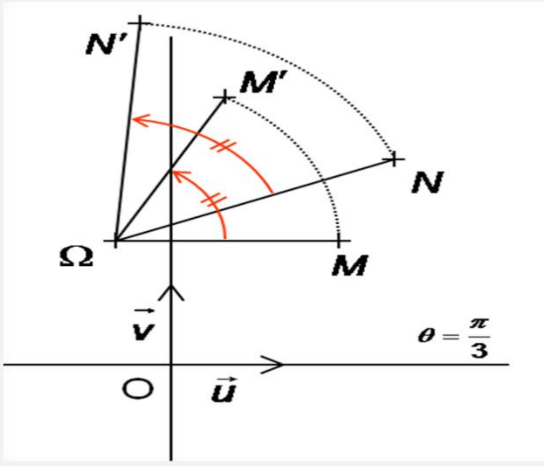
$h(\Omega, k)$: h homothétie de centre Ω et de rapport k

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$
$$\Leftrightarrow z' - z_{\Omega} = k(z - z_{\Omega})$$
$$\Leftrightarrow z' = k(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega}$$



$R(\Omega, \theta)$: R rotation de centre Ω et d'angle θ

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - z_{\Omega} = e^{i\theta}(z - z_{\Omega})$$
$$\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega}$$



N.B : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

En résumé :

La transformation	L'écriture complexe
La translation T de vecteur $\vec{u}$	$z' = z + z_{\vec{u}}$
L'homothétie h de centre Ω et de rapport k	$z' = k(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega}$
La rotation R de centre Ω et d'angle θ	$z' = e^{i\theta}(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega}$

Définition	✓ La fonction réciproque de ln s'appelle la fonction exponentielle népérienne notée exp ✓ Notation : $\forall x \in \mathbb{R} \quad exp(x) = e^x$ ✓ La fonction est exp définie sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0,+\infty[\quad e^x = y \Leftrightarrow x = ln(y)$ $exp(0) = 1 \qquad exp(1) = e$
propriétés	✓ exp est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ ✓ exp est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ • $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$ • $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad ln(e^x) = x \qquad \forall x \in]0,+\infty[\quad e^{ln(x)} = x$
Propriétés algébriques	▪ $e^{x+y} = e^x \times e^x \quad ; \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ▪ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad ; \quad e^{rx} = (e^x)^r \quad r \in \mathbb{Q}$

Les limites :

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$	$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad n \in \mathbb{N}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad n \in \mathbb{N}$
$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	

La dérivation :

✓ $\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$

✓ Si u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \to e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)} \quad \forall x \in I$

La fonction exponentielle de base a :

Définition	$exp_a(x) = a^x = e^{xln(a)}$ avec a un réel strictement positive et différent de 1
La dérivée	$\forall x \in \mathbb{R} \quad (a^x)' = (ln\ a)a^x$
Cas particulière	La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \to 10^x$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0,+\infty[\quad 10^x = y \Leftrightarrow x = log(y)$

Solution de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ $(a \neq 0)$

<u>La solution générale</u> de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

avec $k \in \mathbb{R}$

Solution de l'équation différentielle $(E) : \; y'' + ay' + by = 0$

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ s'appelle <u>l'équation caractéristique</u> de l'équation différentielle (E)

➡ On calcule le discriminant Δ :

Si :	Alors l'équation caractéristique admet :	Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions y définies sur IR par :
$\Delta > 0$	Deux solutions réels r_1 et r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ Tels que $\alpha, \; \beta \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	Solution double r_0	$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_0 x}$ Tels que $\alpha, \; \beta \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = p + iq$ et : $r_2 = \overline{r_1}$	$y(x) = e^{px}\left(\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)\right)$ tels que $\alpha, \; \beta \in \mathbb{R}$

Définition

Soient f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I et a et b deux éléments de I

- L'intégrale de f de a à b est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriétés

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b k dx = k(b-a)$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (relation de Chasles)
- $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ (la linéarité)
- $\int_a^b Kf(x)\,dx = K\int_a^b f(x)\,dx$

L'intégrale et l'ordre

- $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

La valeur moyenne

f une fonction continue sur I et a et b deux élément de I tel que $b > a$

- Il existe un nombre c de $[a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$
- Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ appelé la valeur moyenne de f sur $[a,b]$

Intégration par parties

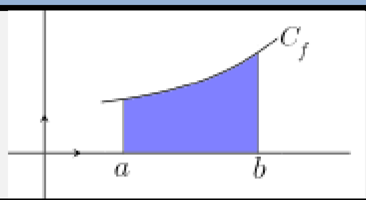
$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

- Le choix de u (fonction à dériver) se fait selon l'ordre de L vers S

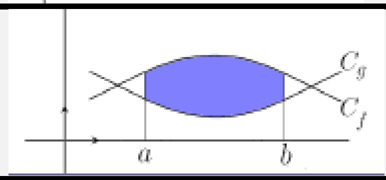
L	P	E	S
ln	polynôme	exp	sin ; cos ; tan

Calcul des aires

- L'air du domaine délimité par (C_f) et l'axe des abscisses et les droites $x=a$ et $x=b$ est : $\left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right) ua$
- ua est l'unité de l'air $\quad ua = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

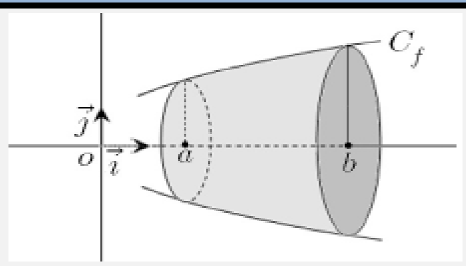


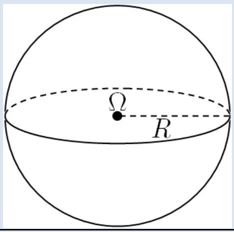
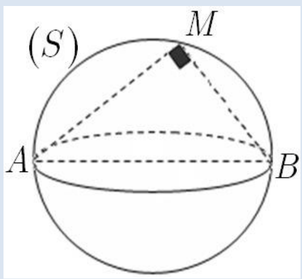
- L'air du domaine délimité par (C_f) et (C_g) et les droites $x=a$ et $x=b$ est $\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx\right) ua$



Calcul des volumes

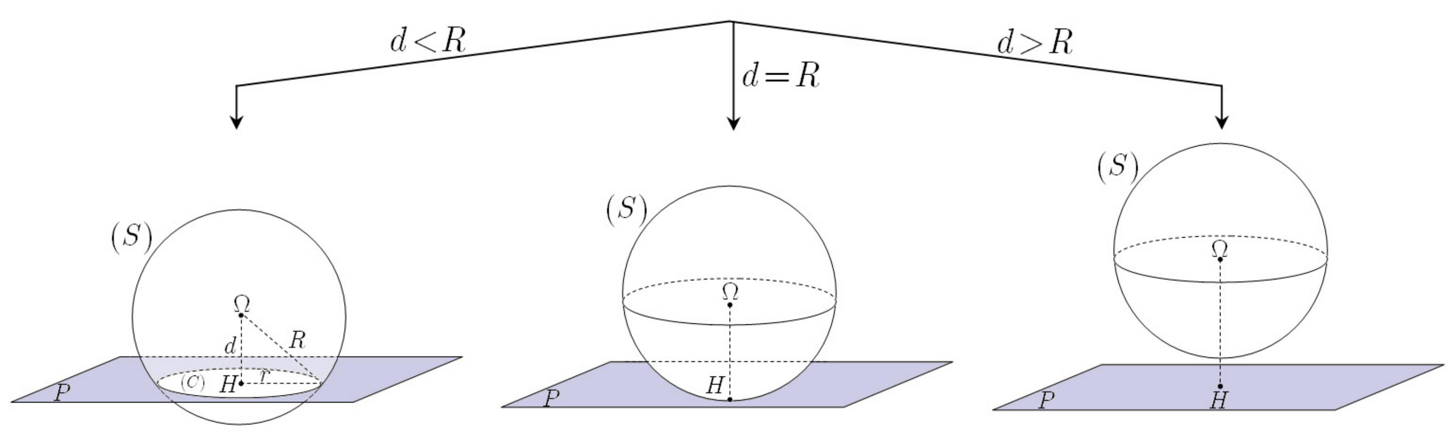
- Le volume du solide engendré par la rotation de (C_f) autour de l'axe des abscisses un tour complet sur $[a,b]$ est donné par $\left(\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx\right) \times uv$
- uv est l'unité de volume $\quad uv = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$



Forme analytique du : -Produit scalaire : -Norme d'un vecteur : - Distance : – Produit vectoriel :	L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ Soient $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ • $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ • $\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{x^2+y^2+y^2}$ • $\lVert\overrightarrow{AB}\rVert = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$ • $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$
propriétés	• $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v}=0$ • $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires* $\iff \vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
Droite $D(A,\vec{u})$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(a,b,c)$	Représentation paramétrique de la droite (D) : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \quad (t\in IR) \\ z = z_A + ct \end{cases}$ Distance d'un point M à la droite (D) : $d(M,(D)) = \frac{\lVert\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\rVert}{\lVert\vec{u}\rVert}$
Plan dans l'espace	Equation cartésienne d'un plan (P) $(P):\ ax+by+cz+d=0$ $\iff \vec{n}(a,b,c)$ *est un vecteur normal au plan* (P) Distance d'un point Ω au plan (P) : $d(\Omega,(P)) = \frac{\lvert ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ Si les points A et B et C ne sont pas colinéaires alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)
Sphère	Equation cartésienne d'une sphère (S) de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R : (S) : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$  ➢ On détermine l'équation cartésienne d'une sphère (S) dont $[AB]$ est l'un de ses diamètres en utilisant l'équivalence suivant : $M\in(S) \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ 

❖ Intersection d'une sphère $S(\Omega, R)$ et d'un plan (P) :

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur le plan (P) , on pose $d = \Omega H = d(\Omega, (P))$



Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$	Le plan (P) est tangent à la sphère (S) en H	Le plan (P) ne coupe pas la sphère (S)

Equation cartésienne d'un plan (P) tangent à une sphère S(Ω ,R) en un point A

Méth1 :

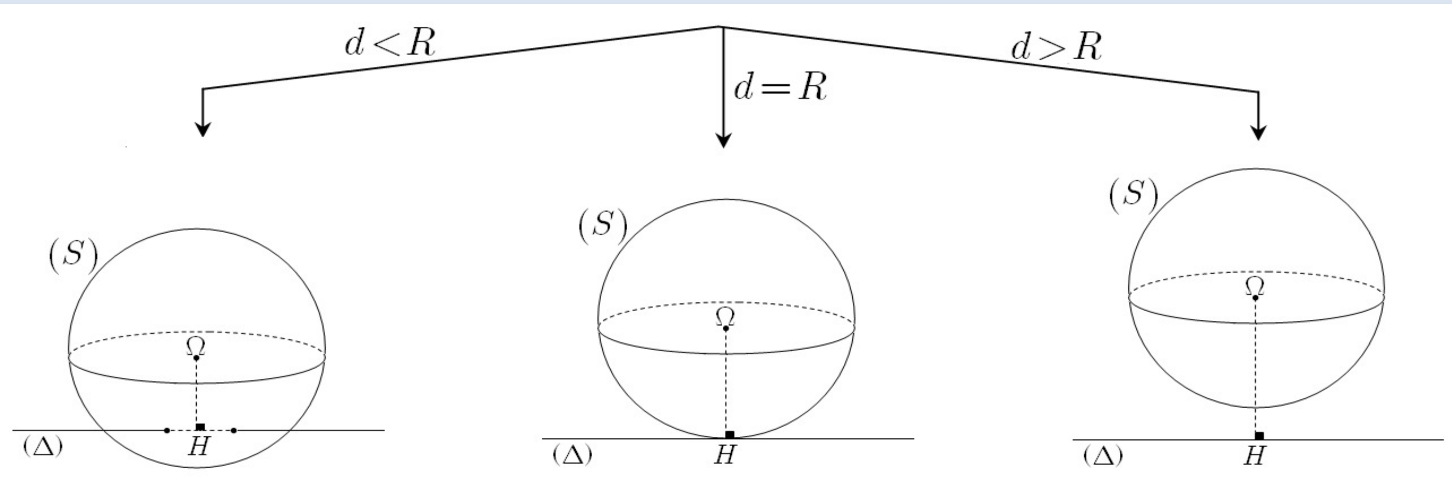
on utilise l'équivalence : $M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$

Méth2 :

$\overrightarrow{A\Omega}$ est un vecteur normal au plan (P) … etc

❖ Intersection d'une sphère $S(\Omega, R)$ et d'une droite (D) :

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur la droite (D) , on pose $d = \Omega H = d(\Omega, (D))$



La droite (D) coupe la sphère (S) en deux points distincts	La droite (D) est tangente à la sphère (S) en H	La droite (D) ne coupe pas la sphère (S)

L'aire d'un triangle ABC :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

l'aire d'un parallélogramme ABCD :

$$S_{ABCD} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

Dénombrement :

Définitions	✓ Le cardinal de E est le nombre des éléments de E et on le note : $Card(E)$ ✓ Le complémentaire de A dans E est noté $\bar{A}$ $\quad \bar{A} = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$
Propriétés	✓ $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$ ✓ Si $A \cap B = \emptyset$ alors : $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$ ✓ $Card(\bar{A}) = Card(E) - Card(A)$ $\quad A \cup \bar{A} = E$ $\quad A \cap \bar{A} = \emptyset$

- **Le principe fondamental du dénombrement**

Dans une situation de dénombrement contient p choix
Si le 1^{er} choix se réalise par n_1 façon distinctes
et le 2^{ieme} choix se réalise par n_2 façon distinctes
....
et le p^{ieme} choix se réalise par n_p façon distinctes
Alors le nombre des possibilités est $\quad n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$

Arrangements	✓ Le nombre des arrangements sans répétition de p éléments pris parmi n éléments est : $A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$ (p et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et $\leq n$) ✓ Le nombre des arrangements avec répétition de p élément pris parmi n élément est : n^p $\quad$ (p et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$)
Permutations	✓ Tout arrangement de n éléments pris parmi n éléments est appelé une permutation de n éléments, le nombre des permutations est $A_n^n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$
Combinaisons	Soit E un ensemble de cardinal n $\quad$ (p et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et $p \leq n$) Toute partie de E contenant p éléments est appelée combinaison de p éléments pris parmi n éléments de E ✓ Le nombre des combinaisons de p élément pris parmi n est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Quelques types de tirage :

On tire p éléments parmi n éléments $\quad$ (p et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$)

type de tirage	nombre des possibilités	L'ordre
simultanément $(p \leq n)$	C_n^p	N'est pas important
Successivement et sans remise $(p \leq n)$	A_n^p	important
Successivement et avec remise	n^p	important

Nombre de possibilités d'arrangement de n éléments

On dispose de $n_1$éléments de type A, et de $n_2$éléments de type B, de n_3 éléments de type C, parmi n éléments, avec $n = n_1 + n_2 + n_3$

➢ le nombre de possibilités d'arranger ces n éléments est : $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$

Probabilités

Vocabulaires et définitions

- **Expérience aléatoire :** Toute expérience dont on ne connait pas ses résultats d'avance
- **Possibilité :** tout résultat d'une expérience aléatoire
- **Univers des possibilités :** l'ensemble de toutes les éventualités, **noté Ω**
- **L'événement :** toute partie de Ω
- **L'événement contraire** : est l'événement noté $\overline{A}$ et qui vérifie : $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- **L'événement $A \cap B$:** se réalise lorsque A et B **sont réalisés en même temps**
- **L'événement $A \cup B$:** se réalise lorsque l'un au moins des éventualités A ou B est réalisé.
- **A et B sont incompatibles** (ou disjoints) **:** si $A \cap B = \emptyset$

Propriétés	$P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$ et $0 \leq P(A) \leq 1$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
La probabilité d'un événement	• **Equiprobabilité :** $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$
La probabilité conditionnelle	• **La probabilité de B sachant que A est réalisé** $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $(P(A) \neq 0)$
L'indépendance	• **A et B sont indépendants ssi:** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Répétition d'expériences identiques et indépendantes	Soit A un événement de probabilité p dans une expérience aléatoire on répète cette expérience n fois. **La probabilité de réalisation de A , exactement k fois** est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

Variables aléatoires

loi de probabilité d'une variable aléatoire	une variable aléatoire est toute application X de Ω vers $\Re$ • **L'ensemble des valeurs pris par X** est noté : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ • **La détermination de la loi de probabilité de X :** signifie le calcul des probabilités des événements $(X = x_i)$ avec $i \in \{1,2,\dots,n\}$ On résume la loi de probabilité de$X$ dans le tableau :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

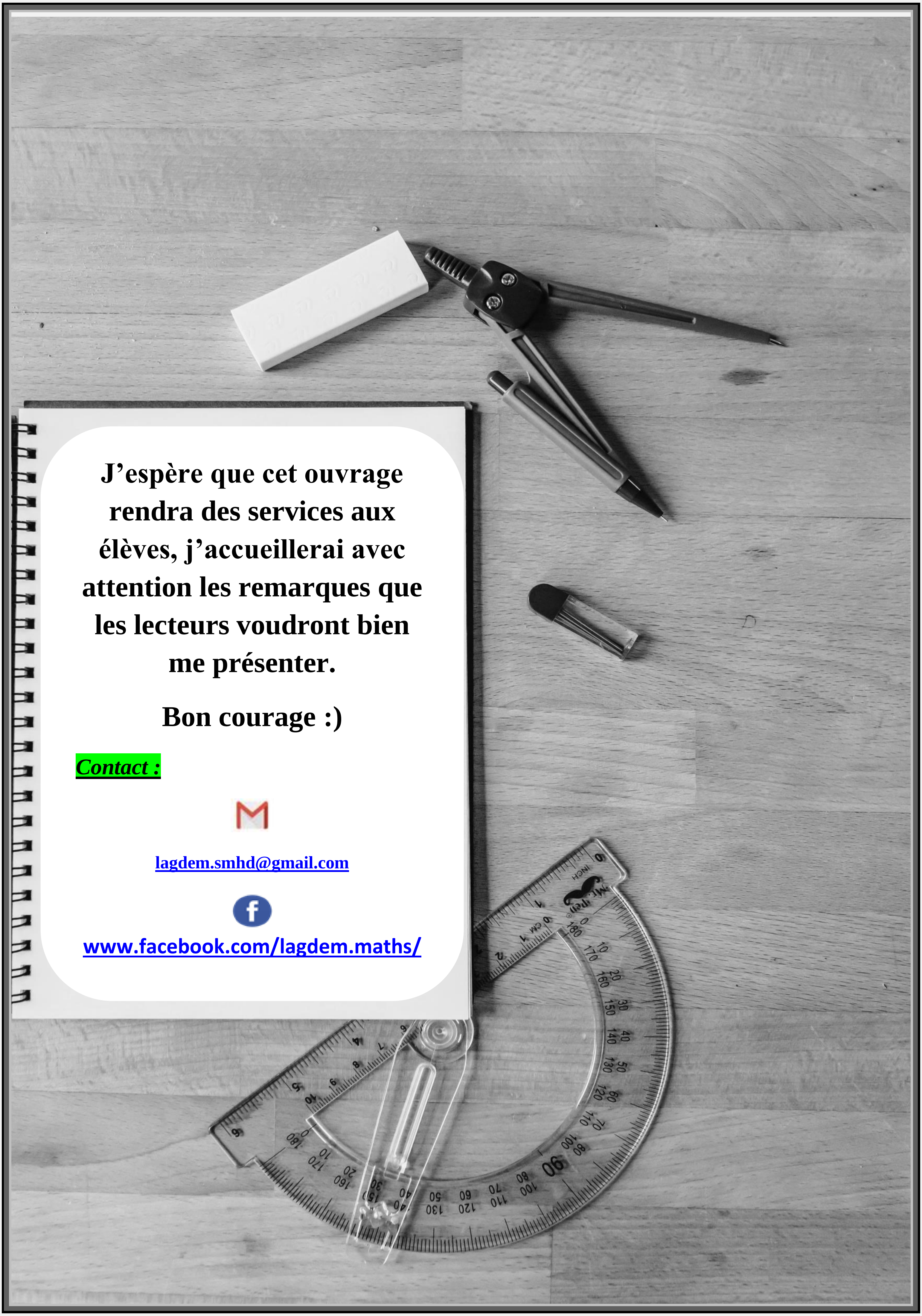
✓ **Remarque :** $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots . p_n = 1$

▪ **L'éspérence mathématique :** $E(X) = x_1.p_1 + x_2.p_2 + x_3.p_3 + \cdots + x_n.p_n$

▪ **La variance :** $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = x_1^2.p_1 + x_2^2.p_2 + x_3^2.p_3 + \cdots + x_n^2.p_n - (E(X))^2$

▪ **L'écart-type** : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

La loi binomiale	Soit A **un événement** de **probabilité** p dans une expérience aléatoire **on répète cette expérience n fois.** **La variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de A** **s'appelle variable aléatoire binomiale de paramètres n et p** on a : $X(\Omega) = \{0,1,2,\dots,n\}$ $\forall k \in \{1,2,\dots n\}$ $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $E(X) = np$ **et** $V(X) = np(1-p)$



J’espère que cet ouvrage rendra des services aux élèves, j’accueillerai avec attention les remarques que les lecteurs voudront bien me présenter.

Bon courage :)

Contact :

lagdem.smhd@gmail.com

www.facebook.com/lagdem.maths/