

Exercice 1

1) Montrer que

$$\left(\sqrt{1+\frac{3}{5}} \times \sqrt{1+\frac{3}{5}}\right) \in \mathbb{Q} \quad // \quad (\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 \in \mathbb{D} \quad // \quad \frac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^{n-1} - 4^n)^3} \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{(9^{n+1} + 9^n)^2}{(3^{2n+1} - 3^{2n})^2} \in \mathbb{N} \quad // \quad \frac{2^m}{5^n} \in \mathbb{D} \quad \text{avec } m \in \mathbb{N} \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}} + 5 \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} \in \mathbb{N}$$

2) soit x un nombre réel strictement positif ($x > 3$) ; tel que

$$x^2 - 3x - 4 = 0. \text{ Montrer que } 2\left(\sqrt{\frac{x-3}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x-3}}\right) \in \mathbb{Z}$$

Exercice 2

1) Rendre le dénominateur de chacun des nombres suivants un entier naturel

$$A = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} ; B = \frac{2+3\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} - \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} ;$$

$$C = 3(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \frac{1}{\sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

2) simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{8^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 63}{5^4 \times 7^3 \times 2^8 \times 9} ; B = \frac{(3^7 \times 2^{-6} \times 9^{-1})^2}{(9^{-2} \times 3^2 \times 2^{-1})^3} ;$$

3) Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$A = 4.5 \times 10^5 \times 6.4 \times 10^4 ; B = \frac{4.8 \times 10^{-13} \times 9 \times 10^4}{1.2 \times 10^{-7}}$$

Exercice 3

on considère les nombres suivants :

$$a = \sqrt{8+2\sqrt{15}} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{8-2\sqrt{15}}$$

1) Calculer $a \times b$ 2) On pose $u = a + b$ et $v = a - b$ a) Calculer u^2 et v^2 puis déduire u et v b) Déduire une écriture simplifiée de a et b .3) On pose $X = \sqrt{17+12\sqrt{2}}$ et $Y = \sqrt{17-12\sqrt{2}}$ Montrer que $XY = 1$ et calculer $(X+Y)^2$ et $(X-Y)^2$

Exercice 4

1. Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$\oplus A = (2x-1)^2 + (x+2)^3 \quad \oplus B = (x+2)(x^2-2x+4)$$

$$\oplus C = (x-3)(x^2+3x+9) \quad \oplus$$

2. factoriser les expressions suivantes

$$\oplus E = x^2 - 4 + (x+3)(x-2) - 3(x-2)^2$$

$$\oplus F = x^3 - 27 + 2(x^2 - 9) - 3x + 9$$

$$\oplus H = x^3 + 1 + 3(x^2 - 1) - x - 1$$

Exercice 5

1) soient x et y deux nombres réels tels que

$$x + y = 2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 6$$

Calculer : xy ; $x^3 + y^3$; $x^4 + y^4$ et $x^6 + y^6$ 2) Soit $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + \frac{1}{a} = 2$.

Calculer les nombres suivants :

$$a^2 + \frac{1}{a^2} ; a^3 + \frac{1}{a^3} \quad \text{et} \quad a^4 + \frac{1}{a^4}$$

Exercice 6

Soit $x \in \mathbb{R}$ 1) Montrer que $1 - x^6 = (1-x)(1+x^2+x^3+x^4+x^5)$ 2) Déduire la valeur de $A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{32}{243}$

Exercice 7

1) Soient x, y et z trois nombres réels non nul tels que

$$xy + xz + yz = 0$$

a) Montrer que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ b) Montrer que $\frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x} = -3$ 2) Soient a, b et c trois nombres réels positifs tels que

$$abc = 1$$

Montrer que $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} = 1$