

Correction d'exercice 1 :

$$1) a - b = -\sqrt{2} - \left(-\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) \\ = -\sqrt{2} + \sqrt{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

Alors $a < b$

$$2) a - b = -\frac{11}{5} - \left(-\frac{12}{5}\right) \\ = -\frac{11}{5} + \frac{12}{5} = \frac{1}{5} > 0$$

Alors $a > b$

$$3) a - b \geq \sqrt{5} > 0$$

Alors $a > b$

$$4) a - b \leq -8 < 0$$

Alors $a < b$

$$5) a - b = -\sqrt{5} \times \frac{7}{4} - \left(-\frac{11}{6}\sqrt{5}\right) \\ = -\frac{7\sqrt{5}}{4} + \frac{11\sqrt{5}}{6} \\ = -\frac{3 \times 7\sqrt{5}}{3 \times 4} + \frac{2 \times 11\sqrt{5}}{2 \times 6} \\ = \frac{-21\sqrt{5} + 22\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{12} > 0$$

Alors $a > b$

$$6) 3a - (a + 2b) = 3a - a - 2b \\ = 2a - 2b \\ = 2(a - b) = \sqrt{2}$$

$$\text{alors } a - b = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

Donc $a > b$

$$7) \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1 \times b - 1 \times a}{a \times b} \\ = \frac{b - a}{ab} = 3$$

alors $b - a = 3ab > 0$ car $a > 0$ et $b > 0$ Donc $b > a$

$$8) a - b = -3x^2 + 11x - (x^2 - x + 9) \\ = -3x^2 + 11x - x^2 + x - 9 \\ = -4x^2 + 12x - 3 \\ = -(4x^2 - 12x + 3) = -(2x - 3)^2$$

On a $(2x - 3)^2 \geq 0$ car l'exposant est pairAlors $-(2x - 3)^2 \leq 0$ Donc $a \leq b$ Correction d'exercice 2 :

1)

$$(2\sqrt{7})^2 = 4 \times 7 = 28 ; (3\sqrt{3})^2 = 9 \times 3 = 27$$

On a $(2\sqrt{7})^2 > (3\sqrt{3})^2$, alors $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$

2)

$$5^2 = 25 ; (2\sqrt{6})^2 = 4 \times 6 = 24$$

On a $5^2 > (2\sqrt{6})^2$ Alors $5 > 2\sqrt{6}$ Donc $-5 < -2\sqrt{6}$

3)

On a $-\sqrt{17}$: **Négatif**, et $2\sqrt{3}$: **Positif**Alors : $-\sqrt{17} < 2\sqrt{3}$

4)

$$(5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50 ; 7^2 = 49$$

On a $(5\sqrt{2})^2 > 7^2$, alors $5\sqrt{2} > 7$ Et puisque $5\sqrt{2}$ et 7 sont de même signe, alors :

$$\frac{1}{5\sqrt{2}} < \frac{1}{7}$$

5)

Étape 1 : Vérifions si $5 - \sqrt{17}$ et $5 - 2\sqrt{5}$ sont de même signe ou non.

$$5^2 = 25 \text{ et } \sqrt{17}^2 = 17 \text{ et } (2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$$

* On a $5^2 > \sqrt{17}^2$ Alors : $5 > \sqrt{17}$ Donc $5 - \sqrt{17} > 0$ * On a $5^2 > (2\sqrt{5})^2$ Alors : $5 > 2\sqrt{5}$ Donc $5 - 2\sqrt{5} > 0$ * Alors $5 - \sqrt{17}$ et $5 - 2\sqrt{5}$ sont de même signeÉtape 2 : Comparons $5 - \sqrt{17}$ et $5 - 2\sqrt{5}$ * D'après l'étape 1, on a $\sqrt{17}^2 < (2\sqrt{5})^2$ alors : $\sqrt{17} < 2\sqrt{5}$ $-\sqrt{17} > -2\sqrt{5}$ $5 - \sqrt{17} > 5 - 2\sqrt{5}$ Et puisque $5 - \sqrt{17} > 5 - 2\sqrt{5}$ sont de mêmesigne, alors : $\frac{1}{5 - \sqrt{17}} < \frac{1}{5 - 2\sqrt{5}}$

Correction d'exercice 3 :

1)

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} \right)^2 \\
 &= \sqrt{7-4\sqrt{3}}^2 - 2 \times \sqrt{7-4\sqrt{3}} \times \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}^2 \\
 &= 7 - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})} + 7 + 4\sqrt{3} \\
 &= 14 - 2\sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} \\
 &= 14 - 2\sqrt{49 - 16 \times 3} \\
 &= 14 - 2\sqrt{49 - 48} = 14 - 2 \times 1 = 12
 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 -4\sqrt{3} &< +4\sqrt{3} \\
 7 - 4\sqrt{3} &< 7 + 4\sqrt{3} \\
 \text{Alors } \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} &< \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

3)

* D'après la question 1, on a

$$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} \right)^2 = 12$$

$$\text{Donc } \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} = (\sqrt{12} \text{ ou } -\sqrt{12})$$

* D'après la question 2, on a :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{7-4\sqrt{3}} &< \sqrt{7+4\sqrt{3}} \\
 \text{alors } \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} &< 0
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$$

Correction d'exercice 4 :

1)

$$\begin{aligned}
 1 &\leq 3t - 1 \leq 2 \\
 1 + 1 &\leq 3t - 1 + 1 \leq 2 + 1 \\
 2 &\leq 3t \leq 3 \\
 \frac{2}{3} &\leq \frac{3t}{3} \leq \frac{3}{3} \\
 \frac{2}{3} &\leq t \leq 1
 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 -3 &\leq \frac{-2x+7}{3} \leq -\frac{1}{3} \\
 -3 \times 3 &\leq \frac{-2x+7}{3} \times 3 \leq -\frac{1}{3} \times 3 \\
 -9 &\leq -2x+7 \leq -1 \\
 -9 - 7 &\leq -2x+7 - 7 \leq -1 - 7 \\
 -16 &\leq -2x \leq -8 \\
 \frac{-8}{-2} &\leq \frac{-2x}{-2} \leq \frac{-16}{-2} \\
 4 &\leq x \leq 8
 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
 -2 &\leq b \leq -1 ; 3 \leq c \leq 4 \\
 -2 + 3 &\leq b + c \leq -1 + 4 \\
 1 &\leq b + c \leq 3
 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
 3 &\leq c \leq 4 ; 1 \leq k \leq 2 \\
 3 \times 1 &\leq c \times k \leq 4 \times 2 \\
 3 &\leq ck \leq 8
 \end{aligned}$$

5)

Puisque b est négatif, alors $-b$ est positif. Donc pour encadrer bc , on commence par encadrer $-bc$

$$\begin{aligned}
 -2 &\leq b \leq -1 ; 3 \leq c \leq 4 \\
 1 &\leq -b \leq 2 \\
 1 \times 3 &\leq -b \times c \leq 2 \times 4 \\
 3 &\leq -bc \leq 8 \\
 -8 &\leq bc \leq -3
 \end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}
 \text{On a } \frac{2c}{k^2} &= 2c \times \frac{1}{k^2} \\
 3 &\leq c \leq 4 ; 1 \leq k \leq 2 \\
 2 \times 3 &\leq 2 \times c \leq 2 \times 4 ; 1^2 \leq k^2 \leq 2^2 \\
 6 &\leq 2c \leq 8 ; 1 \leq k^2 \leq 4 \\
 \frac{1}{4} &\leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{1} \\
 \frac{1}{4} &\leq \frac{1}{k^2} \leq 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6 \times \frac{1}{4} &\leq 2c \times \frac{1}{k^2} \leq 8 \times 1 \\
 \frac{3}{2} &\leq \frac{2c}{k^2} \leq 8
 \end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned}
 \text{On a } b - c &= b + (-c) \\
 -2 &\leq b \leq -1 ; 3 \leq c \leq 4 \\
 &\quad -4 \leq -c \leq -3 \\
 -2 + (-4) &\leq b + (-c) \leq -1 + (-3) \\
 -6 &\leq b - c \leq -4
 \end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned} \text{on a } 5 - 2b + 4c &= 5 + (-2b) + 4c \\ -2 \leq b \leq -1 &; \quad 3 \leq c \leq 4 \\ -2 \times (-1) \leq -2 \times b &\leq -2 \times (-2) \\ 2 \leq -2b &\leq 4 \\ 4 \times 3 \leq 4 \times c &\leq 4 \times 4 \\ 12 \leq 4c &\leq 16 \\ 5 + 2 + 12 \leq 5 + (-2b) + 4c &\leq 5 + 4 + 16 \\ 19 \leq 5 - 2b + 4c &\leq 25 \end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned} -2 \leq b \leq -1 &; \quad 3 \leq c \leq 4 \\ (-1)^2 \leq b^2 \leq (-2)^2 &; \quad 3^2 \leq c^2 \leq 4^2 \\ 1 \leq b^2 \leq 4 &; \quad 9 \leq c^2 \leq 16 \\ 1 + 9 \leq c^2 + b^2 &\leq 4 + 16 \\ 10 \leq c^2 + b^2 &\leq 20 \end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned} \text{On a: } c^2 - 2b^2 &= c^2 + (-2b^2) \\ 9 \leq c^2 \leq 16 &; \quad 1 \leq b^2 \leq 4 \\ -2 \times 4 \leq -2 \times b^2 &\leq -2 \times 1 \\ -8 \leq -2b^2 &\leq -2 \\ 9 + (-8) \leq c^2 + (-2b^2) &\leq 16 + (-2) \\ 1 \leq c^2 - 2b^2 &\leq 14 \end{aligned}$$

11)

$$\begin{aligned} \text{On a: } 2\sqrt{c} - k^2 &= 2\sqrt{c} + (-k^2) \\ 3 \leq c \leq 4 &; \quad 1 \leq k \leq 2 \\ \sqrt{3} \leq \sqrt{c} \leq \sqrt{4} &; \quad 1^2 \leq k^2 \leq 2^2 \\ \sqrt{3} \leq \sqrt{c} \leq 2 &; \quad 1 \leq k^2 \leq 4 \\ 2 \times \sqrt{3} \leq 2 \times \sqrt{c} &\leq 2 \times 2 ; \quad -4 \leq -k^2 \leq -1 \\ 2\sqrt{3} \leq 2\sqrt{c} &\leq 4 \\ 2\sqrt{3} + (-4) \leq 2\sqrt{c} + (-k^2) &\leq 4 + (-1) \\ 2\sqrt{3} - 4 \leq 2\sqrt{c} - k^2 &\leq 3 \end{aligned}$$

(EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT)

Correction d'exercice 5 :

1)

a\

$$y - x - (y + x) = y - x - y - x = -2x$$

puisque $x > 0$, alors, $-2x < 0$

Donc $y - x < y + x$

b\

$$4y + x - (3y + x) = 4y + x - 3y - x = y$$

puisque $y < 0$, alors $4y + x < 3y + x$

2)

c\

$$a + 1 - \left(b + \frac{5}{4}\right) = a + 1 - b - \frac{5}{4} = a - b - \frac{1}{4}$$

Puisque $a \leq b$ alors $a - b \leq 0$

Donc :

$$a - b - \frac{1}{4} \leq 0 - \frac{1}{4}$$

$$D'où: a - b - \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{4} < 0$$

$$\text{Alors } a + 1 < b + \frac{5}{4}$$

d\

$$\begin{aligned} b + \sqrt{7} - (a - 3\sqrt{7}) &= b + \sqrt{7} - a + 3\sqrt{7} \\ &= b - a + 4\sqrt{7} \end{aligned}$$

Puisque $b \geq a$, alors $b - a \geq 0$

Donc $b - a + 4\sqrt{7} \geq 0 + 4\sqrt{7}$

D'où $b - a + 4\sqrt{7} \geq 4\sqrt{7} > 0$

$$\text{Alors } b + \sqrt{7} > a - 3\sqrt{7}$$

Correction d'exercice 6 :

1)

$$\begin{aligned} a - b &= \sqrt{48} - (\sqrt{12} + \sqrt{27}) \\ &= \sqrt{16} \times \sqrt{3} - (\sqrt{4} \times \sqrt{3} + \sqrt{9} \times \sqrt{3}) \\ &= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \\ &= -\sqrt{3} < 0 \\ \text{Alors : } a &< b \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} c - d &= \frac{5 + \sqrt{3}}{2} - \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \\ &= \frac{(5 + \sqrt{3}) \times (\sqrt{3} + 1) - 2 \times 2}{2 \times (\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{5\sqrt{3} + 5 + \sqrt{3}^2 + \sqrt{3} - 4}{2(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{6\sqrt{3} + 4}{2(\sqrt{3} + 1)} > 0, \end{aligned}$$

$$\text{car } 6\sqrt{3} + 4 > 0 \text{ et } 2(\sqrt{3} + 1) > 0$$

$$\text{Alors : } c > d$$

3)

Puisque e et f sont positifs, alors on compare e^2 et f^2 puis on conserve l'ordre.

$$\begin{aligned} e^2 - f^2 &= \sqrt{7 + 2\sqrt{11}}^2 - (\sqrt{3} + 2)^2 \\ &= 7 + 2\sqrt{11} - (\sqrt{3}^2 + 2 \times \sqrt{3} \times 2 + 2^2) \\ &= 7 + 2\sqrt{11} - 3 - 4\sqrt{3} - 4 \\ &= 2\sqrt{11} - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$(2\sqrt{11})^2 = 4 \times 11 = 44 ; (4\sqrt{3})^2 = 16 \times 3 = 48$$

Puisque $(2\sqrt{11})^2 < (4\sqrt{3})^2$, alors $2\sqrt{11} < 4\sqrt{3}$

Donc $e^2 - f^2 = 2\sqrt{11} - 4\sqrt{3} < 0$

D'où $e < f$

4)

On a : $g = 3\sqrt{5} > 0$

et $h = \sqrt{3} - \sqrt{17} < 0$, car $\sqrt{3} < \sqrt{17}$

Alors : $g > h$

Correction d'exercice 7 :

1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \frac{3c-1}{2} \leq 1 \\ \frac{1}{2} \times 2 &\leq \frac{3c-1}{2} \times 2 \leq 1 \times 2 \\ 1 &\leq 3c-1 \leq 2 \\ 1+1 &\leq 3c-1+1 \leq 2+1 \\ 2 &\leq 3c \leq 3 \\ \frac{2}{3} &\leq \frac{3c}{3} \leq \frac{3}{3} \\ \frac{2}{3} &\leq c \leq 1 \end{aligned}$$

2)

On a : $a^2 + bd - b^2 = a^2 + bd + (-b^2)$

$$9 \leq a \leq 16 ; -7 \leq b \leq -6 ; -2 \leq d \leq -1$$

$$9^2 \leq a^2 \leq 16^2 ; (-6)^2 \leq b^2 \leq (-7)^2$$

$$81 \leq a^2 \leq 256 ; 36 \leq b^2 \leq 49$$

$$-49 \leq -b^2 \leq -36$$

* Encadrons bd :

Puisque b et d sont négatifs, alors $-b$ et $-d$ sont positifs, donc pour encadrer bd , on va l'encadrer en utilisant la formule $bd = (-b) \times (-d)$

$$6 \leq -b \leq 7 ; 1 \leq -d \leq 2$$

$$6 \times 1 \leq -b \times (-d) \leq 7 \times 2$$

$$6 \leq bd \leq 14$$

Alors :

$$81 + 6 + (-49) \leq a^2 + bd + (-b^2) \leq 256 + 14 + (-36)$$

$$38 \leq a^2 + bd - b^2 \leq 234$$

3)

$$\text{On a : } \frac{2b-d}{a+b} = (2b-d) \times \frac{1}{a+b}$$

$$9 \leq a \leq 16 ; -7 \leq b \leq -6 ; -2 \leq d \leq -1$$

$$2 \times (-7) \leq 2 \times b \leq 2 \times (-6) ; 1 \leq -d \leq 2$$

$$-14 \leq 2b \leq -12$$

$$-14 + 1 \leq 2b + (-d) \leq -12 + 2$$

$$\text{Alors : } -13 \leq 2b - d \leq -10$$

$$9 + (-7) \leq a + b \leq 16 + (-6)$$

$$2 \leq a + b \leq 10$$

$$\frac{1}{10} \leq \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2}$$

On veut encadrer $(2b-d) \times \frac{1}{a+b}$, mais ici

on a $2b-d$ est négatif, alors on commence par encadrer $-(2b-d)$ qui est positif, puis

$-(2b-d) \times \frac{1}{a+b}$ pour déduire notre encadrement

Alors, on a : $10 \leq -(2b-d) \leq 13$

$$10 \times \frac{1}{10} \leq -(2b-d) \times \frac{1}{a+b} \leq 13 \times \frac{1}{2}$$

$$1 \leq -(2b-d) \times \frac{1}{a+b} \leq \frac{13}{2}$$

$$\text{Donc : } -\frac{13}{2} \leq \frac{2b-d}{a+b} \leq -1$$

4)

Puisque b est négatif, alors il est mieux d'encadrer en utilisant la formule :

$$\text{On a : } a^2 - ab + b^2 = a^2 + a \times (-b) + b^2$$

$$9 \leq a \leq 16 ; -7 \leq b \leq -6$$

D'après la réponse de la question 2, on a :

$$81 \leq a^2 \leq 256 ; 36 \leq b^2 \leq 49$$

* Encadrons $a \times (-b)$:

$$6 \leq -b \leq 7$$

$$9 \times 6 \leq a \times (-b) \leq 16 \times 7$$

$$54 \leq a \times (-b) \leq 112$$

Alors :

$$81 + 54 + 36 \leq a^2 + a \times (-b) + b^2 \leq 256 + 112 + 49$$

$$171 \leq a^2 - ab + b^2 \leq 417$$

$$\sqrt{171} \leq \sqrt{a^2 - ab + b^2} \leq \sqrt{417}$$

Correction d'exercice 8 :

On a $0 \leq y^2 + 4y - x^2 \leq 2$, alors on commence par encadrer $y^2 + 4y$:

$$0 \leq x \leq \sqrt{3} \quad ; \quad 0 \leq y^2 + 4y - x^2 \leq 2$$

$$0^2 \leq x^2 \leq \sqrt{3}^2$$

$$0 \leq x^2 \leq 3$$

$$\text{Donc : } 0 + 0 \leq y^2 + 4y - x^2 + x^2 \leq 2 + 3$$

$$0 \leq y^2 + 4y \leq 5$$

On sait que $(y + 2)^2 = y^2 + 4y + 4$, alors :

$$0 + 4 \leq y^2 + 4y + 4 \leq 5 + 4$$

$$4 \leq (y + 2)^2 \leq 9$$

$$\sqrt{4} \leq \sqrt{(y + 2)^2} \leq \sqrt{9}$$

Puisque y est positif, alors $y + 2$ est positif, donc :

$$\sqrt{(y + 2)^2} = y + 2, \text{ et on a :}$$

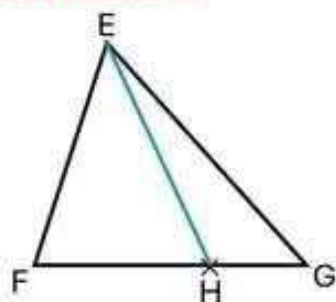
$$\sqrt{4} \leq \sqrt{(y + 2)^2} \leq \sqrt{9}$$

$$2 \leq y + 2 \leq 3$$

$$2 - 2 \leq y + 2 - 2 \leq 3 - 2$$

$$0 \leq y \leq 1$$

Correction d'exercice 9 :



Dans le triangle EFH, on a : $EF < EH + FH$

Alors : $EF + HG < EH + FH + HG$

Et puisque $FH + HG = FG$, alors $EF + HG < EH + FG$

Correction d'exercice 10 :

1)

$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$ car l'exposant est pair.

$$\text{Alors } a^2 + b^2 \geq 2ab$$

2)

D'après la question précédente on a :

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Donc en utilisant la même chose, on trouve que :

$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$

$$a^2 + c^2 \geq 2ac$$

Donc en additionnant les trois inégalités, on a :

$$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + a^2 + c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$$

$$\frac{1}{2} \times (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \geq \frac{1}{2} \times (2ab + 2bc + 2ac)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

3)

a-

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= (a + b + c) \times (a + b + c) \\ &= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2) + 2ab + 2bc + 2ac \\ &= 1 + 2(ab + bc + ac) \end{aligned}$$

b-

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

* D'après la question 2, on a :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

$$\text{Donc } 1 \geq ab + bc + ac$$

c'est-à-dire $ab + bc + ac \leq 1$

* D'après la question précédente, on a :

$$(a + b + c)^2 = 1 + 2(ab + bc + ac)$$

on a $ab + bc + ac \leq 1$

$$\text{Donc : } 2 \times (ab + bc + ac) \leq 2 \times 1$$

$$2(ab + bc + ac) \leq 2$$

$$1 + 2(ab + bc + ac) \leq 1 + 2$$

$$(a + b + c)^2 \leq 3$$

$$\sqrt{(a + b + c)^2} \leq \sqrt{3}$$

Puisque a, b, c sont positifs, alors $a + b + c$ est positif, et donc : $\sqrt{(a + b + c)^2} = a + b + c$

Alors :

$$\sqrt{(a + b + c)^2} \leq \sqrt{3}$$

$$a + b + c \leq \sqrt{3}$$