

EL HAJJAJI MATHS

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

LES METHODES PAS A PAS

CORRIGES DÉTAILLÉS ET EXPLIQUES



IDEGH
OULED JERRAR

2^{ÈME} ANNÉE BACCALAURÉAT
SCIENCES EXPÉRIMENTALES (PC, SVT, ...)

TOME 1

LA DERIVABILITE

Écrit et réalisé par : Prof. **EL BACHIR EL HAJJAJI**

الأستاذ: البشير الحجاجي



أستاذ التعليم الثانوي التأهيلي
بشكائوية المسيرة الخضراء التأهيلية
المديرية الإقليمية تيزنيت.

شُكْرٌ خَاصٌّ

الشُّكْرُ المَوْضُولُ لِكُلِّ مَنْ:

الأستاذ: إبراهيم الحجاجي، أخي الأكبر
وصاحب الفضل الكبير

السيد: إبراهيم إضرصار، المدير الاقليمي
بالمديرية الإقليمية تيزنيت، على دعمه
المتواصل

السيد: حسن بوليد، مفتش مادة الرياضيات
بالمديرية الإقليمية تيزنيت

فَسَلِّمُوا الدُّعَاءَ

مُقدِّمة

الحَمْدُ لِلَّهِ ، وَالصَّلَاةُ وَالسَّلَامُ عَلَى مَوْلَانَا رَسُولِ اللَّهِ .
تَرَامُنَا مَعَ بِدَايَةِ الدُّخُولِ الْمُدْرَسِيِّ 2020-2021 ، وَالَّذِي
يَتَّسِعُهُ بِظُرُوفٍ خَاصَّةٍ ، أُهْدِي لِتِلَامِيذِ السَّنَةِ
الثَّانِيَةِ بَعَاوَرِيَا عُلُومِ تَجْرِبِيَّةٍ ، بِجَمِيعِ مَسَالِكِهَا
هَذَا الْعَمَلُ الْمُتَوَاضِعُ الَّذِي يَحْتَوِي عَلَى تَمَارِينِ
مَحَلُولَةٍ ، وَكَذَا تَمَارِينِ لِلْبَحْثِ . رَاجِيًا مِنْ
الْعَالِي الْقَدِيرِ أَنْ لَا تُنْسَوْنَا مِنْ خَالِصِ دُعَائِكُمْ

يَحَظُّ الْبَشِيرُ الْحَجَّاجِي
اسْتَاذُ مَادَّةِ الرِّيَاضِيَّاتِ
الثَّانَوِيَّةِ التَّأْهِيلِيَّةِ الْمَسِيرَةِ الْخَضِرَاءِ
الْمَدِيرِيَّةِ الْإِقْلِيمِيَّةِ تِينِيَّةِ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

نَسْأَلُكَ الدُّعَاءَ

EXERCICE 1

En utilisant la définition, déterminer le nombre dérivé de la fonction f en x_0 , puis donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0 dans chacun des cas suivants:

1) $f(x) = -3x - 1$ et $x_0 = 2$

2) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ et $x_0 = -1$

3) $f(x) = \sin(2x)$ et $x_0 = 0$

CORRECTION

$$\begin{aligned} \text{1) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x - 1 + 7}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x + 6}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x - 2)}{x - 2} \\ &= -3 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en $x_0 = 2$ et on a :

$$f'(2) = -3$$

$$f(2) = -7$$

$$f'(2) = -3$$

Une équation cartésienne de la tangente (T) au point $A(2; -7)$ est : (T) : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$$\begin{aligned} &= -3(x - 2) - 7 \\ &= -3x + 6 - 7 \\ &= -3x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 4x + 1 - 7}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2x - 6)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 6) \\ &= -8 \end{aligned}$$

f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

l : Le nombre dérivé de f en x_0 .

On écrit : $f'(x_0) = l$



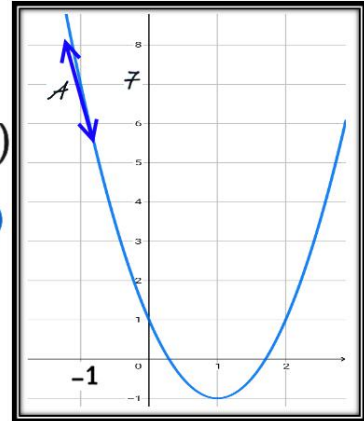
Ici, si on remplace x par -1 , on trouve la forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ ". Dans ce cas, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x + 1)$, puis réduire par $(x + 1)$ 🧐

Donc f est dérivable en $x_0 = -1$ et on a :

$$f'(-1) = -8$$

Une équation cartésienne de la tangente (T) au point $A(-1; 7)$ est : (T) : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$$\begin{aligned} &= -8(x+1) + 7 \\ &= -8x - 8 + 7 \\ &= -8x - 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{3} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} \\ &= 2 \times 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et on a :

$$f'(0) = 2$$

Une équation cartésienne de la tangente (T) au point $O(0, 0)$ est : (T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$= 2x + 0$$

$$(T) : y = 2x$$

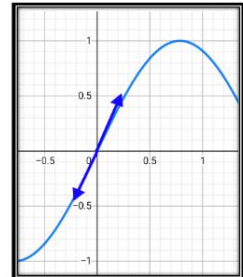
f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

l : Le nombre dérivé de f en x_0 .

On écrit : $f'(x_0) = l$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$



EXERCICE 2

En utilisant la définition, déterminer le nombre dérivé de la fonction f en x_0 , puis donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0 dans chacun des cas suivants :

$$\textcircled{1} \sim f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} \text{ et } x_0 = 1$$

$$\textcircled{2} \sim f(x) = \sqrt[3]{3 + 2x} \text{ et } x_0 = -1$$

$$\textcircled{3} \sim f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 2} + \sqrt{x + 3} \text{ et } x_0 = 0$$

CORRECTION

$$① \sim \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 2} - 2)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2}^2 - 2^2}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2 - 4}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)}{(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)}$$

$$= \frac{3}{4}$$

Donc f est dérivable en $x_0 = 1$ et on a : $f'(1) = \frac{3}{4}$

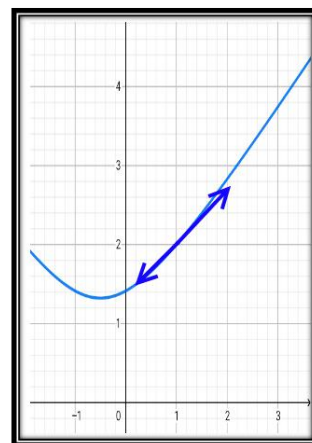
Une équation cartésienne de la tangente (T)

au point $A(1; 2)$ est : (T) : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$$= \frac{3}{4}(x - 1) + 2$$

$$= \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + 2$$

$$(T) : y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$



Si on remplace x par 0, on trouve la forme " $\frac{0}{0}$ "



$\frac{0}{0}$ et la racine carrée, on pense à multiplier par le conjugué.

لَا إِلَهَ إِلَّا أَنْتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنْتُ مِنَ الظَّالِمِينَ

$$② \sim \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{3 + 2x} - 1}{x + 1}$$

f est dérivable en x_0

si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

l : Le nombre dérivé de f en x_0 .

On écrit : $f'(x_0) = l$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt[3]{3+2x}-1)(\sqrt[3]{3+2x}^2+1.\sqrt[3]{3+2x}+1^2)}{(x+1)(\sqrt[3]{3+2x}^2+1.\sqrt[3]{3+2x}+1^2)}$$

Si on remplace x par 0, on trouve la forme " $\frac{0}{0}$ "

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt[3]{3+2x})^3-1^3}{(x+1)(\sqrt[3]{3+2x}^2+\sqrt[3]{3+2x}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3+2x-1}{(x+1)(\sqrt[3]{3+2x}^2+\sqrt[3]{3+2x}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+2}{(x+1)(\sqrt[3]{3+2x}^2+\sqrt[3]{3+2x}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)(\sqrt[3]{3+2x}^2+\sqrt[3]{3+2x}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{(\sqrt[3]{3+2x}^2+\sqrt[3]{3+2x}+1)}$$

$$= \frac{2}{3}$$

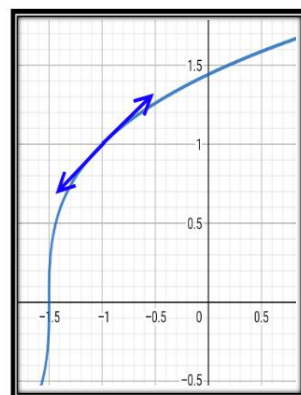
Donc f est dérivable en $x_0=-1$ et on a : $f'(-1)=\frac{2}{3}$

Une équation cartésienne de la tangente (T) au point A(-1;1) est : (T): $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

$$= \frac{2}{3}(x+1)+1$$

$$= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + 1$$

$$(T): y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$



$$\boxed{3} \sim \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^2-x+2} + \sqrt{x+3} - 3}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^2-x+2}-2 + \sqrt{x+3}-1}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^2-x+2}-2}{x+2} + \frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^2-x+2}-2^3}{(x+2)(\sqrt[3]{x^2-x+2}^2+2\sqrt[3]{x^2-x+2}+2^2)} + \frac{(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$

Il faut séparer $\sqrt$ et $\sqrt[3]$
En remarquant que :

$$\sqrt[3]{x^2-x+2} \rightarrow 2$$

$$\sqrt{x+3} \rightarrow 1$$

puis multiplier chacun par son conjugué.

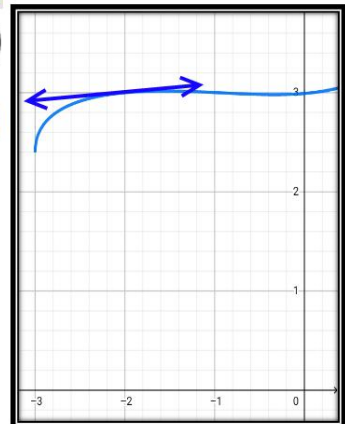
$$a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x + 2 - 8}{(x+2)(\sqrt[3]{x^2 - x + 2} + 2\sqrt[3]{x^2 - x + 2} + 4)} + \frac{\sqrt{x+3} - 1^2}{(x+2)(\sqrt{x+3} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{(x+2)(\sqrt[3]{x^2 - x + 2} + 2\sqrt[3]{x^2 - x + 2} + 4)} + \frac{x+3-1}{(x+2)(\sqrt{x+3} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(\sqrt[3]{x^2 - x + 2} + 2\sqrt[3]{x^2 - x + 2} + 4)} + \frac{(x+2)}{(x+2)(\sqrt{x+3} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{(\sqrt[3]{x^2 - x + 2} + 2\sqrt[3]{x^2 - x + 2} + 4)} + \frac{1}{(\sqrt{x+3} + 1)} \\
 &= \frac{-5}{12} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en $x_0=1$ et on a : $f'(-2) = \frac{1}{12}$

Une équation cartésienne de la tangente (T) au point $A(-2;3)$ est : (T) : $y = f'(-2)(x+2) + f(2)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{12}(x+2) + 3 \\
 &= \frac{1}{12}x + \frac{1}{6} + 3 \\
 (T) : y &= \frac{1}{12}x + \frac{19}{6}
 \end{aligned}$$



EXERCICE 3

Étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 . Dans les deux cas suivants, puis donner une interprétation géométrique aux résultats obtenus.

① $f(x) = |x|$ et $x_0 = 0$

② $f(x) = |x-2|$ et $x_0 = 2$

CORRECTION

① Ici, on a $x \rightarrow 0$, ce qui entraîne : $|x| \rightarrow 0$
Dans ce cas, il faut distinguer les deux cas :

$$\begin{aligned}
 &x \rightarrow 0^+ \Rightarrow |x| = x \\
 &x \rightarrow 0^- \Rightarrow |x| = -x
 \end{aligned}$$

La dérivabilité de f en $x_0=0$ à droite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en $x_0=0$ à droite et on a : $f'_d(0)=1$

La dérivabilité de f en $x_0=0$ à gauche

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en $x_0=0$ à gauche et on a : $f'_g(0)=-1$

Puisque $f'_g(0) \neq f'_d(0)$

Alors f n'est pas dérivable en $x_0=0$

Interprétation graphique

(C_f) admet deux demi-tangentes au point $O(0,0)$

Une demi-tangente à droite du point

$O(0,0)$ coefficient directeur égale à 1

Une demi-tangente à gauche du point

$O(0,0)$ coefficient directeur égale à -1

Remarque

Le point O est appelé : Point anguleux

2. $f(x)=|x-2|$; $x_0=2$

Ici, on a $x \rightarrow 2$, ce qui entraîne : $|x-2| \rightarrow 0$

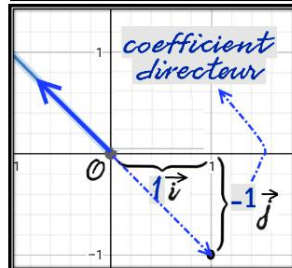
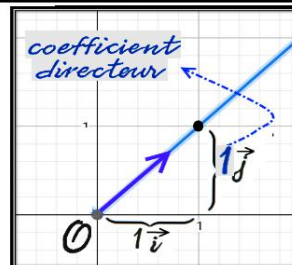
Dans ce cas, il faut distinguer les deux cas :

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow |x-2| = x-2$$

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$$

Interprétation graphique

Il faut juste dire l'influence d'un résultat analytique à la courbe.



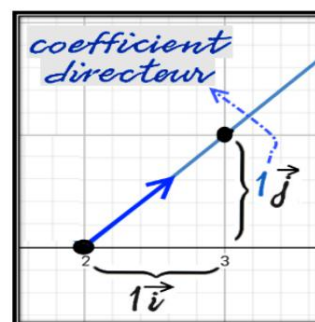
☛ La dérivabilité de f en $x_0=2$ à droite

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc f est dérivable en $x_0=2$ à droite et on a : $f'_d(2)=1$

Interprétation graphique

☛ (C_f) admet une demi-tangente à droite du point $A(2;0)$ coefficient directeur égal à 1



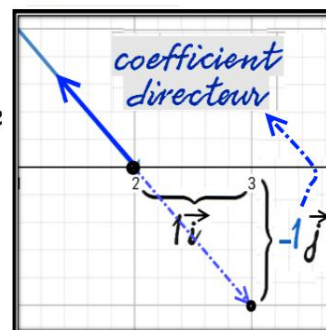
☛ La dérivabilité de f en $x_0=2$ à gauche

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{x - 2} \\ &= -1\end{aligned}$$

Donc f est dérivable en $x_0=2$ à gauche et on a : $f'_g(2)=-1$

Interprétation graphique

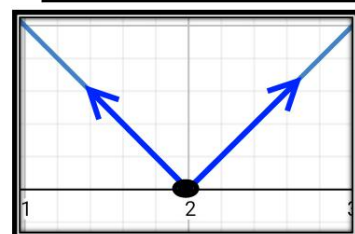
☛ (C_f) admet une demi-tangente à gauche du point $A(2;0)$ coefficient directeur égal à -1



Conclusion

Puisque $f'_g(2) \neq f'_d(2)$

Alors f n'est pas dérivable en $x_0=2$



EXERCICE 4

لَا إِلَهَ إِلَّا أَنْتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنْتُ مِنَ الظَّالِمِينَ

Étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 dans les deux cas suivants, puis donner une interprétation géométrique aux résultats obtenus.

1) $f(x) = \sqrt{x-1}$; $x_0 = 1$ à droite

2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$; $x_0 = -1$ à gauche

CORRECTION

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} - 0}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} \sqrt{x-1}}{(x-1) \sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)}{(x-1) \sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad \left[\frac{1}{0^+} = +\infty \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Il suffit de multiplier par le conjugué

Le conjugué de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ lui-même

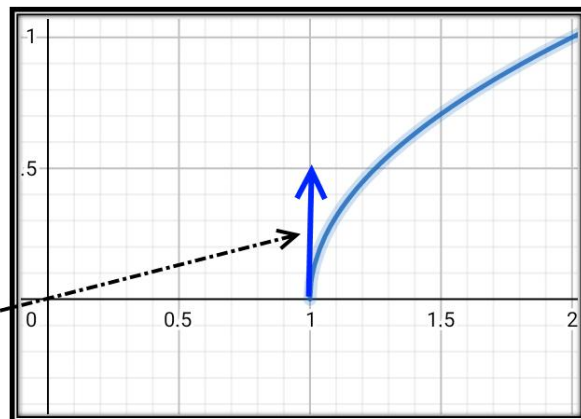
Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ à droite

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente verticale à droite du point A(1,0) (Dirigée vers le haut)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \dots = +\infty$$

$$+ \times + = +$$



Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Il suffit de multiplier par le conjugué

$$\begin{aligned} 2) \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt[3]{x^2-1} - 0}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt[3]{x^2-1} \sqrt[3]{x^2-1}^2}{(x+1) \sqrt[3]{x^2-1}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}^3}{(x+1)\sqrt[3]{x^2-1}^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)\sqrt[3]{x^2-1}^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1)}{\sqrt[3]{x^2-1}^2} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

Le conjugué de $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{a}^2$

$$\frac{-2}{0^+} = -\infty$$

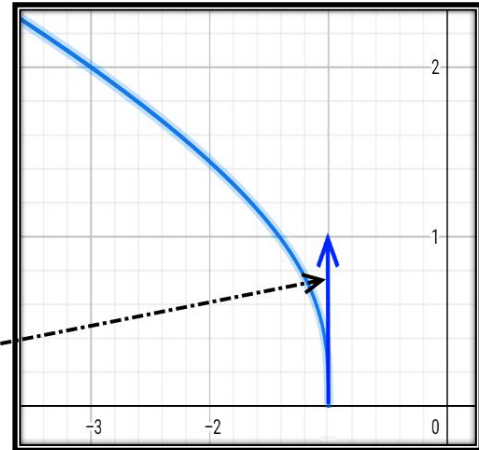
Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$ à gauche

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente verticale à droite du point A(1,0) (Dirigée vers le haut)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \dots = -\infty$$

$\ominus \times \ominus = +$



EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par: $\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x + 3; x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{3x+1} - x; x > 1 \end{cases}$

- ① ~ Déterminer $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f
- ② ~ Montrer que f est continue en $x_0 = 1$
- ③ ~ Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

CORRECTION

- ① ~ Déterminons $\mathcal{D}_f$

Notons: $\begin{cases} f_1(x) = f(x); x \leq 1 \\ f_2(x) = f(x); x > 1 \end{cases}$

On aura donc $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_1} \cup \mathcal{D}_{f_2}$



$$x \in \mathcal{D}_{f_1} \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}) \text{ et } x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 3; x \leq 1$$

Donc $\mathcal{D}_{f_1} =]-\infty; 1]$



$$x \in \mathcal{D}_{f_2} \Leftrightarrow 3x+1 \geq 0 \text{ et } x > 1$$

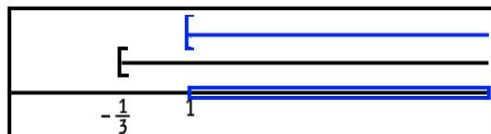
$$\Leftrightarrow 3x \geq -1 \text{ et } x > 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3} \text{ et } x > 1$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

$$f(x) = \sqrt{3x+1} - x; x > 1$$

$$\sqrt{u(x)} \rightarrow u(x) \geq 0$$



Donc $\mathcal{D}_{f_2} =]1; +\infty[$

On a : $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_1} \cup \mathcal{D}_{f_2}$

$$=]-\infty; 1] \cup]1; +\infty[$$

D'où : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2. Montrons que f est continue en $x_0 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 3x + 3 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{3x+1} - x = 1$

$f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 3 = 1$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

Alors f est continue en $x_0 = 1$

Si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$

Alors f est continue en x_0 .

3. La dérivabilité de f en $x_0 = 1$ à droite



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{3x+1} - x - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{3x+1} - 2 + 2 - x + 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x - 1} + \frac{-x + 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{3x+1} - 2)(\sqrt{3x+1} + 2)}{(x - 1)(\sqrt{3x+1} + 2)} + \frac{-(x - 1)}{(x - 1)}$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} - 1 \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x-3}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} - 1 \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} - 1 \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} - 1 \\
&= \frac{3}{4} - 1 \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Il suffit de multiplier par le conjugué

Mais, en remarquant que $\sqrt{3x+1} \rightarrow 2$, ça sera mieux de soustraire 2 et de l'ajouter puis séparer les limites

Donc f est dérivable en $x_0=0$ à droite et on a: $f'_d(1) = -\frac{1}{4}$

 La dérivabilité de f en $x_0=1$ à gauche

$$\begin{aligned}
&\triangle \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-3x+3-1}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-3x+2}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Ici, si on remplace x par -2 on trouve la forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ ". Dans ce cas, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-1)$, puis réduire par $(x-1)$. 

Si $x_0 \neq 0$ est une racine de ax^2+bx+c , alors
 $ax^2+bx+c = (x-x_0)\left(ax - \frac{c}{x_0}\right)$

Donc f est dérivable en $x_0=0$ à gauche et on a: $f'_g(1) = -1$

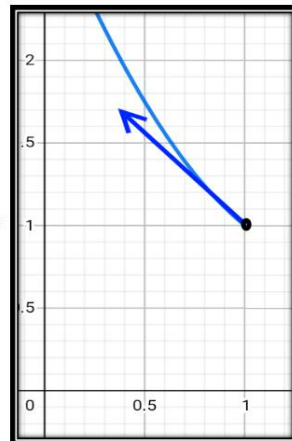
Conclusion

Puisque $f'_g(1) \neq f'_d(1)$

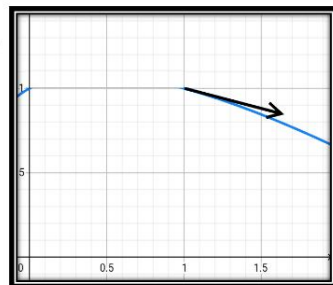
Alors f n'est pas dérivable en $x_0=1$

Interprétation graphique

 (C_f) admet une demi-tangente à gauche du point $A(1;1)$ coefficient directeur égal à $-\frac{1}{4}$



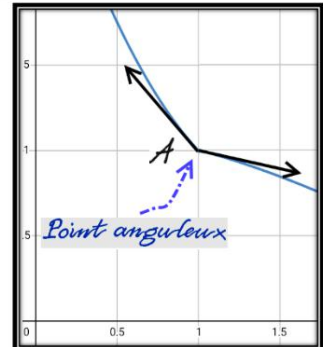
☞ (C_f) admet une demi-tangente à droite du point $A(1;1)$ coefficient directeur égal à $-\frac{1}{4}$



Remarque

Le point A est appelé :

Point anguleux



EXERCICE 6

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(x)}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

① ~ Montrer que f est continue en $x_0 = 0$

② ~ Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

CORRECTION

① ~ Montrons que f est continue en $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos(2x)}{(2x)^2} \times (2x)^2}{x \times \frac{\sin(x)}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos(2x)}{(2x)^2} \times 4x^2}{\frac{\sin(x)}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos(2x)}{(2x)^2} \times 4x}{\frac{\sin(x)}{x}} \end{aligned}$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ ".
Et puisqu'on a $\cos(0)$ et $\sin(0)$
Alors, il faut juste penser à

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 0$$

$$= 0$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Alors f est continue en $x_0 = 0$

2. La dérivabilité de f en $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(x)} - 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{(2x)^2} \times (2x)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \times x \times \frac{\sin(x)}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{(2x)^2} \times \frac{4x^2}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4$$

$$= \frac{1}{2} \times 4$$

$$= 2$$

Donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et on a :

$$f'(0) = 2$$

Interprétation graphique

(C_f) admet une tangente au point $O(0,0)$ coefficient directeur égal à 2

f est continue en x_0
si et seulement si
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

f est dérivable en x_0
si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

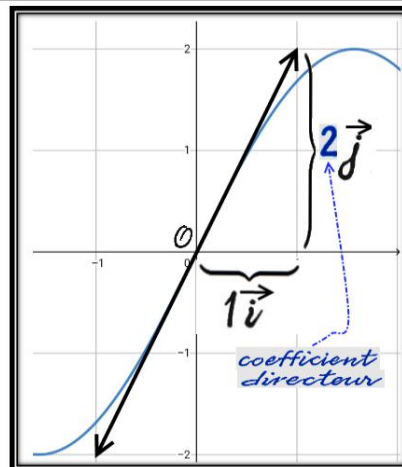
l : Le nombre dérivé
de f en x_0 .

On écrit : $f'(x_0) = l$

Si on remplace, on
trouve la forme
indéterminer " $\frac{0}{0}$ ".
Et puisqu'on a
 $\cos(0)$ et $\sin(0)$
Alors, il faut
juste penser à

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$



EXERCICE 7

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x}$$

- 1 ~ Déterminer D_f le domaine de définition de f
- 2 ~ Étudier la dérivabilité de f à droite de 2 et à gauche de 0, puis donner une interprétation graphique aux résultats obtenus

CORRECTION

- 1 ~ Déterminons D_f

$$x \in D_f \iff x^2 - 2x \geq 0$$

$$\iff x(x-2) \geq 0$$

Étudions le signe de $x(x-2)$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	-	○	+	+
$x-2$	-	-	○	+
$x(x-2)$	+	○	-	+

Donc : $D_f =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$

ERREUR
404

Si $x(x-2) \geq 0$

Alors $x \geq 0$ ou $x-2 \geq 0$



Ça va très bien !

Pour étudier le signe de $x(x-2) \geq 0$
ça sera mieux de dresser le tableau de signe

- 2 ~ La dérivabilité de f en $x_0 = 2$ à droite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x} - 1}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 2x} \sqrt{x^2 - 2x}}{(x - 2) \sqrt{x^2 - 2x}} \end{aligned}$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 - \frac{x^2 - 2x}{(x-2)\sqrt{x^2 - 2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 - \frac{x(x-2)}{(x-2)\sqrt{x^2 - 2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x}} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

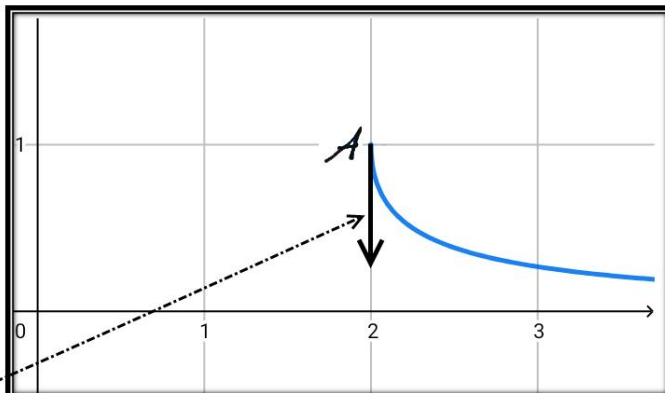
$$1 - \frac{2}{0^+} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 2$ à droite

Interprétation graphique

(Cf) admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(2,1)$ (Dirigée vers le bas)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2^+} \dots &= -\infty \\
 \oplus \times \ominus &= \ominus
 \end{aligned}$$



Il suffit de multiplier par le conjugué

Mais, en remarquant que $x-2 \rightarrow 0$ et $\sqrt{x^2 - 2x} \rightarrow 0$ ça sera mieux de séparer les limites

La dérivabilité de f en $x_0 = 0$ à gauche

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x} + 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 2x} \sqrt{x^2 - 2x}}{x \sqrt{x^2 - 2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{x^2 - 2x}{x \sqrt{x^2 - 2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{x(x-2)}{x \sqrt{x^2 - 2x}}
 \end{aligned}$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à gauche, il faut calculer la limite:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Il suffit de multiplier par le conjugué

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{(x-2)}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0=0$ à gauche

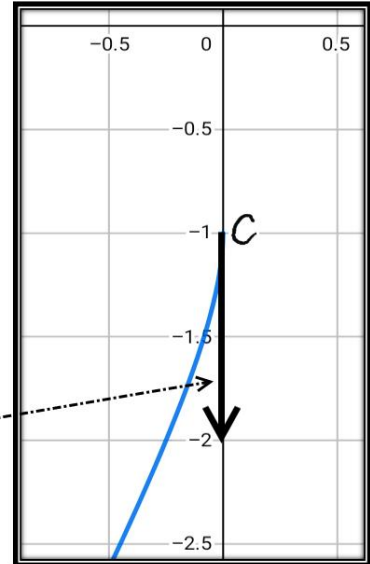
Interprétation graphique

☞ (C_f) admet une demi-tangente verticale à gauche du point $C(0, -1)$ (Dirigée vers le bas)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \dots = +\infty$$

$$\ominus \times + = \ominus$$

Mais, en remarquant que $x \rightarrow 0$ et $\sqrt{x^2-2x} \rightarrow 0$ ça sera mieux de séparer les limites



EXERCICE 8

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x - \sqrt[3]{2-x}$$

- 1 ~ Déterminer D_f le domaine de définition de f
- 2 ~ Étudier la dérivabilité de f à gauche de 2, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

CORRECTION

- 1 ~ Déterminons D_f

$$x \in D_f \iff 2-x \geq 0$$

$$\iff -x \geq -2$$

$$\iff x \leq 2$$

Donc: $D_f =]-\infty; 2]$

- 2 ~ La dérivabilité de f en $x_0=2$ à gauche

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - \sqrt[3]{2-x} - 2}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{x - 2} - \frac{\sqrt[3]{2-x}}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 - \frac{\sqrt[3]{2-x} (\sqrt[3]{2-x})^2}{(x - 2) (\sqrt[3]{2-x})^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 - \frac{(\sqrt[3]{2-x})^3}{(x - 2) (\sqrt[3]{2-x})^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 - \frac{2 - x}{(x - 2) (\sqrt[3]{2-x})^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 + \frac{x - 2}{(x - 2) (\sqrt[3]{2-x})^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 + \frac{1}{(\sqrt[3]{2-x})^2} \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$ à gauche

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente verticale à gauche du point $A(2, 2)$ (Dirigée vers le bas)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \dots = +\infty$$

$$\boxed{-} \times \boxed{+} = \boxed{-}$$

EXERCICE 9

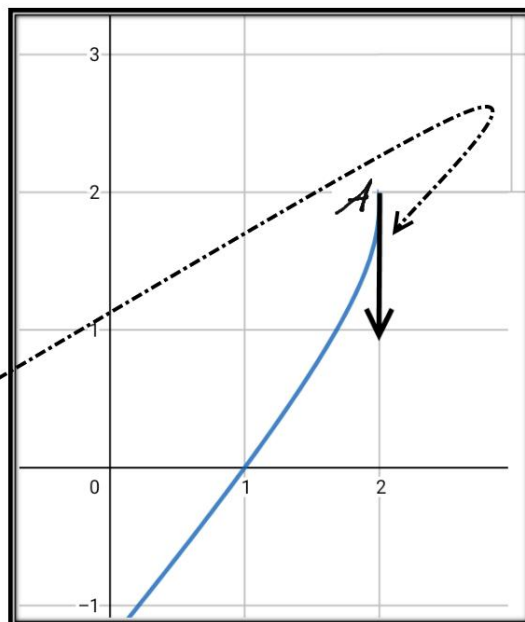
Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à gauche, il faut calculer la limite:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il suffit de multiplier par le conjugué

Mais, en remarquant que $x - 2 \rightarrow 0$ et $\sqrt[3]{2-x} \rightarrow 0$ ça sera mieux de séparer les limites

Le conjugué de $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{a}^2$



On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

- 1 ~ Déterminer D_f le domaine de définition de f
- 2 ~ Étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$ puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

CORRECTION

- 1 ~ Déterminons D_f

$$x \in D_f \iff (x-1)^2 \geq 0$$

$$\iff x \in \mathbb{R}$$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$



$$\sqrt[n]{u(x)} \text{ ----- } \rightarrow u(x) \geq 0$$

$$\text{car } (\forall x \in \mathbb{R}); (x-1)^2 \geq 0$$

- 2 ~ La dérivabilité de f en $x_0=1$ à droite

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} - 0}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} \sqrt[3]{(x-1)}}{(x-1) \sqrt[3]{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^3}}{(x-1) \sqrt[3]{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)}{(x-1) \sqrt[3]{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}}$$

$$= +\infty$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Il suffit de multiplier par le conjugué

Le conjugué de $\sqrt[3]{a^2}$ et $\sqrt[3]{a}$

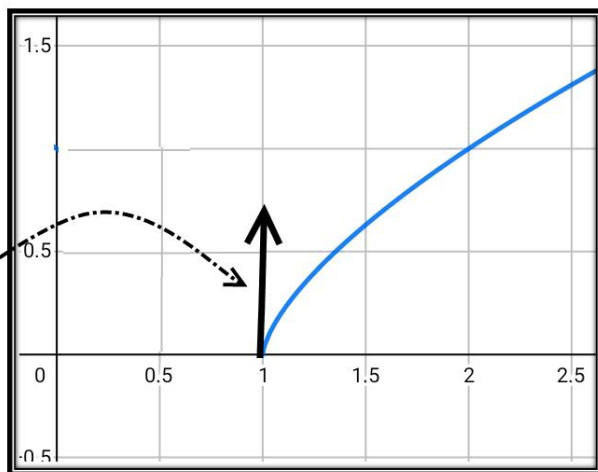
Donc f n'est pas dérivable en $x_0=1$ à droite

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente verticale à droite du point A(1,0) (Dirigée vers le haut)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \dots = +\infty$$

$\oplus \times \oplus = \oplus$



La dérivabilité de f en $x_0=1$ à gauche

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[3]{(1-x)^2}}{-(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1-x)^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -\sqrt[3]{\frac{(1-x)^2}{(1-x)^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -\sqrt[3]{\frac{1}{1-x}} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à gauche, il faut calculer la limite:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Il suffit de multiplier par le conjugué

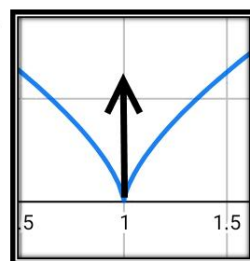
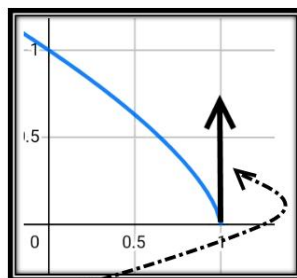
Le conjugué de $\sqrt[3]{a^2}$ et $\sqrt[3]{a}$

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente verticale à gauche du point A(1,0) (Dirigée vers le haut)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \dots = -\infty$$

$\ominus \times \ominus = \oplus$



EXERCICE 10

Soit f la fonction définie par: $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

- ① ~ Montrer que f est continue en $x_0 = 0$ à droite
- ② ~ Étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

CORRECTION

- ① ~ Montrer que f est continue en $x_0 = 0$ à droite

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \times x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{x}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{\sqrt[3]{x}^3}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \times \sqrt[3]{x}^2 \\ &= 1 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et puisque: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$

Alors f est continue en $x_0 = 0$ à droite

- ② ~ La dérivabilité de f en $x_0 = 0$ à droite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x} \times x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

f est continue en x_0 à droite si et seulement si: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$

Si on remplace, on trouve indéterminer " $\frac{0}{0}$ ". Et puisqu'on a $\sin(0)$. Alors, il faut juste penser à: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}} \times \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$= +\infty$$

car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$

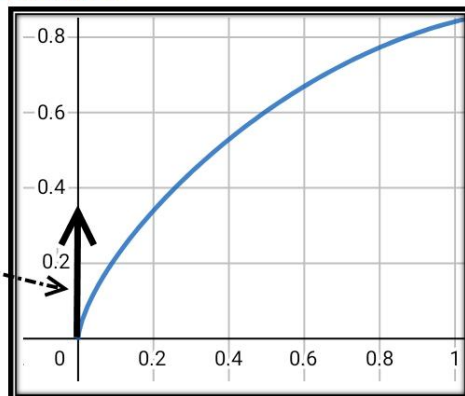
Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ à droite

Interprétation graphique

(C_f) admet une
demi-tangente verticale
à droite du point $O(0,0)$
(Dirigée vers le haut)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \dots = +\infty$$

$$+ \times + = +$$



EXERCICE 11

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f définie par :

① $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + \frac{x^2}{4} - x + 10$ ② $f(x) = x(\sqrt{x} - 1)$

③ $f(x) = (5x + 1)\cos(x)$ ④ $f(x) = x^3 \sin^2(x)$

CORRECTION

① $f'(x) = (x^5 - 3x^4 + 2x^3 + \frac{x^2}{4} - x + 10)'$

$$= 5x^4 - 3 \cdot 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 + \frac{1}{4} \cdot 2x - 1 + 0$$

D'où : $f'(x) = 5x^4 - 3 \cdot 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 + \frac{1}{4} \cdot 2x - 1 + 0$

$$a' = 0 \quad (ax)' = a$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(ax^n)' = a n x^{n-1}$$

② $f'(x) = (x(\sqrt{x} - 1))'$

$$= x'(\sqrt{x} - 1) + x(\sqrt{x} - 1)'$$

$$= 1(\sqrt{x} - 1) + x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 0\right)$$

$$= \sqrt{x} - 1 + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - 2 + \sqrt{x}}{2}$$

D'où : $f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - 2}{2}$

$$\begin{aligned} [3] \sim f'(x) &= ((5x+1)\cos(x))' \\ &= (5x+1)' \cos(x) + (5x+1)(\cos(x))' \\ &= 5 \cos(x) - (5x+1) \sin(x) \end{aligned}$$

D'où : $f'(x) = 5 \cos(x) - (5x+1) \sin(x)$

$$\begin{aligned} [4] \sim f'(x) &= (x^3 \sin^2(x))' \\ &= (x^3)' \sin^2(x) + x^3 (\sin^2(x))' \\ &= 3x^2 \sin^2(x) + x^3 \cdot 2 (\sin(x))' (\sin(x)) \\ &= 3x^2 \sin^2(x) + x^3 \cdot 2 \cos(x) \sin(x) \\ &= x^2 (3 \sin(x) + 2x \cos(x)) \sin(x) \end{aligned}$$

D'où : $f'(x) = x^2 (3 \sin(x) + 2x \cos(x)) \sin(x)$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(ax)' = a$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

EXERCICE 12

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f définie par :

$$[1] \sim f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$[2] \sim f(x) = \frac{3}{2x^2-1}$$

$$[3] \sim f(x) = \frac{3x-1}{4x^2+1}$$

$$[4] \sim f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

CORRECTION

$$\begin{aligned} [1] \sim f'(x) &= \left(\frac{1}{x-1} \right)' \\ &= -\frac{(x-1)'}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

D'où : $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$

$$\begin{aligned} [2] \sim f'(x) &= \left(\frac{3}{2x^2-1} \right)' \\ &= 3 \left(\frac{1}{2x^2-1} \right)' \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(ax)' = a$$

$$a' = 0$$

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \text{ tel que } k \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$= 3 \frac{-(2x^2-1)'}{(2x^2-1)^2}$$

$$= 3 \frac{-4x}{(2x^2-1)^2}$$

$$= -\frac{12x}{(2x^2-1)^2}$$

D'où : $f'(x) = -\frac{12x}{(2x^2-1)^2}$

3) $f'(x) = \left(\frac{3x-1}{4x^2+1} \right)'$

$$= \frac{(3x-1)'(4x^2+1) - (4x^2+1)'(3x-1)}{(4x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3(4x^2+1) - 8x(3x-1)}{(4x^2+1)^2}$$

$$= \frac{12x^2 - 24x^2 + 8x}{(4x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-12x^2 + 8x}{(4x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x(2-3x)}{(4x^2+1)^2}$$

D'où : $f'(x) = \frac{4x(2-3x)}{(4x^2+1)^2}$

4) $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)'$

$$= \frac{(\sin(x))' \cdot x - x' \sin(x)}{x^2}$$

$$= \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x)}{x^2}$$

D'où : $f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(ax)' = a \quad a' = 0$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x) \quad (ax)' = a$$

EXERCICE 13

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f définie par :

$$\boxed{1} \sim f(x) = \left(\frac{2x}{3x+1} \right)^3$$

$$\boxed{2} \sim f(x) = (2\sqrt{x} - 1)^5$$

$$\boxed{3} \sim f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x + 3}$$

$$\boxed{4} \sim f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$$

CORRECTION

$$\boxed{1} \sim f'(x) = \left(\left(\frac{2x}{3x+1} \right)^3 \right)'$$

$$= 3 \left(\frac{2x}{3x+1} \right)' \times \left(\frac{2x}{3x+1} \right)^2$$

$$= 3 \times \frac{(2x)'(3x+1) - (3x+1)'(2x)}{(3x+1)^2} \times \left(\frac{2x}{3x+1} \right)^2$$

$$= 3 \times \frac{2(3x+1) - 3(2x)}{(3x+1)^2} \times \left(\frac{2x}{3x+1} \right)^2$$

$$= 3 \times \frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2} \times \left(\frac{2x}{3x+1} \right)^2$$

$$= 3 \times \frac{2}{(3x+1)^2} \times \left(\frac{2x}{3x+1} \right)^2$$

$$\text{D'où : } f'(x) = \frac{6}{(3x+1)^2} \times \left(\frac{2x}{3x+1} \right)^2$$

$$(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\alpha' = 0$$

$$(ax)' = a$$

$$\boxed{2} \sim f'(x) = ((2\sqrt{x} - 1)^5)'$$

$$= 5(2\sqrt{x} - 1)' \times (2\sqrt{x} - 1)^4$$

$$= 5 \times 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (2\sqrt{x} - 1)^4$$

$$= \frac{5}{\sqrt{x}} (2\sqrt{x} - 1)^4$$

$$\text{D'où : } f'(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} (2\sqrt{x} - 1)^4$$

$$(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

$$(ku)' = k \cdot u' \text{ tel que } k \in \mathbb{R}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\alpha' = 0$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{3} \sim f'(x) &= (\sqrt{3x^2+4x+3})' \\
 &= \frac{(3x^2+4x+3)'}{2\sqrt{3x^2+4x+3}} \\
 &= \frac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x+3}} \\
 &= \frac{2(3x+2)}{2\sqrt{3x^2+4x+3}} \\
 &= \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x+3}}
 \end{aligned}$$

D'où : $f'(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x+3}}$

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{u})' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}} \\
 (x^n)' &= n x^{n-1} \quad (ax)' = a \\
 a' &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{4} \sim f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x-2}}{x-1} \right)' \\
 &= \frac{(\sqrt{x-2})'(x-1) - (x-1)'(\sqrt{x-2})}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{\frac{(x-2)'}{2\sqrt{x-2}} \times (x-1) - \sqrt{x-2}}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}} \times (x-1) - \sqrt{x-2}}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{\frac{(x-1)}{2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-2}}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{x-1-2\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2}(x-1)^2} \\
 &= \frac{x-1-2(x-2)}{2(x-1)^2\sqrt{x-2}} \\
 &= \frac{x-1-2x+4}{2(x-1)^2\sqrt{x-2}}
 \end{aligned}$$

D'où : $f'(x) = \frac{3-x}{2(x-1)^2\sqrt{x-2}}$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{u}{v} \right)' &= \frac{u'v - u.v'}{v^2} \\
 (\sqrt{u})' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad a' = 0 \\
 (ax)' &= a
 \end{aligned}$$

EXERCICE 14

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f définie par :

$$\boxed{1} \quad f(x) = \sin(x^2 - x + 1)$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = \sqrt{\cos(\sqrt{x} - 1)}$$

$$\boxed{3} \quad f(x) = \cos(\sin(x))$$

$$\boxed{4} \quad f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$$

CORRECTION

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad f'(x) &= (\sin(x^2 - x + 1))' \\ &= (x^2 - x + 1)' \times \sin'(x^2 - x + 1) \\ &= (2x - 1) \times \cos(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f'(x) = (2x - 1) \times \cos(x^2 - x + 1)$$

$$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$$

$$(x^n)' = n x^{n-1} \quad (ax)' = a$$

$$a' = 0$$

$$\begin{aligned} \boxed{2} \quad f'(x) &= (\sqrt{\cos(\sqrt{x} - 1)})' \\ &= \frac{(\cos(\sqrt{x} - 1))'}{2\sqrt{\cos(\sqrt{x} - 1)}} \\ &= \frac{-(\sqrt{x} - 1)' \times \sin(\sqrt{x} - 1)}{2\sqrt{\cos(\sqrt{x} - 1)}} \\ &= \frac{-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 0\right) \sin(\sqrt{x} - 1)}{2\sqrt{\cos(\sqrt{x} - 1)}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x} - 1)}{2\sqrt{\cos(\sqrt{x} - 1)}} \\ &= \frac{-\sin(\sqrt{x} - 1)}{4\sqrt{x} \sqrt{\cos(\sqrt{x} - 1)}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f'(x) = \frac{-\sin(\sqrt{x} - 1)}{4\sqrt{x} \sqrt{\cos(\sqrt{x} - 1)}}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad a' = 0$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{3} \sim f'(x) &= \left(\cos(-\sin(x)) \right)' \\
 &= (-\sin(x))' \cdot \cos'(-\sin(x)) \\
 &= \cos(x) \cdot (-\sin(-\sin(x))) \\
 &= -\cos(x) \cdot \sin(-\sin(x))
 \end{aligned}$$

D'où : $f'(x) = -\cos(x) \cdot \sin(-\sin(x))$

$$\begin{aligned}
 \boxed{4} \sim f'(x) &= \left(\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \right)' \\
 &= \frac{\left(\frac{x-2}{x-1} \right)'}{2 \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}} \\
 &= \frac{(x-2)'(x-1) - (x-1)'(x-2)}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{2 \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}{2 \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}} \\
 &= \frac{(x-1) - (x-2)}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{2 \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}{2 \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}} \\
 &= \frac{x-1-x+2}{2(x-1)^2 \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}
 \end{aligned}$$

D'où : $f'(x) = \frac{1}{2(x-1)^2 \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}$

$$(v \circ u(x))' = u'(x) \times v'(u(x))$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(ax)' = a$$

$$a' = 0$$

EXERCICE 15

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f définie par :

$$\boxed{1} \sim f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$$

$$\boxed{2} \sim f(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{4}} \sqrt{x^2+1}$$

$$\boxed{3} \sim f(x) = \left(\frac{2x-1}{x-1} \right)^{\frac{3}{4}}$$

CORRECTION

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \sim f'(x) &= (\sqrt[3]{x^2+1})' \\ &= \frac{(x^2+1)'}{3(\sqrt[3]{x^2+1})^2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f'(x) = \frac{2x}{3(\sqrt[3]{x^2+1})^2}$$

$$(\sqrt[3]{u})' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

$$a' = 0$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$\textcircled{2} \sim f'(x) = ((x^2+1)^{\frac{1}{4}} \sqrt{x^2+1})'$$

$$\begin{aligned} &= ((x^2+1)^{\frac{1}{4}})' \sqrt{x^2+1} + (x^2+1)^{\frac{1}{4}} (\sqrt{x^2+1})' \\ &= \frac{1}{4} (x^2+1)' (x^2+1)^{\frac{1}{4}-1} \sqrt{x^2+1} + (x^2+1)^{\frac{1}{4}} \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{4} \times 2x (x^2+1)^{-\frac{3}{4}} \sqrt{x^2+1} + (x^2+1)^{\frac{1}{4}} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x}{2} (x^2+1)^{-\frac{3}{4}} \times (x^2+1)^{\frac{1}{2}} + (x^2+1)^{\frac{1}{4}} \times \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{x}{2} (x^2+1)^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} + x (x^2+1)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{x}{2} (x^2+1)^{-\frac{1}{4}} + x (x^2+1)^{-\frac{1}{4}} \\ &= x (x^2+1)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{3}{2} x (x^2+1)^{-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{3x}{2(x^2+1)^{\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f'(x) = \frac{3x}{2\sqrt[4]{x^2+1}}$$

$$\textcircled{3} \sim f'(x) = \left(\left(\frac{2x-1}{x-1} \right)^{\frac{3}{4}} \right)'$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4} \left(\frac{2x-1}{x-1} \right)' \left(\frac{2x-1}{x-1} \right)^{\frac{3}{4}-1} \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{(2x-1)'(x-1) - (x-1)'(2x-1)}{(x-1)^2} \times \left(\frac{2x-1}{x-1} \right)^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$(u^r)' = r \cdot u' \cdot u^{r-1}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$(u^r)' = r \cdot u' \cdot u^{r-1}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$a^r \cdot a^{r'} = a^{r+r'}$$

$$\frac{1}{a^r} = a^{-r}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} \times \frac{2(x-1) - (2x-1)}{(x-1)^2} \times \left(\frac{x-1}{2x-1} \right)^{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{3}{4} \times \frac{2x-2-2x+1}{(x-1)^2} \sqrt[4]{\frac{x-1}{2x-1}} \\
&= \frac{3}{4} \times \frac{-1}{(x-1)^2} \sqrt[4]{\frac{x-1}{2x-1}} \\
&= \frac{-3}{4(x-1)^2} \sqrt[4]{\frac{x-1}{2x-1}}
\end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

D'où : $f'(x) = \frac{-3}{4(x-1)^2} \sqrt[4]{\frac{x-1}{2x-1}}$

EXERCICE 16

En utilisant le nombre dérivé, calculer les limites :

$\boxed{1} \sim \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1}$
 $\boxed{2} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$
 $\boxed{3} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x}$

CORRECTION

Rappel

Si f est dérivable en un point x_0 .

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

$\boxed{1} \sim$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 6x - 4$

On a f est dérivable en $x_0 = 1$ et : $f'(1) = 6(1) - 4 = 2$

Donc, on aura : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$

Et par suite : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = 2$

$\boxed{2} \sim$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(x)$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \cos(x)$

On a f est dérivable en $x_0 = 0$ et : $f'(0) = \cos(0) = 1$

Donc, on aura : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

Et par suite : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos^2(x)$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos^2(x))' \\ &= ((\cos(x))^2)' \\ &= 2(\cos(x))'(\cos(x)) \\ &= -2\sin(x)\cos(x) \\ &= -\sin(2x) \end{aligned}$$

$$(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

On a f est dérivable en $x_0 = 0$ et : $f'(0) = -\sin(2 \cdot 0) = -\sin 0 = 0$

Donc, on aura : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$

Et par suite : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x} = 0$

EXERCICE 17

En utilisant le nombre dérivé, calculer les limites :

1) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin^2(x) - \sin^2(\alpha)}{x - \alpha}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} + x - 3}{x - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sin(x) - \sqrt{2}}{\tan(x) - 1}$

CORRECTION

Rappel

Si f est dérivable en un point x_0 .

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2(x)$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin^2(x))' \\ &= ((\sin(x))^2)' \\ &= 2(\sin(x))'(\sin(x)) \end{aligned}$$

$$(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$= 2 \cos(x) \sin(x)$$

$$= \sin(2x)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

On a f est dérivable en $x_0 = a$ et : $f'(a) = \sin(2a)$

Donc, on aura : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

Et par suite : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2(x) - \sin^2(a)}{x - a} = \sin(2a)$

2) Soit f la fonction définie sur $]-7; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt[3]{x+7} + x$

On a f est dérivable sur $]-7; +\infty[$ et :

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x+7} + x)'$$

$$= (\sqrt[3]{x+7})' + x'$$

$$= \frac{(x+7)'}{3(\sqrt[3]{x+7})^2} + 1$$

$$= \frac{1}{3(\sqrt[3]{x+7})^2} + 1$$

$$(\sqrt[3]{u})' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

$$(ax)' = a$$

$$a' = 0$$

On a f est dérivable en $x_0 = 1$ et : $f'(1) = \frac{1}{3 \times 4} + 1 = \frac{13}{12}$

Donc, on aura : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$

Et par suite : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} + x - 3}{x - 1} = \frac{13}{12}$

3)

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin(x) - \sqrt{2}}{\tan(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{2 \sin(x) - \sqrt{2}}{x - \frac{\pi}{4}}}{\frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}}$$



Soit f la fonction définie sur

$]0; \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = 2 \sin(x)$

On a f est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et :

$$f'(x) = (2 \sin(x))' = 2 \cos(x)$$

On a f est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ et : $f'(\frac{\pi}{4}) = 2 \cos(\frac{\pi}{4}) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Donc, on aura : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = f'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

Et par suite : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin(x) - \sqrt{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \text{ tel que } k \in \mathbb{R}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$



Soit g la fonction définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \tan(x)$

On a f est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et : $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$

On a f est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ et : $f'(\frac{\pi}{4}) = 1 + \tan^2(\frac{\pi}{4}) = 1 + 1 = 2$

Donc, on aura : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = g'(\frac{\pi}{4}) = 2$

$$g(\frac{\pi}{4}) = 1$$

Et par suite : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin(x) - \sqrt{2}}{\tan(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin(x) - \sqrt{2}}{\frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

EXERCICE 17

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f définie sur l'intervalle I :

① $f(x) = 2x - 1$ et $I = \mathbb{R}$

② $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 3x - 5$ et $I = \mathbb{R}$

③ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ et $I =]0; +\infty[$

CORRECTION

Remarque

➡ Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I

➡ Si $f(x) = F'(x)$

Alors F est une primitive de f

➡ Il faut pas dire la primitive. Car si F est une primitive de f

Alors : $x \mapsto F(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ est aussi primitive de f

① $f(x) = 2x - 1$

$$\begin{aligned} &= \left(2 \times \frac{1}{2} x^2 - x \right)' \\ &= (x^2 - x)' \end{aligned}$$

$$a = (ax)'$$

$$x = \left(\frac{1}{2} x^2 \right)'$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F: x \mapsto x^2 - x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$



Il faut pas oublier la constante c

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \sim f(x) &= 5x^3 - 6x^2 + 3x - 5 \\ &= \left(5 \times \frac{1}{4} x^4 - 6 \times \frac{1}{3} x^3 + 3 \times \frac{1}{2} x^2 - 5x \right)' \\ &= \left(\frac{5}{4} x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 5x \right)' \end{aligned}$$

$$\alpha x^n = \left(\alpha \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \right)'$$

$$\alpha = (\alpha x)'$$

$$x = \left(\frac{1}{2} x^2 \right)'$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes

les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F: x \mapsto \frac{5}{4} x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 5x + c$ / $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \sim f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \\ &= \left(2\sqrt{x} + \frac{-1}{x} - \frac{-1}{2x^2} \right)' \\ &= \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right)' \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x} \right)'$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = (2\sqrt{x})'$$

$$\frac{1}{x^n} = \left(\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} \right)'$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par : $F: x \mapsto 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + c$ / $c \in \mathbb{R}$

EXERCICE 18

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f définie sur l'intervalle I :

$$\textcircled{1} \sim f(x) = \tan^2 x + \cos x + \sin x \text{ et } I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\textcircled{2} \sim f(x) = 4x(x^2 - 1)^{2016} \text{ et } I = \mathbb{R}$$

$$\textcircled{3} \sim f(x) = \cos(x) \cdot \sin^3(x) \text{ et } I = \mathbb{R}$$

CORRECTION

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \sim f(x) &= \tan^2 x + \cos x + \sin x \\ &= -1 + (1 + \tan^2 x) + (\sin x)' + (-\cos x)' \\ &= (-x)' + (\tan x)' + (\sin x)' + (-\cos x)' \\ &= (-x + \tan x + \sin x - \cos x)' \end{aligned}$$

$$\cos x = (\sin x)'$$

$$\sin x = (-\cos x)'$$

$$1 + \tan^2 x = (\tan x)'$$

$$\alpha = (\alpha x)'$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur I par : $F: x \mapsto -x + \tan x + \sin x - \cos x + c$ / $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \sim f(x) &= 4x(x^2-1)^{2016} \\ &= 2(x^2-1)'(x^2-1)^{2016} \\ &= 2 \left(\frac{(x^2-1)^{2017}}{2017} \right)' \end{aligned}$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F: x \mapsto 2 \frac{(x^2-1)^{2017}}{2017} + c \quad / c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \sim f(x) &= \cos(x) \cdot \sin^3(x) \\ &= (\sin x)' (\sin x)^3 \\ &= \frac{1}{4} ((\sin x)^4)' \end{aligned}$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F: x \mapsto \frac{1}{4} \sin^4(x) + c \quad / c \in \mathbb{R}$

Ici, on a le produit de deux fonctions, donc, au début, il faut penser à $u' \cdot u^n$
On a : $(x^2-1)' = 2x$
Donc : $4x = 2 \cdot 2x = 2(x^2-1)'$

$$u' \cdot u^n = \left(\frac{1}{n+1} \cdot u^{n+1} \right)'$$

On remplace $\cos(x)$ par $(\sin x)'$
Et on pense à $u' \cdot u^n$.

$$u' \cdot u^n = \left(\frac{1}{n+1} \cdot u^{n+1} \right)'$$

EXERCICE 19

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f définie sur l'intervalle I :

$$\textcircled{1} \sim f(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x+3)^2} \text{ et } I = \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \sim f(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x+3)^3} \text{ et } I = \mathbb{R}$$

$$\textcircled{3} \sim f(x) = (2x+1)\sqrt[3]{x^2+x+1} \text{ et } I = \mathbb{R}$$

CORRECTION

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \sim f(x) &= \frac{4x+1}{(2x^2+x+3)^2} \\ &= \frac{(2x^2+x+3)'}{(2x^2+x+3)^2} \\ &= \left(-\frac{1}{2x^2+x+3} \right)' \end{aligned}$$

On a le dénominateur est de la forme u^2
En première étape, il faut penser à $\frac{u'}{u^2} = \left(-\frac{1}{u} \right)'$

$$\frac{u'}{u^2} = \left(-\frac{1}{u} \right)'$$

$$(2x^2+x+3)' = 4x+1$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $F: x \mapsto -\frac{1}{2x^2+x+3} + c \quad c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \boxed{2} \quad f(x) &= \frac{4x+1}{(2x^2+x+3)^3} \\ &= (4x+1)(2x^2+x+3)^{-3} \\ &= (2x^2+x+3)'(2x^2+x+3)^{-3} \\ &= \frac{1}{-3+1} ((2x^2+x+3)^{-3+1})' \\ &= \frac{-1}{2} ((2x^2+x+3)^{-2})' \\ &= \left(\frac{-1}{2(2x^2+x+3)^2} \right)' \end{aligned}$$

Dans ce cas, on peut penser à $\frac{u'}{u^n}$ avec $n=3$ ou bien utiliser la règle $\frac{1}{a^r} = a^{-r}$, puis, on pense à $u' \cdot u^r$

$$u' \cdot u^r = \left(\frac{1}{r+1} \cdot u^{r+1} \right)'$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $F: x \mapsto -\frac{1}{2(2x^2+x+3)^2} + c \quad c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \boxed{3} \quad f(x) &= (2x+1)\sqrt[3]{x^2+x+1} \\ &= (2x+1)(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}} \\ &= (x^2+x+1)'(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}} (x^2+x+1)^{1+\frac{1}{3}} \right)' \\ &= \left(\frac{1}{\frac{4}{3}} (x^2+x+1)^{\frac{4}{3}} \right)' \\ &= \left(\frac{3}{4} (\sqrt[4]{x^2+x+1})^3 \right)' \end{aligned}$$

On peut toujours utiliser la règle $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Puis on pense à $u' \cdot u^r$ car la dérivée d'un polynôme de degré n est un polynôme de degré $n-1$

$$u' \cdot u^r = \left(\frac{1}{r+1} \cdot u^{r+1} \right)'$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $F: x \mapsto \frac{3}{4} (\sqrt[4]{x^2+x+1})^3 + c \quad c \in \mathbb{R}$

EXERCICE 20

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f définie sur l'intervalle I :

① $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ et $I =]3; +\infty[$

② $f(x) = (x^2-x-1)^{\frac{1}{3}}x$ et $I = [0; +\infty[$

③ $f(x) = \sqrt{x+3}$ et $I = [-3; +\infty[$

CORRECTION

$$\begin{aligned} \text{① } f(x) &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x-3}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x-3}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(x^2-2x-3)'}{\sqrt{x^2-2x-3}} \\ &= \frac{1}{2} \times (2\sqrt{x^2-2x-3})' \\ &= (\sqrt{x^2-2x-3})' \end{aligned}$$

Ici, on a le dénominateur est de la forme $\sqrt{u}$

En première étape, il faut penser à $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}}$$

Mais la dérivée de $u: x \mapsto x^2-2x-3$ et $u': x \mapsto 2x-2$

Dans ce cas, on a le droit de multiplier par 2 et diviser par 2 pour avoir $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} = (2\sqrt{u})'$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $]3; +\infty[$ par: $F: x \mapsto \sqrt{x^2-2x-3} + c, c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{② } f(x) &= (x^2-x-1)^{\frac{1}{3}}x \\ &= (x^2-x-1)x^{\frac{1}{3}} \\ &= x^{2+\frac{1}{3}} - x^{1+\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \\ &= x^{\frac{7}{3}} - x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{\frac{7}{3}+1} x^{\frac{7}{3}+1} - \frac{1}{\frac{4}{3}+1} x^{\frac{4}{3}+1} - \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} \right)' \\ &= \left(\frac{3}{10} x^{\frac{10}{3}} - \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right)' \\ &= \left(\frac{3}{10} \sqrt[3]{x^{10}} - \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} \right)' \end{aligned}$$

Dans ce cas, il suffit de développer pour avoir juste les fonctions du type: $x \mapsto x^r$

$$x^r = \left(\frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} \right)'$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F: x \mapsto \frac{3}{10} \sqrt[3]{x^{10}} - \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + c / c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \sim f(x) &= \sqrt{x+3} \\ &= (x+3)^{\frac{1}{2}} \\ &= (x+3)'(x+3)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x+3)^{\frac{1}{2}+1} \right)' \\ &= \left(\frac{2}{3} (x+3)^{\frac{3}{2}} \right)' \\ &= \left(\frac{2}{3} \sqrt{(x+3)^3} \right)' \end{aligned}$$

Ici, on remplace $\sqrt{x+3}$ par $(x+3)^{\frac{1}{2}}$
Et de penser à $u' \cdot u^r$ car u
de degré 1 et donc u' est un polynôme
de degré 0 (constante)

$$u' \cdot u^r = \left(\frac{1}{r+1} \cdot u^{r+1} \right)'$$

$$\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F: x \mapsto \frac{2}{3} \sqrt{(x+3)^3} + c / c \in \mathbb{R}$

EXERCICE 21

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f définie sur l'intervalle I :

$$\textcircled{1} \sim f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} \text{ et } I =]1; +\infty[$$

$$\textcircled{2} \sim f(x) = \sin^3(x) \text{ et } I = \mathbb{R}$$

$$\textcircled{3} \sim f(x) = x \sqrt[3]{x+3} \text{ et } I = [-3; +\infty[$$

CORRECTION

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \sim f(x) &= \frac{x}{\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \\ &= \sqrt{x-1} + \frac{(x-1)'}{\sqrt{x-1}} \\ &= (x-1)^{\frac{1}{2}} + (2\sqrt{x-1})' \end{aligned}$$

Ici, au début, on va penser à $\frac{u'}{\sqrt{u}}$
Mais u est un polynôme de degré 1,
donc, il faut que u' soit de degré 0
Mais ici on a $\frac{v}{\sqrt{u}}$ avec u et v sont
de degré 1. Dans ce cas il faut écrire v
sous forme $v = au + b$
Et on aura : $\frac{v}{\sqrt{u}} = \frac{au}{\sqrt{u}} + \frac{b}{\sqrt{u}} = a\sqrt{u} + \frac{b}{\sqrt{u}}$

$$\begin{aligned}
 &= (x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}} + (2\sqrt{x-1})' \\
 &= \left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-1)^{\frac{1}{2}+1}\right)' + (2\sqrt{x-1})' \\
 &= \left(\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)' + (2\sqrt{x-1})' \\
 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{x-1}^3 + 2\sqrt{x-1}\right)'
 \end{aligned}$$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} = (2\sqrt{u})'$$

$$u' u^r = \left(\frac{1}{r+1} u^{r+1}\right)'$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $F: x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{x-1}^3 + 2\sqrt{x-1} + c / c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \boxed{2} \sim f(x) &= \sin^3(x) \\
 &= \sin(x) \cdot \sin^2(x) \\
 &= \sin(x) \cdot (1 - \cos^2(x)) \\
 &= \sin(x) - \sin(x) \cdot \cos^2(x) \\
 &= (-\cos x)' + (\cos x)' \cdot \cos^2(x) \\
 &= (-\cos x)' + \left(\frac{1}{3} \cos^3(x)\right)' \\
 &= \left(-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3(x)\right)' \\
 &= \left(\frac{1}{3} \cos^3(x) - \cos x\right)'
 \end{aligned}$$

En générale, pour déterminer une primitive de la fonction $f: x \mapsto \sin^p(x) \cdot \cos^q(x)$, avec p ou q est impair

Supposons p est impair, donc $(\exists n \in \mathbb{N}); p = 2n+1$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin^{2n+1}(x) \cdot \cos^q(x) \\
 &= \sin(x) \sin^{2n}(x) \cdot \cos^q(x) \\
 &= \sin(x) (\sin^2(x))^n \cdot \cos^q(x) \\
 &= \sin(x) (1 - \cos^2(x))^n \cdot \cos^q(x)
 \end{aligned}$$

Puis, on développe $(1 - \cos^2(x))^n \cdot \cos^q(x)$

On obtiendra la somme des fonctions de type: $x \mapsto \sin(x) \cos^r(x)$, et on pense à $u' u^r$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $F: x \mapsto \frac{1}{3} \cos^3(x) - \cos(x) + c / c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \boxed{3} \sim f(x) &= x^3 \sqrt{x+3} \\
 &= x^3 \sqrt{x+3} \\
 &= x(x+3)^{\frac{1}{3}} \\
 &= (x+3-3)(x+3)^{\frac{1}{3}} \\
 &= (x+3)(x+3)^{\frac{1}{3}} - 3(x+3)^{\frac{1}{3}} \\
 &= (x+3)^{\frac{1}{3}+1} - 3(x+3)^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

Ici, au début, on va penser à $u' u^r$

Mais u est un polynôme de degré 1,

donc, il faut que u' soit de degré 0

Mais ici on a $v \cdot u^r$ avec u et v sont

de degré 1. Dans ce cas il faut écrire v

sous forme $v = \alpha u + b$

$$\begin{aligned}
 \text{Et on aura: } v \cdot u^r &= \alpha u u^r + b u^r \\
 &= \alpha u^{r+1} + b u^r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x+3)'(x+3)^{\frac{4}{3}} - 3 \times \frac{1}{1+\frac{1}{3}} \left((x+3)^{1+\frac{1}{3}} \right)' \\
 &= \frac{1}{1+\frac{4}{3}} \left((x+3)^{\frac{4}{3}+1} \right)' - 3 \times \frac{3}{4} \left((x+3)^{\frac{4}{3}} \right)' \\
 &= \frac{3}{7} \left((x+3)^{\frac{7}{3}} \right)' - \frac{3}{4} \left((x+3)^{\frac{4}{3}} \right)' \\
 &= \left(\frac{3}{7} \sqrt[3]{(x+3)^7} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+3)^4} \right)'
 \end{aligned}$$

$$u' \cdot u^r = \left(\frac{1}{r+1} \cdot u^{r+1} \right)'$$

$$\alpha^r \cdot \alpha^{r'} = \alpha^{r+r'}$$

EXERCICE 22

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2-2}{x-1}$

- ① Déterminer D_f , le domaine de définition de f
- ② Montrer que le point $\Omega(1;2)$ est le centre de symétrie de (C_f) la courbe représentative de f

CORRECTION

- ① Déterminons D_f
 $x \in D_f \iff x-1 \neq 0$
 $\iff x \neq 1$

D'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

②

(i) Soit $x \in D_f$

$$\begin{aligned}
 x \in D_f &\iff x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\
 &\iff x \neq 1 \\
 &\iff -x \neq -1 \\
 &\iff 2-x \neq 2-1 \\
 &\iff 2-x \neq 1 \\
 &\iff 2-x \in D_f
 \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in D_f); 2-x \in D_f$

(ii) Soit $x \in D_f$

Montrons que $f(2-x) = 4 - f(x)$

$$\text{On a } f(x) = \frac{x^2-2}{x-1}$$

$$\text{Donc } f(2-x) = \frac{(2-x)^2-2}{(2-x)-1}$$

$$\frac{u(x)}{v(x)} \xrightarrow{\text{dérivée}} v(x) \neq 0$$

Pour montrer qu'un point $\Omega(a;b)$ est le centre de symétrie de (C_f) , il faut établir les deux conditions suivantes:

$$\begin{cases}
 (i) (\forall x \in D_f); 2a-x \in D_f \\
 (ii) (\forall x \in D_f); f(2a-x) = 2b - f(x)
 \end{cases}$$

Ici, on prend $a=1$ et $b=2$
 Donc : $2a=2$ et $2b=4$

La condition (i) est importante car, on a pas le droit de calculer $f(2a-x)$ sauf si $2a-x \in D_f$

$$f(0) = \frac{0^2-2}{0-1}$$

$$\begin{aligned}
 f(2-x) + f(x) &= \frac{(2-x)^2 - 2}{(2-x) - 1} + \frac{x^2 - 2}{x - 1} \\
 &= \frac{4 - 4x + x^2 - 2}{1 - x} + \frac{x^2 - 2}{x - 1} \\
 &= \frac{x^2 - 4x + 2}{1 - x} + \frac{x^2 - 2}{x - 1} \\
 &= \frac{x^2 - 4x + 2}{1 - x} + \frac{x^2 - 2}{-(1 - x)} \\
 &= \frac{x^2 - 4x + 2}{1 - x} + \frac{-x^2 + 2}{1 - x} \\
 &= \frac{x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2}{1 - x} \\
 &= \frac{4 - 4x}{1 - x} \\
 &= \frac{4(1 - x)}{1 - x} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$f(0) = \frac{0^2 - 2}{0 - 1}$$

Pour la condition (ii), il suffit de calculer $f(2\alpha - x) + f(x)$ et de trouver 26

Donc $f(2-x) + f(x) = 4$

Autrement dit $f(2-x) = 4 - f(x)$

D'où le point $\Omega(1; 2)$ est le centre de symétrie de (C_f)

EXERCICE 23

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 + \frac{1 - 2x}{x^2 - x - 2}$

- ① Déterminer D_f , le domaine de définition de f
- ② Montrer que le point $\Omega\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ est le centre de symétrie de (C_f) la courbe représentative de f

CORRECTION

- ① Déterminons D_f

$$x \in D_f \iff x^2 - x - 2 \neq 0$$

Soit le trinôme $x^2 - x - 2$

Son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 9$

Puisque $\Delta > 0$

Alors le trinôme $x^2 - x - 2$ possède deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = \frac{1 - 3}{2} = -1$$

$$\frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow v(x) \neq 0$$

Donc $x \in D_f \iff x \neq -1$ et $x \neq 2$

D'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$

2.~

(i) Montrons que $(\forall x \in D_f); 1-x \in D_f$

Soit $x \in D_f$

$$x \in D_f \iff x \neq -1 \text{ et } x \neq 2$$

$$\iff -x \neq 1 \text{ et } -x \neq -2$$

$$\iff 1-x \neq 2 \text{ et } 1-x \neq -1$$

Donc $1-x \in D_f$

D'où $(\forall x \in D_f); 1-x \in D_f$

(ii) Soit $x \in D_f$

Montrons que $f(1-x) = 2 - f(x)$

$$\text{On a } f(x) = 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f(1-x) &= 1 + \frac{1-2(1-x)}{(1-x)^2 - (1-x) - 2} \\ &= 1 + \frac{1-2+2x}{1-2x+x^2-1+x-2} \\ &= 1 + \frac{2x-1}{x^2-x-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } f(1-x) + f(x) &= \left(1 + \frac{2x-1}{x^2-x-2}\right) + \left(1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2}\right) \\ &= 2 + \frac{2x-1+1-2x}{x^2-x-2} \\ &= 2 + 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(1-x) + f(x) = 2$$

$$\text{Donc } f\left(2 \cdot \frac{1}{2} - x\right) = 2 \cdot 1 - f(x)$$

D'où le point $\Omega\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ est le centre de symétrie de (C_f)

EXERCICE 24

Soit f la fonction définie par : $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

1.~ Déterminer D_f , le domaine de définition de f

2.~ Montrer que la droite (Δ) dont l'équation $x=1$ est l'axe de symétrie de (C_f)

Pour montrer qu'un point $\Omega(\alpha; \beta)$ est le centre de symétrie de (C_f) , il faut établir les deux conditions suivantes:

$$\begin{cases} (i) (\forall x \in D_f); 2\alpha - x \in D_f \\ (ii) (\forall x \in D_f); f(2\alpha - x) = 2\beta - f(x) \end{cases}$$

Ici, on prend $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1$
Donc : $2\alpha = 1$ et $2\beta = 2$

$$f(0) = 1 + \frac{1-2 \cdot 0}{0^2 - 0 - 2}$$

Pour la condition (ii), il suffit de calculer $f(2\alpha - x) + f(x)$ et de trouver 2β

CORRECTION

① ~ Déterminons $\mathcal{D}_f$

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + 2 \geq 0 \end{aligned}$$

Or, on sait que : $(\forall x \in \mathbb{R}); (x-1)^2 \geq 0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); (x-1)^2 + 2 \geq 2$ et $2 > 0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); (x-1)^2 + 2 > 0$

D'où : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

② ~

(i) On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Donc : $(\forall x \in \mathcal{D}_f); 2-x \in \mathcal{D}_f$

(ii) Soit $x \in \mathcal{D}_f$

Montrons que $f(2-x) = f(x)$

On a : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } f(2-x) &= \sqrt{(2-x)^2 - 2(2-x) + 3} \\ &= \sqrt{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 3} \\ &= \sqrt{x^2 - 2x + 3} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

D'où la droite (Δ) dont l'équation $x=1$ est l'axe de symétrie de (C_f)

$\sqrt{u(x)} \quad \text{---} \rightarrow \quad u(x) \geq 0$

Pour montrer que la droite (Δ) dont l'équation $x=\alpha$ est l'axe de symétrie de (C_f) , il faut établir les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (i) (\forall x \in \mathcal{D}_f); 2\alpha - x \in \mathcal{D}_f \\ (ii) (\forall x \in \mathcal{D}_f); f(2\alpha - x) = f(x) \end{cases}$$

Ici, on prend $\alpha=1$

Donc : $2\alpha=2$

EXERCICE 25

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - \sqrt{x}$

Et (C_f) sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① ~ Déterminer $\mathcal{D}_f$, le domaine de définition de f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

② ~ Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

③ ~ Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$, puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

④ ~ a ~ Vérifier que $f'(x) = \frac{4x-1}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}$, pour tout $x \in]0; +\infty[$

b ~ Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .

c. Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0=1$.

⑤. Représenter (C_f)

⑥. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]\frac{1}{4}; +\infty[$

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Calculer $g(4)$ et montrer que g^{-1} est dérivable en $x_0=2$ et déterminer $(g^{-1})'(2)$

c. Représenter $(C_{g^{-1}})$, la courbe représentative de la fonction g^{-1} dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

CORRECTION

①. Déterminons D_f

$$x \in D_f \iff x \geq 0$$

$$\text{Donc } D_f = [0; +\infty[$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

②. Déterminons la branche infinie de (C_f)

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x}) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\sqrt{u(x)} \rightarrow u(x) \geq 0$$

Ici, si on remplace, on va trouver la F.I. $+\infty - (+\infty)$

Le plus puissant est x

Donc, il suffit de factoriser par x

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

On toujours prendre la dernière expression de f donnant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \rightarrow \infty \\ \rightarrow 0 \\ \rightarrow a \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \begin{cases} \rightarrow b \\ \rightarrow \infty \end{cases}$$

(C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $+\infty$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$

Remarque

Pourquoi on choisit le cas où (C_f) est au dessous de (Δ) ?



car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\infty$



Donc $f(x) - y < 0$ au voisinage de $+\infty$

3) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - \sqrt{x})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Interprétation graphique

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$ à droite

(C_f) admet une demi-tangente verticale à droite du point $O(0,0)$ (Dirigée vers le bas)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \dots = -\infty$$

$\boxed{+} \times \boxed{-} = \boxed{-}$

4) Calculons $f'(x)$

On a : $x \mapsto x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

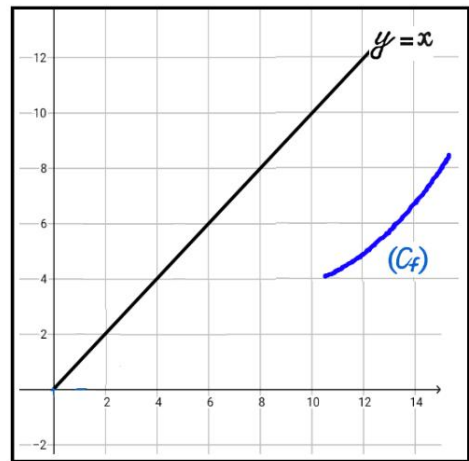
Et : $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

Donc : $x \mapsto -\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$

(Somme de deux fonctions dérivables)

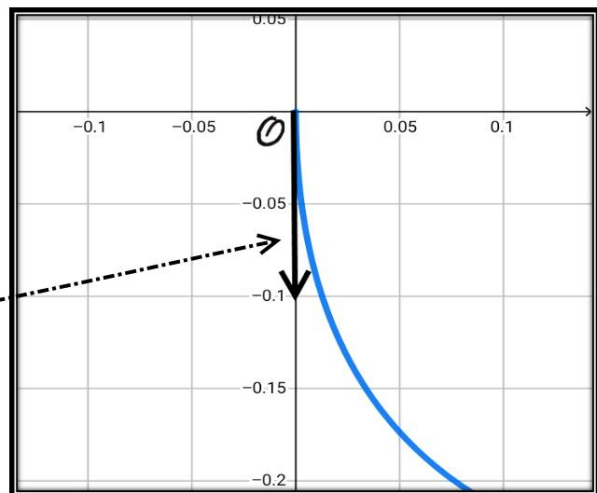
Soit $x \in]0; +\infty[$



Ici, on parle de la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ à droite, il suffit de remarquer que $f(0) = 0$

La dérivabilité

Les tangentes



On calcule toujours sur un intervalle ouvert.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x - \sqrt{x})' \\
 &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{(2\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x} (2\sqrt{x} + 1)} \\
 &= \frac{(2\sqrt{x})^2 - 1^2}{2\sqrt{x} (2\sqrt{x} + 1)} \\
 &= \frac{4x - 1}{2\sqrt{x} (2\sqrt{x} + 1)}
 \end{aligned}$$

$$(ax)' = a$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

D'où : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{4x-1}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}$

b. Le signe de $f'(x)$

Soit $x \in]0; +\infty[$

On a : $f'(x) = \frac{4x-1}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}$

Or : $2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1) > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $(4x-1)$

$$\begin{aligned}
 4x-1=0 &\iff 4x=1 \\
 &\iff x=\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$4x-1$		-	+
RÈGLE		Signe de $-a$	Signe de a

$$a = \frac{1}{4}$$

Le tableau de variations de f

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

c. Une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0=1$.

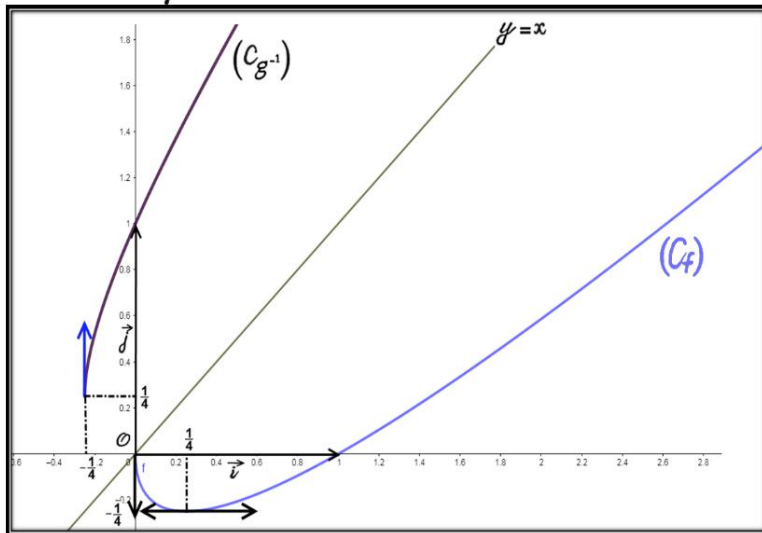
$$\begin{aligned}
 (T): y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\
 &= \frac{1}{2}(x-1) + 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(1) &= \frac{1}{2} \\
 f(1) &= 0
 \end{aligned}$$

Donc $(T): y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$O; \vec{i}, \vec{j}$

5. La représentation de (C_f)



D'après le tableau de variations de f on a
 $f'(\frac{1}{4}) = 0$
 Donc, au point $C(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4})$
 on aura une tangente horizontale
 On trace la Branche infinie

6. Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1}

On a g est continue sur I

(Car elle dérivable sur I)

Et g est strictement croissante sur I

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J tel que

$$\begin{aligned} J &= g\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[\\ &= \left[g\left(\frac{1}{4}\right); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right[\\ &= \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[\end{aligned}$$

On a : $g(x) = x - \sqrt{x}$

Donc : $g(4) = 4 - \sqrt{4} = 2$

Montrons que g^{-1} est dérivable en $x_0 = 2$

On a $g(4) = 2$

Donc $g^{-1}(2) = 4$

Et on a g est dérivable en 4

et $g'(4) = f'(4) = \frac{4 \cdot 4 - 1}{2\sqrt{4}(2\sqrt{4} + 1)} = \frac{3}{5}$

Donc : $g'(4) \neq 0$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
 Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

Soit $g(a) = b$

Alors $g^{-1}(b) = a$

Si $\begin{cases} g \text{ est dérivable en } a \\ g'(a) \neq 0 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} g^{-1} \text{ est dérivable en } b \\ (g^{-1})'(b) = \frac{1}{g'(g^{-1}(b))} = \frac{1}{g'(a)} \end{cases}$

D'où g^{-1} est dérivable en $x_0=2$, et on a:

$$(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(g^{-1}(2))} = \frac{1}{g'(4)} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

c. Représentation de $(C_{g^{-1}})$

$(C_{g^{-1}})$ est la symétrique de (C_g) par rapport à la droite $y=x$

Explication

☞ (C_g) est juste (C_f) sur l'intervalle $I =]\frac{1}{4}; +\infty[$

☞ La droite $(\Delta): y=x$ change les rôles de x et y
Autrement dit:

☞ L'image du point $A(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4})$ est $A'(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$

☞ L'image de demi-tangente horizontale à droite du point A est la demi-tangente verticale au point A' dirigée vers le haut

☞ L'image de la branche parabolique de direction la droite $y = \alpha x$ est la branche parabolique de direction la droite $y = \frac{1}{\alpha} x$
Dans notre cas $\alpha = 1$

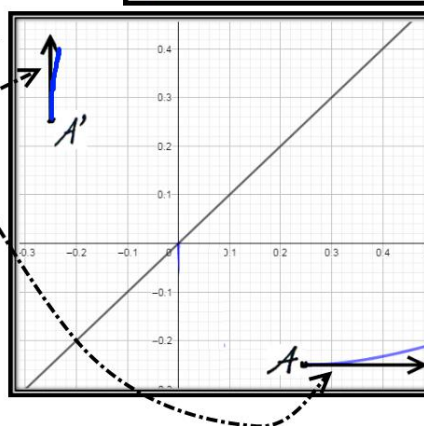
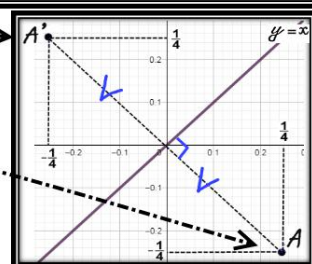
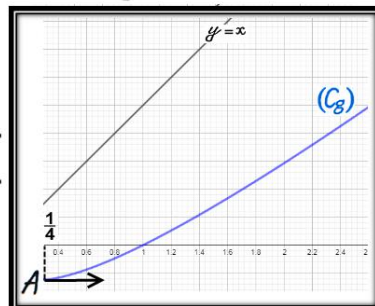
☞ (C_g) coupe l'axe des abscisses au point $C(1;0)$

☞ $(C_{g^{-1}})$ coupe l'axe des ordonnées au point $C'(0;1)$

☞ On a g est strictement croissante sur I

☞ g^{-1} est strictement croissante sur J

Représentation de $(C_{g^{-1}})$ (Voir la figure "Question n°5")



EXERCICE 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + 2\sqrt{1-x} ; & x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+3} ; & x > 1 \end{cases}$$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

- ① α Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 β Montrer que f est continue en $x_0=1$
- ② Étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.
- ③ Étudier les branches infinies de (C_f)
- ④ α Montrer que :
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)} ; & \forall x \in]-\infty; 1[\\ f'(x) = \frac{12x^2}{(x^3+3)^2} ; & \forall x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

 β Étudier le signe de $f'(x)$
 γ Dresser le tableau de variations de f
- ⑤ Donner une équation cartésienne de la demi-tangente (T) à la courbe (C_f) au point $A(1;0)$ à droite
- ⑥ Représenter (C_f) et (T)
- ⑦ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[1; +\infty[$
 α Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
 β Déterminer $g^{-1}(x)$; pour tout $x \in J$.
 γ Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.
 δ Montrer que g^{-1} est une fonction primitive de la fonction $h: x \mapsto \frac{4}{3\sqrt[3]{(3x^3-5x^2+x+1)^2}}$ sur $[0;1[$

CORRECTION

- ① α Calculons les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-1}{x^3+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + 2\sqrt{1-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + 2\sqrt{x^2 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + 2|x| \sqrt{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 - 2x \sqrt{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Car: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) = 1 \end{cases}$

6. La continuité de f en $x_0=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 + 2\sqrt{1-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 3} = 0$$

$$f(1) = 1 - 1 + 2\sqrt{1-1} = 0$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

Alors f est continue en $x_0=1$

2. La dérivabilité de f en $x_0=1$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1 + 2\sqrt{1-x}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} + 2 \frac{\sqrt{1-x}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + 2 \frac{\sqrt{1-x} \sqrt{1-x}}{(x-1) \sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + 2 \frac{(1-x)}{(x-1) \sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{2(x-1)}{(x-1) \sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x}} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0=1$ à gauche

Interprétation graphique

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty + (-\infty)$

$$x + 2\sqrt{-x}$$

Et puisque $2\sqrt{-x} \neq |x|$ alors, il suffit de factoriser.

$$|x| = -x \text{ Car: } x \rightarrow -\infty$$

Si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$

Alors f est continue en x_0 .

Pour calculer $f(1)$, on remplace dans l'expression où $x \leq 1$

Ici, il faut étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 1

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à gauche, il faut calculer la limite:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

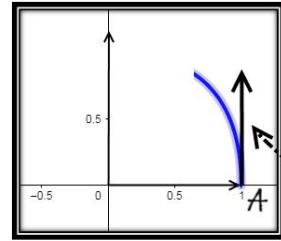
Mais, en remarquant que $x-1 \rightarrow 0$ et $\sqrt{1-x} \rightarrow 0$ ça sera mieux de séparer les limites

Le conjugué de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ lui-même

(C_f) admet une demi-tangente verticale au point A(1;0) à gauche
(Dirigée vers le haut)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \dots = -\infty$$

$\ominus \times \ominus = \oplus$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x^3 + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 3} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

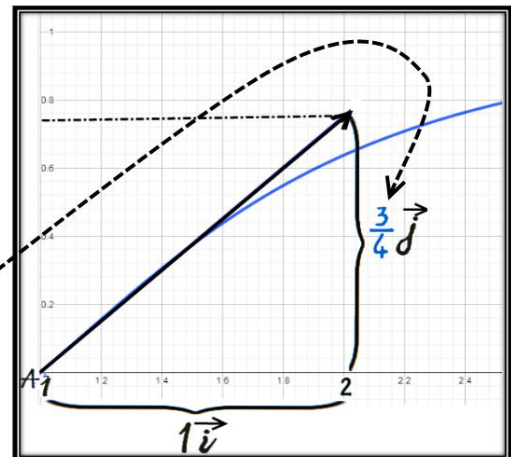
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Donc f est dérivable en $x_0 = 1$ à droite et on a $f'_d(1) = \frac{3}{4}$

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente à droite du point A(1;0) de coefficient directeur égal à $\frac{3}{4}$



Conclusion

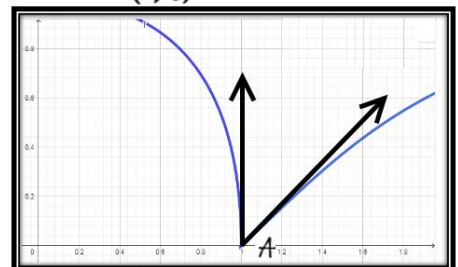
f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$

Remarques

☐ f est continue en $x_0 \not\Rightarrow f$ est dérivable en x_0 ☐

☐ f est dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ est continue en x_0 ☒

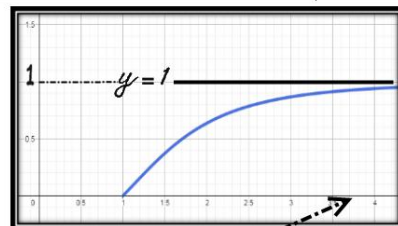
☐ (C_f) admet deux demi-tangente au point A(1;0)
A(1;0) est appelé: Point anguleux.



3. Les Branches infinies de (C_f)

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Donc la droite dont l'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à (C_f) voisinage de $+\infty$



On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1 + 2\sqrt{1-x} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1 + 2\sqrt{1-x}) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y=x$ au voisinage de $-\infty$

Remarque

Pourquoi on choisit le cas où (C_f) est au dessus de (Δ) ?



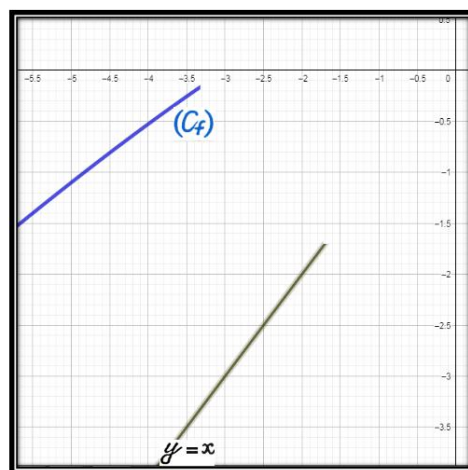
car $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = +\infty$

Donc $f(x) - y > 0$ au voisinage de $-\infty$



Ça sera mieux d'utiliser la dernière expression donnant $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$
Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \infty \\ 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$
Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \begin{cases} b \\ \infty \end{cases}$
 (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $+\infty$



4. Calculons $f'(x)$

Sur l'intervalle $]-\infty; 1[$

Soit $x \in]-\infty; 1[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - 1 + 2\sqrt{1-x})' \\ &= (x)' - (1)' + 2(\sqrt{1-x})' \\ &= 1 - 0 + 2 \frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}} \\ &= 1 + \frac{-1}{\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

Toujours, il faut calculer $f'(x)$ sur un intervalle ouvert

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(ax)' = a$$

$$a' = 0$$

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \text{ tel que } k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}} \\
 &= \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)} \\
 &= \frac{\sqrt{1-x}^2-1^2}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)} \\
 &= \frac{1-x-1}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)} \\
 &= \frac{-x}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}
 \end{aligned}$$

D'où: $\forall x \in]-\infty; 1[$; $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$

Sur l'intervalle $]1; +\infty[$

Soit $x \in]1; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{x^3-1}{x^3+3} \right)' \\
 &= \frac{(x^3-1)'(x^3+3) - (x^3+3)'(x^3-1)}{(x^3+3)^2} \\
 &= \frac{3x^2(x^3+3) - 3x^2(x^3-1)}{(x^3+3)^2} \\
 &= \frac{3x^5+9x^2-3x^5+3x^2}{(x^3+3)^2} \\
 &= \frac{12x^2}{(x^3+3)^2}
 \end{aligned}$$

D'où: $\forall x \in]1; +\infty[$; $f'(x) = \frac{12x^2}{(x^3+3)^2}$

6. Le signe de

Sur l'intervalle $]-\infty; 1[$

Soit $x \in]-\infty; 1[$

On a $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$

Or $\forall x \in]-\infty; 1[$; $\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1) > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-x$

$$-x = 0 \iff x = 0$$

x	$-\infty$	0	1
$-x$	$+$	ϕ	$-$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$a' = 0$$

Donc

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$

Sur l'intervalle $]1; +\infty[$

Soit $x \in]1; +\infty[$

On a $f'(x) = \frac{12x^2}{(x^3+3)^2}$

Or $\forall x \in]1; +\infty[; (x^3+3)^2 > 0$ et $12x^2 > 0$

Donc $\forall x \in]1; +\infty[; f'(x) > 0$

c. Le tableau de variations de f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	0	1

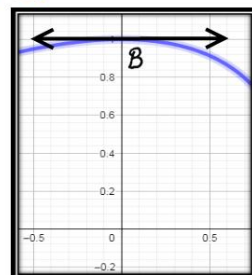
$f(0) = 0 - 1 + 2\sqrt{1-0} = 1$

Remarques

On a les deux barres en 1 entraîne que f n'est pas dérivable en $x_0=1$

$f'(0)=0$

Graphiquement entraîne que (C_f) admet une tangente horizontale au point $B(0;1)$



5. Une équation cartésienne de la demi-tangente (T) à (C_f) au point $A(1;0)$ à droite

$$(T): y = f'_d(1)(x-1) + f(1) \\ = \frac{3}{4}(x-1) + 0$$

D'où: $(T): y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

6. Représentation de (T) et (C_f)

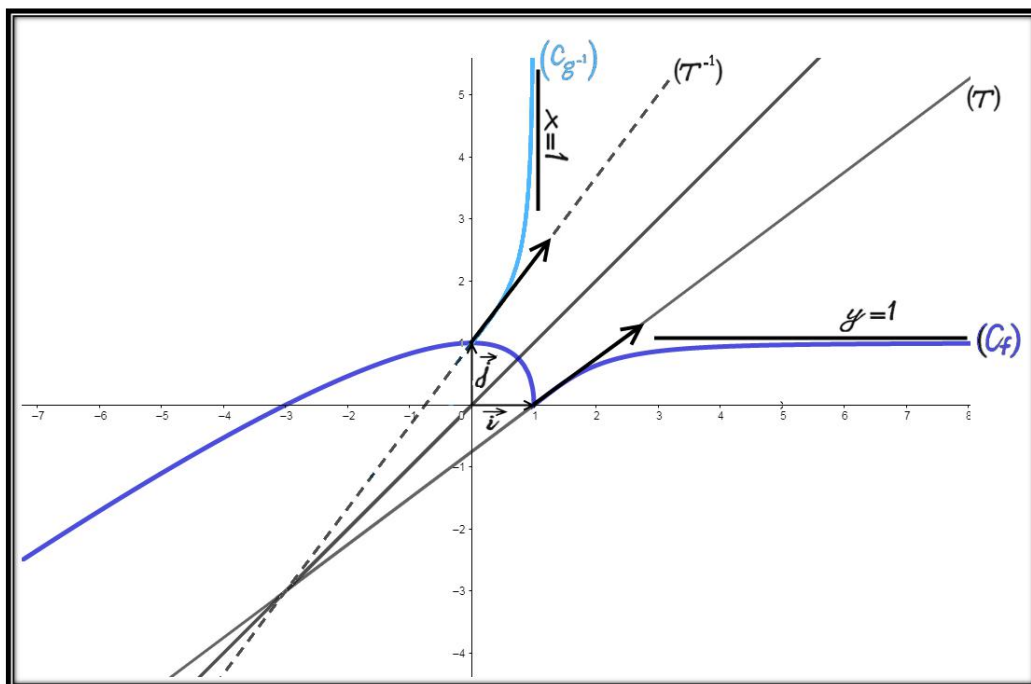
Explication

Pour la droite $(T): y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

On prend les deux points $A(1;0)$ et $C(3; \frac{3}{2})$

Pour la courbe (C_f)

- △ On représente les demi-tangente au point $A(1;0)$
- △ La tangente horizontale au point $B(0;1)$
- △ La droite horizontale $y=1$
- △ La droite $y=x$ (La branche parabolique)
- △ Enfin, le tableau de variations de f



7. $n a_n$

g est la fonction définie sur par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 3} ; x > 1 \\ g(1) = 0 \end{cases}$

On a g est continue sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$
(Car g est une fonction rationnelle)

Et g est strictement croissante sur I

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que $J = g([1; +\infty[)$

$$\begin{aligned} &= \left[g(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[\\ &= [0; 1[\end{aligned}$$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

b. Déterminons $g^{-1}(x)$, pour tout $x \in J$.

Soit $x \in J$, cherchons $y \in I$ tel que $g(y) = x$

$$g(y) = x \Leftrightarrow \frac{y^3 - 1}{y^3 + 3} = x$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 1 = x(y^3 + 3)$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 1 = xy^3 + 3x$$

$$\Leftrightarrow y^3 - xy^3 = 1 + 3x$$

$$\Leftrightarrow y^3(1 - x) = 1 + 3x$$

$$\Leftrightarrow y^3 = \frac{1 + 3x}{1 - x}$$

$1 - x \neq 0$ Car $x \in [0; 1[$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{1 + 3x}{1 - x}}$$

$(\forall x \in J); \frac{1 + 3x}{1 - x} \geq 0$

D'où $(\forall x \in J); g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1 + 3x}{1 - x}}$

c. Représentation de $(C_{g^{-1}})$ Voir figure ~ Question 5.

Explication

☞ (C_g) est juste (C_f) sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$

☞ La droite $(\Delta): y = x$ change les rôles de x et y
Autrement dit :

☞ L'image du point $A(1; 0)$ est $A'(0; 1)$

☞ L'image de la droite $y = 1$
est la droite $x = 1$

☞ L'image de demi-tangente (T) à droite du point A :

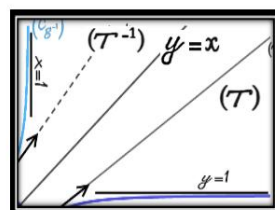
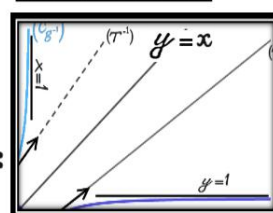
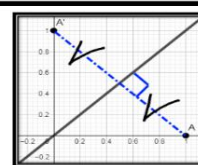
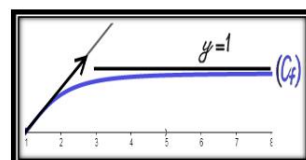
$$\text{On a } (T): y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y - \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}(y - 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x = y - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + 1$$

Donc $(T^{-1}): y = \frac{3}{4}x + 1$



d. Montrons que g^{-1} est une fonction primitive de la fonction

$$h: x \mapsto \frac{4}{3\sqrt[3]{(3x^3-5x^2+x+1)^2}}$$

Pour cela, il suffit de vérifier que $(g^{-1})'(x) = h(x)$

Calculons $(g^{-1})'(x)$

Soit $x \in J$

$$\begin{aligned} (g^{-1})'(x) &= \left(\sqrt[3]{\frac{1+3x}{1-x}} \right)' \\ &= \frac{\left(\frac{1+3x}{1-x} \right)'}{3 \left(\sqrt[3]{\frac{1+3x}{1-x}} \right)^2} \\ &= \frac{\frac{(1+3x)'(1-x) - (1-x)'(1+3x)}{(1-x)^2}}{3 \left(\sqrt[3]{\frac{1+3x}{1-x}} \right)^2} \\ &= \frac{3(1-x) + (1+3x)}{3(1-x)^2 \left(\sqrt[3]{\frac{1+3x}{1-x}} \right)^2} \\ &= \frac{3-3x+1+3x}{3\sqrt[3]{(1-x)^6} \sqrt[3]{\frac{(1+3x)^2}{(1-x)^2}}} \\ &= \frac{4}{3\sqrt[3]{(1-x)^6} \times \frac{(1+3x)^2}{(1-x)^2}} \\ &= \frac{4}{3\sqrt[3]{(1-x)^4} \times (1+3x)^2} \\ &= \frac{4}{3\sqrt[3]{(1-2x+x^2)^2} (1+3x)^2} \\ &= \frac{4}{3\sqrt[3]{((1+3x)(1-2x+x^2))^2}} \\ &= \frac{4}{3\sqrt[3]{(1-2x+x^2+3x-6x^2+3x^3)^2}} \\ (g^{-1})'(x) &= \frac{4}{3\sqrt[3]{(3x^3-5x^2+x+1)^2}} \text{ pour tout } x \in J \end{aligned}$$

$$\left(\sqrt[3]{u} \right)' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(ax)' = a$$

$$a' = 0$$

D'où g^{-1} est une fonction primitive de la fonction h

EXERCICE 27

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1. a. Déterminer D_f le domaine de définition de f
 b. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 c. Étudier la continuité de f sur D_f
2. Étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 2$ et à gauche de $x_0 = -1$, puis donner une interprétation graphique aux résultats obtenus
3. a. Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$
 b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$
 c. Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ)
4. a. Montrer que : $f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - x - 2} - (2x - 1)}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$, pour tout $x \in D_f \setminus \{-1; 2\}$
 b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur les deux intervalles $]-\infty; -1[$ et $]2; +\infty[$
 c. Dresser le tableau de variations de f
5. a. Montrer que : $\forall x \in D_f \setminus \{-1; 2\}; f''(x) = \frac{9}{4(\sqrt{x^2 - x - 2})^3}$
 b. En déduire la concavité de la courbe (C_f)
6. Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point $A(3; 2)$
7. Tracer la courbe (C_f)
8. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [2; +\infty[$
 a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Étudier la dérivabilité de g^{-1} en $x_0 = 3$ à gauche, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c. Représenter $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

CORRECTION

1. a. Déterminons D_f

$$x \in D_f \iff x^2 - x - 2 \geq 0$$

Réolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - x - 2 \geq 0$

Son discriminant: $\Delta = b^2 - 4ac = 9$

Puisque $\Delta > 0$

Alors le trinôme $x^2 - x - 2$ admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -1$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	○	○	+

D'où: $D_f =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

b. Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x - 2}) + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - x - 2})(x + \sqrt{x^2 - x - 2})}{x + \sqrt{x^2 - x - 2}} + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x^2 - x - 2}^2}{x + \sqrt{x^2 - x - 2}} + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - x - 2)}{x + \sqrt{x^2 - x - 2}} + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - x - 2)}{x + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} + 1 \end{aligned}$$

$$\sqrt{u(x)} \text{ --- } \rightarrow u(x) \geq 0$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-2 \end{cases}$$

Si $\Delta > 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Supposons $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	○	○	signe de a
	a	-	+	a

Il suffit de remplacer.

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$
Et puisque $x = \sqrt{x^2}$
Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

Remarquer que 1 ne pose aucun problème, c'est pour cela, il faut le laisser loin.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x + x \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}} + 1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \left(1 + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}\right)} + 1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}} + 1 \\
 &= \frac{1}{2} + 1 \\
 &= \frac{3}{2} \quad \text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

c_n La continuité de f sur D_f .

On a : $x \mapsto x^2 - x - 2$ est continue sur D_f

Et : $(\forall x \in D_f); x^2 - x - 2 \geq 0$

Donc : $x \mapsto \sqrt{x^2 - x - 2}$ est continue sur D_f

Et : $x \mapsto -\sqrt{x^2 - x - 2}$ est continue sur D_f

Et puisque : $x \mapsto x + 1$ est continue sur D_f

Alors $f : x \mapsto x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2}$ est continue sur D_f

(Somme de deux fonctions continues)

Si u est une fonction continue sur l'intervalle I
Et $(\forall x \in I); u(x) \geq 0$
Alors : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est continue sur I

$[2]_n$ La dérivabilité de f en $x_0 = 2$ à droite

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2} - 3}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2 - \sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} - \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 - \frac{\sqrt{x^2 - x - 2} \sqrt{x^2 - x - 2}}{(x - 2) \sqrt{x^2 - x - 2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 - \frac{x^2 - x - 2}{(x - 2) \sqrt{x^2 - x - 2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 - \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2) \sqrt{x^2 - x - 2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 - \frac{(x + 1)}{\sqrt{x^2 - x - 2}} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Mais, en remarquant que $x - 2 \rightarrow 0$ et $\sqrt{x^2 - x - 2} \rightarrow 0$
ça sera mieux de séparer les limites

Le conjugué de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ lui même

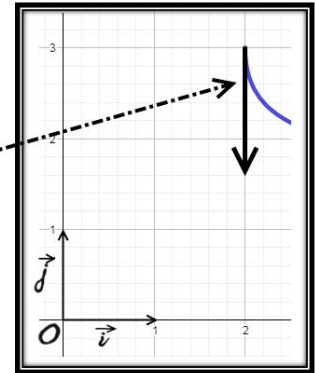
Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 2$ à droite

Interprétation graphique

(C_f) admet une **demi-tangente verticale** à droite du point A(2,3)
(Dirigée vers le bas)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \dots = -\infty$$

$\boxed{+} \times \boxed{-} = \boxed{-}$



La dérivabilité de f en $x_0 = -1$ à gauche

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x + 1}{x + 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 - \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{(x + 1)\sqrt{x^2 - x - 2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 - \frac{x^2 - x - 2}{(x + 1)\sqrt{x^2 - x - 2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 - \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x + 1)\sqrt{x^2 - x - 2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 - \frac{(x - 2)}{\sqrt{x^2 - x - 2}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à gauche, il faut calculer la limite:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Mais, en remarquant que $x + 1 \rightarrow 0$ et $\sqrt{x^2 - x - 2} \rightarrow 0$ ça sera mieux de séparer les limites

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x - 2)}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

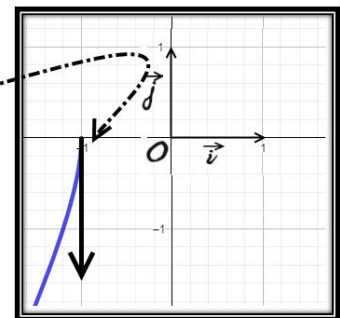
Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$ à gauche

Interprétation graphique

(C_f) admet une **demi-tangente verticale** à gauche du point C(-1,0)
(Dirigée vers le bas)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \dots = +\infty$$

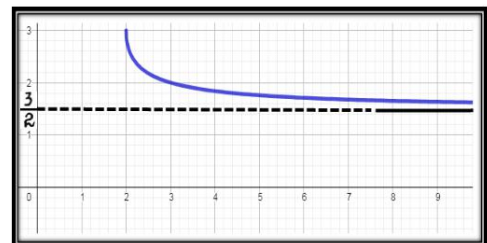
$\boxed{-} \times \boxed{+} = \boxed{-}$



3. Déterminons la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$$

Donc (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{3}{2}$ au voisinage de $+\infty$



B. Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

Pour cela, il suffit de vérifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \left(2x + \frac{1}{2} \right) \right) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \left(2x + \frac{1}{2} \right) \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2} - 2x - \frac{1}{2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x - 2} \right) \left(x - \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x - 2} \right)}{\left(x - \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x - 2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \sqrt{x^2 - x - 2}^2}{\left(x - \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x - 2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + \frac{1}{4} - (x^2 - x - 2)}{\left(x - \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x - 2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{9}{4}}{\left(x - \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x - 2} \right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ça sera mieux de factoriser par le $(-)$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$
Et puisque $x = \sqrt{x^2}$
Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Remarquer que le dénominateur tend vers $-\infty$

D'où la droite (Δ) $y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

c. La position relative de (C_f) et (Δ)

Étudions le signe de $f(x) - y$

$$\begin{aligned} f(x) - y &= x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2} - 2x - \frac{1}{2} \\ &= -x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x - 2} \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[2; +\infty[$

Soit $x \in [2; +\infty[$

Donc $x \in [2; +\infty[\Rightarrow x \geq 2$

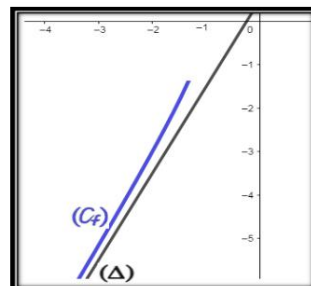
$$\Rightarrow -x \leq -2$$

$$\Rightarrow -x + \frac{1}{2} \leq -\frac{3}{2}$$

Donc : $-x + \frac{1}{2} < 0$

Et on a $-\sqrt{x^2 - x - 2} \leq 0$

Donc $(\forall x \in [2; +\infty[); -x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x - 2} < 0$



Il faut étudier le signe de $f(x) - y$

D'où (C_f) est au dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2; +\infty[$

Sur l'intervalle $]-\infty; -1]$

Soit $x \in]-\infty; -1]$

$$\text{On a : } f(x) - y = x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2} - 2x - \frac{1}{2} \\ = -\frac{\frac{9}{4}}{\left(x - \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x - 2}\right)}$$

$$\text{Or } x \leq -1 \Rightarrow x - \frac{1}{2} \leq -\frac{3}{2} \\ \Rightarrow x - \frac{1}{2} < 0$$

$$\text{Et } -\sqrt{x^2 - x - 2} \leq 0$$

$$\text{Donc : } x - \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x - 2} < 0 \text{ et } \frac{9}{4} > 0$$

$$\text{Donc : } \frac{\frac{9}{4}}{\left(x - \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x - 2}\right)} < 0$$

$$\text{Donc : } -\frac{\frac{9}{4}}{\left(x - \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - x - 2}\right)} > 0$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in]-\infty; -1]); f(x) - y > 0$$

D'où (C_f) est au dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; -1]$

Conclusion

(C_f) est au dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2; +\infty[$

(C_f) est au dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; -1]$

④. a. Montrons que : $f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - x - 2} - (2x - 1)}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{-1; 2\}$

Soit $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{-1; 2\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2})' \\ &= 1 - \frac{(x^2 - x - 2)'}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} \\ &= 1 - \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^2 - x - 2} - (2x - 1)}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } (\forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{-1; 2\}); f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - x - 2} - (2x - 1)}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

Ici, on a $-x > 0$ et $-\sqrt{x^2 - x - 2} < 0$

Dans ce cas on peut comparer $-x + \frac{1}{2}$ et $\sqrt{x^2 - x - 2}$ ou bien étudier le signe de $f(x) - y$ en multipliant par le conjugué.

(On utilise l'expression de la dernière étape de $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x + \frac{1}{2}))$)

Remarquer que $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{-1; 2\}$ car f n'est pas dérivable en $x_0 = 2$ à droite et en $x_0 = -1$ à gauche

$$(ax)' = a$$

$$a' = 0$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

b. Le signe de $f'(x)$

$$\text{On a } \forall x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[; f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2-x-2} - (2x-1)}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$\text{Puisque } \forall x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[; 2\sqrt{x^2-x-2} > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $2\sqrt{x^2-x-2} - (2x-1)$

Sur l'intervalle $]-\infty; -1[$

$$\text{Soit } x \in]-\infty; -1[$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } x < -1 &\Rightarrow 2x < -2 \\ &\Rightarrow 2x - 1 < -3 \\ &\Rightarrow -(2x - 1) > 3 \end{aligned}$$

$$\text{Et on a : } \forall x \in]-\infty; -1[; 2\sqrt{x^2-x-2} > 0$$

$$\text{Donc : } \forall x \in]-\infty; -1[; 2\sqrt{x^2-x-2} - (2x-1) > 3$$

$$\text{D'où : } \forall x \in]-\infty; -1[; f'(x) > 0$$

Sur l'intervalle $]2; +\infty[$

$$\text{Soit } x \in]2; +\infty[$$

$$\text{On a : } \forall x \in]2; +\infty[; 2\sqrt{x^2-x-2} > 0 \text{ et } (2x-1) > 0$$

$$(2\sqrt{x^2-x-2})^2 = 4(x^2-x-2) = 4x^2 - 4x - 8$$

$$(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\text{Donc : } (2\sqrt{x^2-x-2})^2 - (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x - 8 - (4x^2 - 4x + 1) = -9$$

$$\text{Donc : } (2\sqrt{x^2-x-2})^2 - (2x-1)^2 < 0$$

$$\text{Donc : } (2\sqrt{x^2-x-2})^2 < (2x-1)^2$$

$$\text{Et puisque : } 2\sqrt{x^2-x-2} > 0 \text{ et } (2x-1) > 0$$

$$\text{Alors } 2\sqrt{x^2-x-2} < (2x-1)$$

$$\text{Donc : } 2\sqrt{x^2-x-2} - (2x-1) < 0$$

$$\text{Et par suite : } \forall x \in]2; +\infty[; f'(x) < 0$$

Conclusion

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[; f'(x) > 0 \\ \forall x \in]2; +\infty[; f'(x) < 0 \end{cases}$$

c. Le tableau de variations de f

D'après le résultat de la question précédente

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[; f'(x) > 0 \\ \forall x \in]2; +\infty[; f'(x) < 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$			$-$
$f(x)$	$-\infty$			$\frac{3}{2}$

Les deux barres en -1 et 2 , juste car $f'_{\frac{1}{2}}(-1)$ et $f'_{\frac{1}{2}}(2)$ n'existent pas

5. a. Montrons que : $\forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{-1; 2\}; f''(x) = \frac{9}{4(\sqrt{x^2-x-2})^3}$

Soit $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{-1; 2\}$

$$\text{On a : } f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2-x-2} - (2x-1)}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = 1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

Calculons $f''(x)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}\right)' \\ &= 0 - \frac{(2x-1)' \times 2\sqrt{x^2-x-2} - (2x-1)(2\sqrt{x^2-x-2})'}{(2\sqrt{x^2-x-2})^2} \\ &= - \frac{2 \times 2\sqrt{x^2-x-2} - (2x-1) \times 2 \times \frac{(x^2-x-2)'}{2\sqrt{x^2-x-2}}}{(2\sqrt{x^2-x-2})^2} \\ &= - \frac{4\sqrt{x^2-x-2} - (2x-1) \times \frac{(2x-1)}{\sqrt{x^2-x-2}}}{4(\sqrt{x^2-x-2})^2} \\ &= - \frac{4\sqrt{x^2-x-2}^2 - (2x-1)^2}{\sqrt{x^2-x-2}} \\ &= - \frac{4(\sqrt{x^2-x-2})^2}{4(\sqrt{x^2-x-2})^2} \\ &= - \frac{4(x^2-x-2) - (4x^2-4x+1)}{4(\sqrt{x^2-x-2})^2 \sqrt{x^2-x-2}} \\ &= - \frac{-9}{4(\sqrt{x^2-x-2})^3} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{-1; 2\}; f''(x) = \frac{9}{4(\sqrt{x^2-x-2})^3}$$

b. La concavité de (C_f)

$$\text{On a : } \forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{-1; 2\}; f''(x) = \frac{9}{4(\sqrt{x^2-x-2})^3}$$

$$\text{Or : } \forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{-1; 2\}; 4(\sqrt{x^2-x-2})^3 > 0 \text{ et } 9 > 0$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$a' = 0$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Donc $\forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{-1; 2\}; f''(x) > 0$

D'où (C_f) est convexe sur $\mathcal{D}_f$

⑥ Une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point $A(3; 2)$

$$\begin{aligned}(T): y &= f'(3)(x-3) + f(3) \\ &= -\frac{1}{4}(x-3) + 2 \\ &= -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + 2 \\ &= -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}\end{aligned}$$

⑦ Représentation de (C_f)

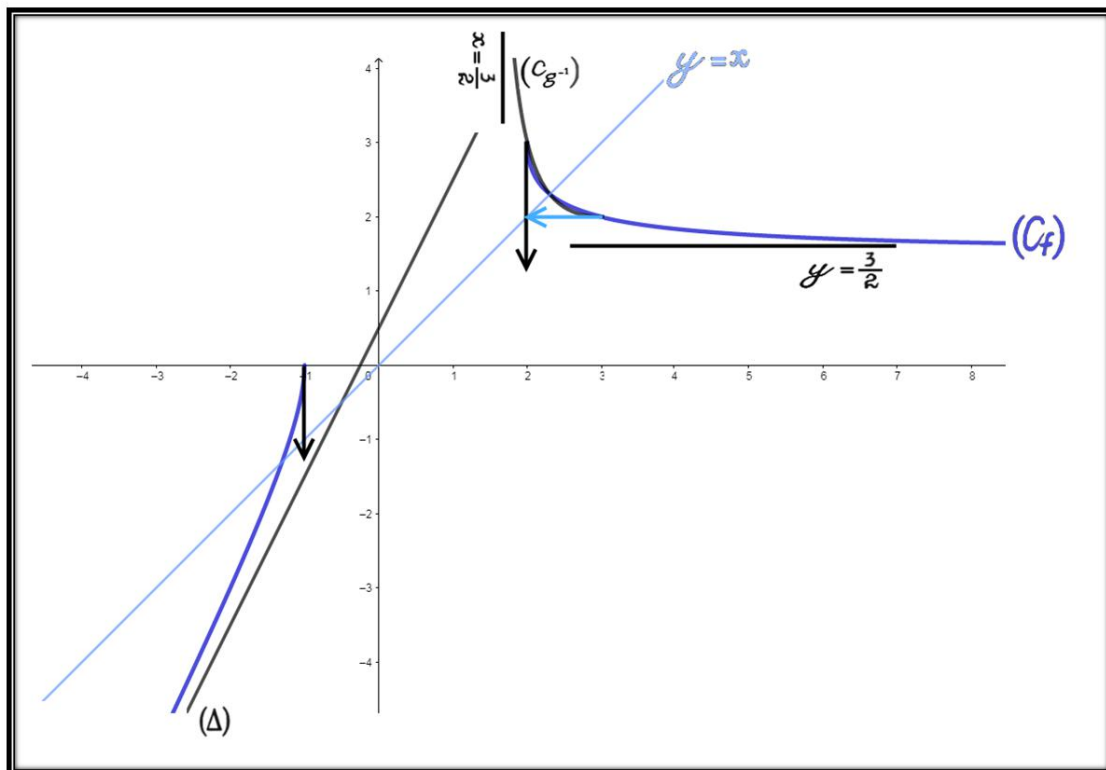
Explication

La droite (Δ) passe par $B(0; \frac{1}{2})$ et $D(0; \frac{5}{2})$

On représente les deux demi-tangentes verticales en $A(2, 3)$ et $C(-1, 0)$

La droite horizontale $y = \frac{3}{2}$ (Juste au voisinage de $+\infty$)

En fin utiliser le tableau de variations de f



8. On a

g est continue sur l'intervalle $I=[2;+\infty[$

Et g est strictement décroissante sur I

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que

$$\begin{aligned} J &= g([2;+\infty[) \\ &= \left[g(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[\\ &= \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); g(2) \right] \\ &= \left[\frac{3}{2}; 3 \right] \end{aligned}$$

b. La dérivabilité de g^{-1} en $x_0=3$ à gauche

On a $g(2)=3$

Donc $g^{-1}(3)=2$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(3)}{x - 3}$$

Posons $u = g^{-1}(x)$

Donc $x = g(u)$

Si $x \rightarrow 3^-$

Alors $u \rightarrow 2^+$

Donc, on aura

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(3)}{x - 3} &= \lim_{u \rightarrow 2^+} \frac{u - 2}{g(u) - g(2)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 2^+} \frac{1}{\frac{g(u) - g(2)}{u - 2}} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{u \rightarrow 2^+} \frac{g(u) - g(2)}{u - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\infty$$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement décroissante

Ici, on ne peut pas utiliser la propriété

Soit $g(a)=b$

Alors $g^{-1}(b)=a$

Si $\begin{cases} g \text{ est dérivable en } a \\ g'(a) \neq 0 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} g^{-1} \text{ est dérivable en } b \\ (g^{-1})'(b) = \frac{1}{g'(g^{-1}(b))} = \frac{1}{g'(a)} \end{cases}$

car g n'est pas dérivable en 2

Dans ce cas, il faut effectuer le changement de variable en utilisant le résultat de la question 2

Donc $\lim_{u \rightarrow 2^+} \frac{1}{\frac{g(u) - g(2)}{u - 2}} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(3)}{x - 3} = 0$

D'où g^{-1} est dérivable en $x_0 = 3$ à gauche et on a $g'_g(3) = 0$

c~ Représentation de $(C_{g^{-1}})$ Voir figure ~ Question 5~

Explication

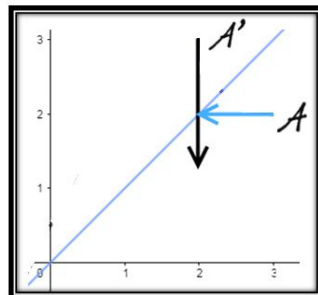
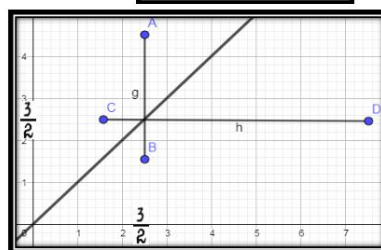
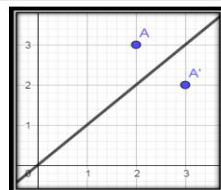
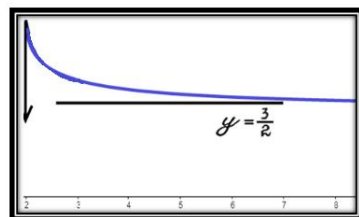
☞ (C_g) est juste (C_f) sur l'intervalle $I =$

☞ La droite $(\Delta): y = x$ change les rôles de x et y
Autrement dit :

☞ L'image du point $A(2,3)$ est $A'(3,2)$

☞ L'image de la droite $y = \frac{3}{2}$
→ est la droite $x = \frac{3}{2}$

☞ L'image de demi-tangente verticale
à droite du point A dirigée vers le bas
→ est la demi-tangente horizontale
à gauche du point A'



EXERCICE 28

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{1-x^3}; & x < 1 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2-1}; & x \geq 1 \end{cases}$$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

- ① ~ Montrer que f est continue en $x_0=1$
- ② ~ Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- ③ ~ Étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$, puis donner une interprétation graphique aux résultats obtenus
- ④ ~ a ~ Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$
 b ~ Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) sur l'intervalle $[1; +\infty[$
- ⑤ ~ Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$.
- ⑥ ~ a ~ Calculer $f'(x)$ sur les deux intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$
 b ~ Étudier le signe de $f'(x)$
 c ~ Dresser le tableau de variations de f
- ⑦ ~ Tracer la courbe (C_f)
- ⑧ ~ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty; 1]$
 a ~ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 b ~ Déterminer $g^{-1}(x)$; pour tout $x \in J$.
 c ~ Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

CORRECTION

- ① ~ La continuité de f en $x_0=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 + \sqrt[3]{1-x^3}) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + \sqrt{x^2-1}) = 1$$

Il suffit de remplacer.

$$f(1) = 1 + \sqrt{1^2 - 1} = 1$$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

Alors f est continue en $x_0 = 1$

2. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \sqrt[3]{1 - x^3}) = +\infty \quad \left(\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x^3 = +\infty \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty \end{cases}$$

3. La dérivabilité de f en $x_0 = 1$

La dérivabilité de f en $x_0 = 1$ à gauche

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + \sqrt[3]{1 - x^3} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[3]{1 - x^3}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[3]{1 - x^3} (\sqrt[3]{1 - x^3})^2}{(x - 1) (\sqrt[3]{1 - x^3})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt[3]{1 - x^3})^3}{(x - 1) (\sqrt[3]{1 - x^3})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^3}{(x - 1) (\sqrt[3]{1 - x^3})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1 - x)(1^2 + x + x^2)}{(x - 1) (\sqrt[3]{1 - x^3})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x - 1)(1 + x + x^2)}{(x - 1) (\sqrt[3]{1 - x^3})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(1 + x + x^2)}{(\sqrt[3]{1 - x^3})^2} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ à gauche

Interprétation graphique

Il suffit de remplacer.

Il suffit de remplacer.

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à gauche, il faut calculer la limite :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

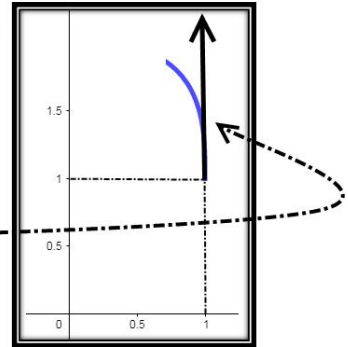
Il suffit de multiplier par le conjugué

Le conjugué de $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{a^2}$

☛ (C_f) admet une **demi-tangente verticale** à gauche du point A(1,1)
(Dirigée vers le haut)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \dots = -\infty$$

⊖ × ⊖ = ⊕



☛ La dérivabilité de f en $x_0=1$ à droite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1} \sqrt{x^2 - 1}}{(x - 1) \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{x^2 - 1}{(x - 1) \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1) \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{(x + 1)}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Mais, en remarquant que $x - 1 \rightarrow 0$ et $\sqrt{x^2 - 1} \rightarrow 0$ ça sera mieux de séparer les limites

Le conjugué de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ lui même

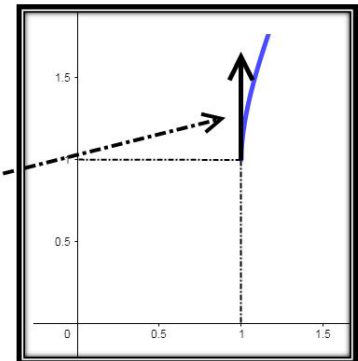
Donc f n'est pas dérivable en $x_0=1$ à gauche

Interprétation graphique

☛ (C_f) admet une **demi-tangente verticale** à droite du point A(1,1)
(Dirigée vers le haut)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \dots = +\infty$$

⊖ × ⊖ = ⊕



④ Montrons que la droite (D) d'équation $y=2x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

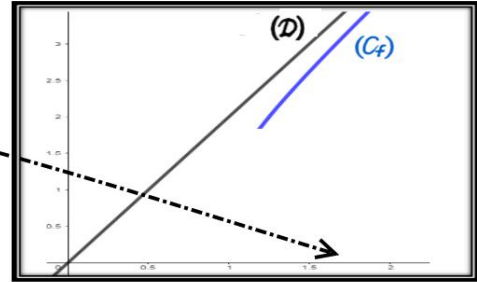
Il suffit de vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 - 1} - 2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1} - x^2}{\sqrt{x^2-1} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1 - x^2}{\sqrt{x^2-1} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

D'où la droite (D): $y=2x$
est une asymptote oblique
à (C_f) au voisinage de $+\infty$

Si on remplace, on trouve
La forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$
Et puisque $x = \sqrt{x^2}$
Alors dans ce cas, il faut
multiplier par le conjugué.



6. La position relative de (C_f) et (D) sur l'intervalle $[1; +\infty[$
Étudions le signe de $f(x) - y$ sur $[1; +\infty[$

Soit $x \in [1; +\infty[$

On a: $f(x) - 2x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x}$

Or: $\forall x \in [1; +\infty[; \sqrt{x^2-1} + x > 0$ et $-1 < 0$

Donc: $\forall x \in [1; +\infty[; f(x) - 2x < 0$

Il faut étudier
le signe de $f(x) - y$

On utilise les expressions
de la dernière étape
de $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$

D'où (C_f) est au dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[1; +\infty[$

5. Déterminons la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt[3]{1-x^3}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + \frac{\sqrt[3]{-x^3(-\frac{1}{x^3} + 1)}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + \frac{\sqrt[3]{(-x)^3(-\frac{1}{x^3} + 1)}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + \frac{-x \sqrt[3]{(-\frac{1}{x^3} + 1)}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} - \sqrt[3]{(-\frac{1}{x^3} + 1)} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

Si on remplace, on
trouve la forme
indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$

Dans ce cas, on pense
toujours à factoriser

Pour $\sqrt[3]{1-x^3}$, on doit
factoriser par $-x^3$ à
l'intérieur de $\sqrt[3]{}$
pour avoir $-x^3 > 0$

$$-x^3 = (-x)^3$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$



$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \sqrt[3]{1-x^3} + x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt[3]{1-x^3} + x)((\sqrt[3]{1-x^3})^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + x^2)}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + x^2} + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt[3]{1-x^3})^3 + x^3}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + x^2} + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^3 + x^3}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + x^2} + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + x^2} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

Remarque

On a

$$f(x) - y = \frac{1}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + x^2}$$

Or, au voisinage de $-\infty$

$$\text{on a } (\sqrt[3]{1-x^3})^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + x^2 > 0$$

Donc $f(x) - y > 0$ (pour x assez petit)

Autrement dit (C_f) est au dessus de (Δ) au voisinage de $-\infty$

⑥. a. Calculons $f'(x)$



Sur l'intervalle $]-\infty; 1[$

Soit $x \in]-\infty; 1[$

$$f'(x) = (1 + \sqrt[3]{1-x^3})'$$

Remarque que 1 ne pose aucun problème, c'est pour cela, il faut le laisser loin.

Si on remplace, on trouve

la forme indéterminée $+\infty + (-\infty)$

Et puisque $\sqrt[3]{-x^3} = -x$

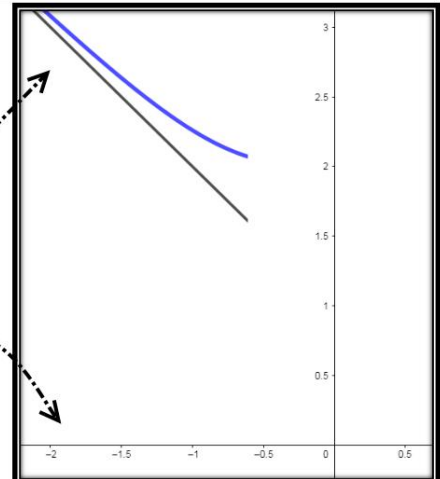
Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \rightarrow \infty \\ \rightarrow 0 \\ \rightarrow \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \alpha x) = \begin{cases} \rightarrow b \\ \rightarrow \infty \end{cases}$$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = \alpha x + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$



$$\begin{aligned}
 &= 0 + \frac{(1-x^3)'}{3(\sqrt[3]{1-x^3})^2} \\
 &= \frac{-3x^2}{3(\sqrt[3]{1-x^3})^2} \\
 &= -\frac{x^2}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2}
 \end{aligned}$$

D'où : $(\forall x \in]-\infty; 1[); f'(x) = -\frac{x^2}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2}$

Sur l'intervalle $]1; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } x &\in]1; +\infty[\\
 f'(x) &= (x + \sqrt{x^2-1})' \\
 &= x' + (\sqrt{x^2-1})' \\
 &= 1 + \frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}} \\
 &= 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \\
 &= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}
 \end{aligned}$$

D'où : $(\forall x \in]1; +\infty[); f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

6. Étudions le signe de $f'(x)$

Sur l'intervalle $]-\infty; 1[$

On a : $(\forall x \in]-\infty; 1[); f'(x) = \frac{-x^2}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2}$

Or : $\forall x \in]-\infty; 1[; (\sqrt[3]{1-x^3})^2 > 0$ et $-x^2 \leq 0$

Donc : $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) \leq 0$

Sur l'intervalle $]1; +\infty[$

On a : $(\forall x \in]1; +\infty[); f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Or : $\forall x \in]1; +\infty[; \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$ et $1 > 0$

Donc : $\forall x \in]1; +\infty[; f'(x) > 0$

Conclusion

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) \leq 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[; f'(x) > 0 \end{cases}$$

$$a' = 0$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$a' = 0$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

On peut s'arrêter ici,
car $1 > 0$ et $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$
Le fait que $x > 1$

Remarque que $f'(x)$ s'annule
en 0 car $0 \in]-\infty; 1[$



Il faut bien utiliser les
symboles $\geq; \leq; >$ et $<$

c. Le tableau de variations de f
D'après les résultats précédents, on aura :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$		1	$+\infty$

Les deux barres en 1, juste car $f'(1)$ n'existe pas

Remarques importantes

On a $f'(0)=0 \Leftrightarrow (C_f)$ admet une tangente horizontale au point $B(0;2)$ ($f(0)=2$)

On a f' s'annule en 0 et ne change pas son signe
 $\Rightarrow$ Le point $B(0;2)$ est un point d'inflexion
(C'est une condition suffisante et n'est pas nécessaire)

7. La représentation de (C_f)

Explication

 Représentation des tangentes

 Les deux demi-tangentes verticales en $A(1,1)$

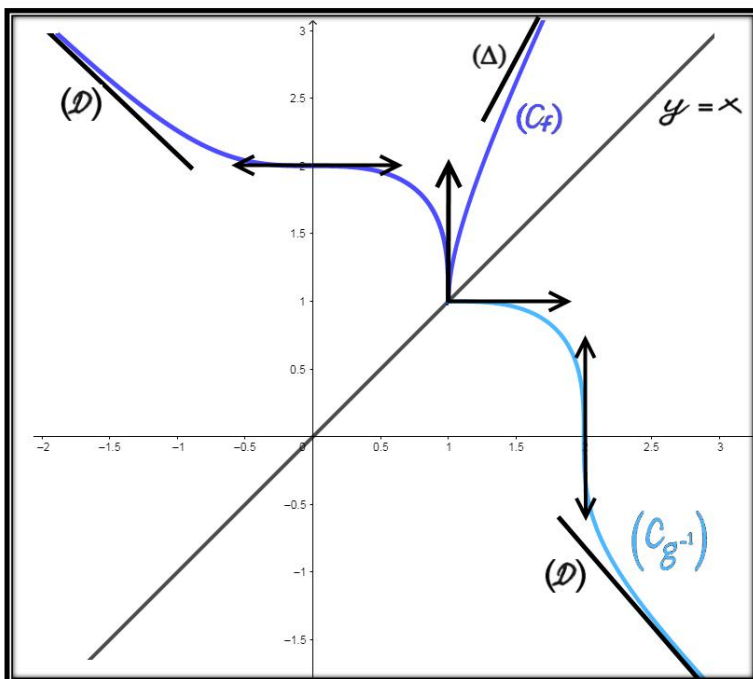
 La tangente horizontale au point $B(0;2)$

 Représentation des asymptotes

 La droite $(D): y=2x$ passe par $O(0;0)$ et $C(1;2)$

 La droite $(\Delta): y=-x+1$ passe par $E(1;0)$ et $F(0;1)$

 En fin, traduire le tableau de variations de f



8_v

On a :
$$\begin{cases} g(x) = 1 + \sqrt[3]{1-x^3} ; x < 1 \\ g(1) = 1 \end{cases}$$

On a : $x \mapsto 1-x^3$ est continue sur $]-\infty; 1[$

Et $\forall x \in]-\infty; 1[; 1-x^3 \geq 0$

Donc $x \mapsto \sqrt[3]{1-x^3}$ est continue sur $]-\infty; 1[$

Et comme $x \mapsto 1$ est continue sur $]-\infty; 1[$

Alors $g : x \mapsto 1 + \sqrt[3]{1-x^3}$ est continue sur $]-\infty; 1[$

(Comme étant somme de deux fonctions continue)

Et puisque g est continue à gauche de 1 (car f l'est)

Alors g est continue sur $]-\infty; 1[$

Et on a g est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que, $J = g(]-\infty; 1[)$

$$J = g(]-\infty; 1[)$$

$$= \left[g(1); \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right[\quad y \quad y$$

$$= [1; +\infty[$$

6. Déterminons $g^{-1}(x)$; pour tout $x \in J$.

$$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \iff \begin{cases} g^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases}$$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement décroissante

$$\begin{aligned} g(y) = x &\Leftrightarrow 1 + \sqrt[3]{1-y^3} = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{1-y^3} = x-1 \\ &\Leftrightarrow 1-y^3 = (x-1)^3 \\ &\Leftrightarrow y^3 = 1-(x-1)^3 \end{aligned}$$

Si $x \in [1; 2]$

$$\begin{aligned} x \leq 2 &\Rightarrow x-1 \leq 1 \\ &\Rightarrow (x-1)^3 \leq 1 \\ &\Rightarrow 1-(x-1)^3 \geq 0 \end{aligned}$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} g(y) = x &\Leftrightarrow y^3 = 1-(x-1)^3 \\ &\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{1-(x-1)^3} \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in [1; 2]; g^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-(x-1)^3}$

Si $x \in]2; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{On a : } x > 2 &\Rightarrow x-1 > 1 \\ &\Rightarrow (x-1)^3 > 1 \\ &\Rightarrow 1-(x-1)^3 < 0 \\ &\Rightarrow -(1-(x-1)^3) > 0 \\ &\Rightarrow (x-1)^3 - 1 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On aura donc } g(y) = x &\Leftrightarrow y^3 = 1-(x-1)^3 \\ &\Leftrightarrow y^3 = 1-(x-1)^3 \\ &\Leftrightarrow -y^3 = (x-1)^3 - 1 \\ &\Leftrightarrow (-y)^3 = (x-1)^3 - 1 \\ &\Leftrightarrow -y = \sqrt[3]{(x-1)^3 - 1} \\ &\Leftrightarrow y = -\sqrt[3]{(x-1)^3 - 1} \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in]2; +\infty[; g^{-1}(x) = -\sqrt[3]{(x-1)^3 - 1}$

Conclusion

$$\begin{cases} \forall x \in [1; 2]; g^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-(x-1)^3} \\ \forall x \in]2; +\infty[; g^{-1}(x) = -\sqrt[3]{(x-1)^3 - 1} \end{cases}$$

Pour déterminer $g^{-1}(x)$
On prend $x \in I$ et on
cherche l'unique $y \in I$
tel que $g(y) = x$

Ici, on remarque aisément que

si $x = 2$ alors $y^3 = 0$

si $x \leq 2 \Rightarrow y^3 \geq 0$

si $x > 2 \Rightarrow y^3 < 0$

Donc, dans le cas où $x > 2$ ($x \in]2; +\infty[$)
on aura $1-(x-1)^3 < 0$

Et on a pas le droit d'écrire $\sqrt[3]{1-(x-1)^3}$

c_n La représentation de $(C_{g^{-1}})$

☞ g est définie sur $]-\infty; 1]$

☞ g^{-1} est définie sur $[1; +\infty[$

☞ (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite $y=x$

☞ La droite $(\Delta): y=x$ change les rôles de x et y
Autrement dit :

☞ (C_g) admet une demi-tangente verticale à gauche du point $A(1,1)$ dirigée vers le haut

☞ $(C_{g^{-1}})$ admet une demi-tangente horizontale à droite du point $A(1,1)$

☞ (C_g) admet une tangente horizontale au point $B(0;2)$

☞ $(C_{g^{-1}})$ admet une tangente verticale au point $B'(2;0)$

☞ L'image de l'asymptote oblique $(\Delta): y = -x+1$

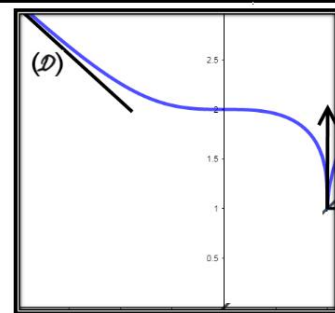
On a : $y = -x+1$

$x = -y+1$

$y = -x+1$

On change les rôles de x et y

☞ L'image de (Δ) est (Δ)



EXERCICE 29

I/ Soit g la fonction définie par: $g(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{x}$

- ① ~ Déterminer D_g le domaine de définition de g
- ② ~ a ~ Calculer les limites: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
 b ~ Donner une interprétation géométrique aux résultats précédents.
- ③ ~ Montrer que le point $\Omega(0;1)$ est le centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction g .
- ④ ~ Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x)-1}{x-2}$, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu
- ⑤ ~ a ~ Calculer $g'(x)$, pour tout $x \in D_g \setminus \{-2; 2\}$
 b ~ Dresser le tableau de variations de g sur l'intervalle $[2; +\infty[$

II/ On considère la fonction f définie par:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) & ; x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[\\ f(x) = \sqrt{4-x^2} + 1; & x \in]-2; 2[\end{cases}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- ① ~ Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et montrer que la restriction de f sur l'intervalle $] -2; 2[$ est une fonction paire.
- ② ~ Étudier la continuité de f en $x_0 = 2$
- ③ ~ Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 2$ à gauche, puis donner une interprétation géométrique à ce résultat.
- ④ ~ a ~ Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-2; 2[$
 b ~ Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$

5. Tracer (C_f) (On prend $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$)

6. Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [2; +\infty[$
a. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1}

définie sur un intervalle J à déterminer

b. Représenter $(C_{h^{-1}})$ la courbe représentative de la fonction h^{-1} dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

c. Déterminer $h^{-1}(x)$, pour tout $x \in J$.

CORRECTION

1. Déterminons D_g

$$x \in D_g \iff x^2 - 4 \geq 0 \text{ et } x \neq 0$$

$$\iff (x-2)(x+2) \geq 0 \text{ et } x \neq 0$$

Étudions le signe de $(x-2)(x+2)$

$$x-2=0 \iff x=2$$

$$x+2=0 \iff x=-2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
x^2-4	+	○	○	+
Règle	Signe de a	Signe de $(-a)$	Signe de a	

Donc $x \in D_g \iff x \in]-\infty; 2] \cup [2; +\infty[$ et $x \neq 0$

D'où : $D_g =]-\infty; 2] \cup [2; +\infty[$

2. a. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{x} \end{aligned}$$

$$\frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow v(x) \neq 0$$

$$\sqrt{u(x)} \rightarrow u(x) \geq 0$$

ERREUR 404

$$\text{Si } (x-2)(x+2) \geq 0$$

$$\text{Alors } x-2 \geq 0 \text{ ou } x+2 \geq 0$$



Ça va très bien !

Pour étudier le signe de $(x-2)(x+2)$
ça sera mieux de dresser le tableau de signe

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$

Dans ce cas, on pense toujours à factoriser

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$$

$$= 2$$

 Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$

Dans ce cas, on pense toujours à *factoriser*

6_v

 On a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$

Donc la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$



On a: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

Donc la droite d'équation $y = 0$ (L'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$

③_v Montrons que $\Omega(0;1)$ est le centre de symétrie de (C_g)

 Pour cela, il faut vérifier que

$$\begin{cases} (i) (\forall x \in D_g); -x \in D_g \\ (ii) (\forall x \in D_g); g(-x) = 2 - g(x) \end{cases}$$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$

Alors la droite d'équation $y = a$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de ∞

Pour montrer qu'un point $\Omega(a;b)$ est le centre de symétrie de (C_f) , il faut établir les deux conditions suivantes:

$$\begin{cases} (i) (\forall x \in D_f); 2a - x \in D_f \\ (ii) (\forall x \in D_f); f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

(i) On a : $D_g =]-\infty; 2] \cup [2; +\infty[$

Donc $-x \in D_g$ pour tout $x \in D_g$

(ii) Vérifions que : $(\forall x \in D_g); g(-x) = 2 - g(x)$

Il suffit de vérifier que : $g(-x) + g(x) = 2$ pour tout $x \in D_g$

Soit $x \in D_g$

$$\begin{aligned} g(-x) + g(x) &= \frac{-x + \sqrt{(-x)^2 - 4}}{-x} + \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{x} \\ &= \frac{-x + \sqrt{x^2 - 4}}{-x} + \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{x} \\ &= \frac{-x + \sqrt{x^2 - 4}}{-x} + \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{x} \\ &= \frac{-x}{-x} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{-x} + \frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in D_g); g(-x) + g(x) = 2$

Autrement dit : $(\forall x \in D_g); g(-x) = 2 - g(x)$

D'où, le point $\Omega(0; 1)$ est le centre de symétrie de (C_g)

Remarque

Si $\Omega(a; b)$ est le centre de symétrie de (C_g)

Alors, il suffit d'étudier g sur l'intervalle :

$$D_E = [a; +\infty[\cap \mathbb{R}^+$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$$

④. Calculons $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - 1}{x - 2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - 1}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{x} - 1}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4} - x}{x}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4} \sqrt{x^2 - 4}}{x(x - 2)\sqrt{x^2 - 4}} \end{aligned}$$

Remarquons bien qu'ici, on parle de la dérivabilité de g en $x_0 = 2$ à droite

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Il suffit de multiplier par le conjugué

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)\sqrt{x^2-4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)\sqrt{x^2-4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x\sqrt{x^2-4}} \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

Le conjugué de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ lui-même

Interprétation graphique

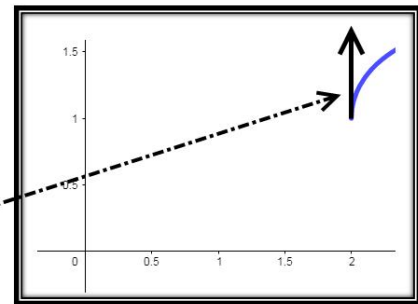
On a $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - 1}{x - 2} = +\infty$

Donc g n'est pas dérivable en $x_0 = 2$ à droite.

☛ (Cf) admet une
demi-tangente verticale
à droite du point $A(2,1)$
(Dirigée vers le haut)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \dots = +\infty$$

$$\oplus \times \oplus = \oplus$$



5. a. Calculons $g'(x)$ pour tout $x \in D_g \setminus \{-2; 2\}$
Soit $x \in D_g \setminus \{-2; 2\}$

On a $g(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{x} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc: } g'(x) &= \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} \right)' \\
 &= 0 + \frac{(\sqrt{x^2 - 4})' \cdot x - x' \cdot (\sqrt{x^2 - 4})}{x^2} \\
 &= \frac{(x^2 - 4)' \cdot x - \sqrt{x^2 - 4}}{x^2} \\
 &= \frac{2x}{x^2} \cdot x - \sqrt{x^2 - 4} \\
 &= \frac{x^2}{x^2} - \sqrt{x^2 - 4} \\
 &= 1 - \sqrt{x^2 - 4}
 \end{aligned}$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$a' = 0$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - \sqrt{x^2-4} \sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}} \\ &= \frac{x^2 - (x^2-4)}{x^2 \sqrt{x^2-4}} \\ &= \frac{4}{x^2 \sqrt{x^2-4}} \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{c}$$

D'où : $(\forall x \in D_g \setminus \{-2; 2\}) ; g'(x) = \frac{4}{x^2 \sqrt{x^2-4}}$

6. Le tableau de variations de g .

On a : $g'(x) = \frac{4}{x^2 \sqrt{x^2-4}}$ pour tout $x \in D_g \setminus \{-2; 2\}$

Et puisque $4 > 0$ et $x^2 \sqrt{x^2-4} > 0$ pour tout $x \in D_g \setminus \{-2; 2\}$

Alors : $(\forall x \in D_g \setminus \{-2; 2\}) ; g'(x) > 0$

D'où g est strictement croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$

x	2	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	1	2

II/

① ~

👉 Déterminons D_f

Posons : $\begin{cases} f_1(x) = g(x) & ; x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[\\ f_2(x) = \sqrt{4-x^2} + 1 & ; x \in]-2; 2[\end{cases}$

On a : $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$

👉 $x \in D_{f_1} \iff x \in D_g$ et $x \in]-\infty; 2] \cup [2; +\infty[$

Et puisque : $D_g =]-\infty; 2] \cup [2; +\infty[$

Donc : $D_{f_1} =]-\infty; 2] \cup [2; +\infty[$

$$x \in \mathcal{D}_{f_2} \iff 4 - x^2 \geq 0 \text{ et } x \in]-2; 2[$$

$$\iff (2+x)(2-x) \geq 0 \text{ et } -2 < x < 2$$

Étudions le signe de $(2+x)(2-x)$

$$2+x=0 \iff x=-2$$

$$2-x=0 \iff x=2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$(2-x)$	+	+	0	-
$(2+x)$	-	0	+	+
$(2-x)(2+x)$	-	0	+	-

$$\text{Donc: } x \in \mathcal{D}_{f_2} \iff -2 \leq x \leq 2 \text{ et } -2 < x < 2$$

$$\iff -2 < x < 2$$

$$\text{Donc: } \mathcal{D}_{f_2} =]-2; 2[$$

$$\text{Donc, on aura: } \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_1} \cup \mathcal{D}_{f_2}$$

$$=]-\infty; 2] \cup [2; +\infty[\cup]-2; 2[$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

Montrons que la restriction de f sur l'intervalle est une fonction paire

(i) On a $\mathcal{D}_{f_2} =]-2; 2[$

$$\text{Donc } (\forall x \in \mathcal{D}_{f_2}); -x \in \mathcal{D}_{f_2}$$

$$\text{Soit } x \in \mathcal{D}_{f_2}$$

$$f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} + 1$$

$$= \sqrt{4 - x^2} + 1$$

$$= f(x)$$

Donc f est une fonction paire

Remarque

Sur l'intervalle $]-2; 2[$, on a f est paire, donc il suffit d'étudier f sur $]-2; 2[\cap \mathbb{R}^+ = [0; 2[$

D'où le domaine d'étude de f est $\mathcal{D}_E = [0; +\infty[$

2. La continuité de f en $x_0 = 2$

ERREUR
404

Si $(2+x)(2-x) \geq 0$
Alors $2+x \geq 0$ ou $2-x \geq 0$



Ça va très bien !

Pour étudier le signe de $(2+x)(2-x)$
ça sera mieux de dresser le tableau de signe

f est paire si et seulement si

$$\begin{cases} (i) (\forall x \in \mathcal{D}_f); -x \in \mathcal{D}_f \\ (ii) (\forall x \in \mathcal{D}_f); f(-x) = f(x) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{x}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} + 1$$

$$= 1$$

$$f(2) = g(2) = 1$$

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

Alors f est continue en $x_0 = 2$

$$\text{Si } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Alors f est continue en x_0 .

Il suffit de remplacer x par 2

3. La dérivabilité de f en $x_0 = 2$ à gauche.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2} + 1 - 1}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2} \sqrt{4 - x^2}}{(x - 2) \sqrt{4 - x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^2}{(x - 2) \sqrt{4 - x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2 - x)(2 + x)}{(x - 2) \sqrt{4 - x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(2 + x)}{(x - 2) \sqrt{4 - x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{(2 + x)}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$= -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 2$ à gauche

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à gauche, il faut calculer la limite:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Il suffit de multiplier par le conjugué

Le conjugué de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ lui-même

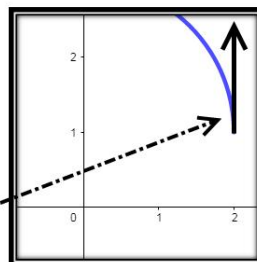
Interprétation graphique

☞ (C_f) admet une demi-tangente verticale à gauche du point $A(2, 1)$

(Dirigée vers le haut)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \dots = -\infty$$

$$\boxed{-} \times \boxed{-} = \boxed{+}$$



Remarque

On a déjà étudié la dérivabilité de f en $x_0=2$ à droite car $f=g$ sur $[2;+\infty[$

④. a_n Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in]-2;2[$

Soit $x \in]-2;2[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{4-x^2}+1)' \\ &= \frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \alpha' = 0$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

D'où : $(\forall x \in]-2;2[); f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

↳ Le tableau de variations de f

✎ Sur l'intervalle $[2;+\infty[$

On a $f(x)=g(x)$ pour tout $x \in [2;+\infty[$

Donc, sur l'intervalle $[2;+\infty[$, f et g ont les mêmes variations.

✎ Sur l'intervalle $[0;2[$

Soit $x \in [0;2[$

$$\text{On a } f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\text{Or : } (\forall x \in [0;2[); \sqrt{4-x^2} > 0 \text{ et } -x \leq 0$$

$$\text{Donc } (\forall x \in [0;2[); f'(x) \leq 0$$

Remarque

f' s'annule en $x_0=0$ (à droite)

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente horizontale à droite du point $B(0;3)$

⑤. Représentation de (C_f)

Explication

Sur l'intervalle $[0; +\infty[$

(C_f) admet une demi-tangente horizontale à droite du point $B(0; 3)$

(C_f) admet une demi-tangente verticale à droite et aussi à gauche du point $A(2; 1)$

La droite $y = 2$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$

Sur l'intervalle $[-2; 0]$

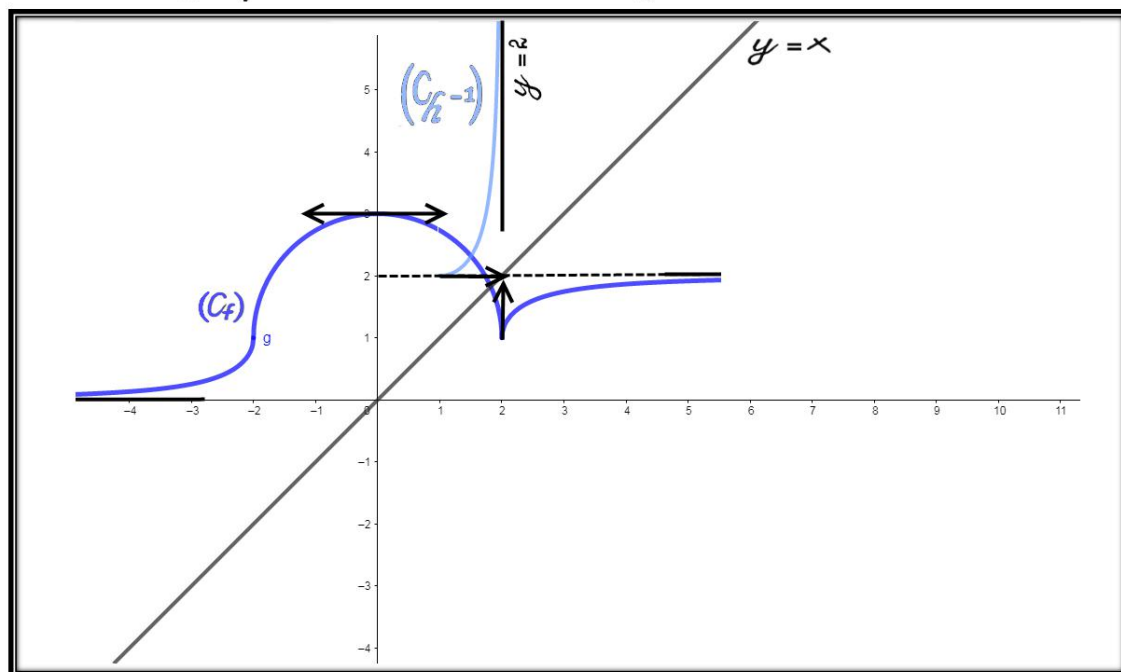
On a f est paire sur $[-2; 2]$

Donc sur $[-2; 2]$, (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Sur l'intervalle $]-\infty; -2]$

On a $\Omega(0; 1)$ est le centre de symétrie de (C_f)

Il faut représenter l'image de la demi-tangente verticale à droite du point $A(2; 1)$ et aussi l'image de l'asymptote horizontale $y = 2$



6. a. Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1}

On a h est continue sur l'intervalle $I = [2; +\infty[$
(Car elle est dérivable sur $]2; +\infty[$ et continue en $x_0 = 2$ à droite)

Et h est strictement croissante sur I

Donc h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J tel que:

$$\begin{aligned} J &= h([2; +\infty[) \\ &= [h(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[\\ &= [1; 2[\end{aligned}$$

b. Construction de

Explication

On a $\begin{cases} h \text{ est définie sur l'intervalle } I \\ h^{-1} \text{ est définie sur l'intervalle } J \end{cases}$

(C_h) et $(C_{h^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$

La droite $y = x$ change les rôles de x et y

L'image du point $A(2, 1)$ est le point $A'(1, 2)$

L'image de la demi-tangente verticale en A (dirigée vers le haut)
est la demi-tangente horizontale en A' (à droite)

L'image de l'asymptote horizontale $y = 2$
est l'asymptote verticale $x = 2$

c. Déterminons $h^{-1}(x)$, pour tout $x \in J$

Soit $x \in J$, cherchons $y \in I$ tel que $h(y) = x$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

$$h(y)=x \Leftrightarrow \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{y}=x$$

$$\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2-4}=xy$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2-4}=xy-y$$

$$\Leftrightarrow y^2-4=(xy-y)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2-4=x^2y^2-2xy^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2-2xy^2+y^2-y^2=-4$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2-2xy^2=-4$$

$$\Leftrightarrow y^2(x^2-2x)=-4$$

$$\Leftrightarrow y^2=-\frac{4}{x^2-2x}$$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{4}{2x-x^2}$$

$$\Leftrightarrow y=\sqrt{\frac{4}{2x-x^2}} \text{ ou } y=-\sqrt{\frac{4}{2x-x^2}}$$

Or $y \in \mathbb{I}$

$$\text{Donc } y=\sqrt{\frac{4}{2x-x^2}}$$

$$\text{D'où } (\forall x \in J); h^{-1}(x)=\sqrt{\frac{4}{2x-x^2}}$$

Pour déterminer $g^{-1}(x)$
On prend $x \in J$ et on
cherche l'unique $y \in \mathbb{I}$
tel que $g(y)=x$

Remarquons que $xy-y=y(x-1)$
Or $y \geq 2$ et $x \geq 1$
Donc $xy-y > 0$

EXERCICE 30

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x+2-2\sqrt{x-1}$
Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère
orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① ~ Déterminer D_f le domaine de définition de f , puis
calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

② ~ a ~ Étudier la branche infinie de (C_f)

b ~ Montrer que : $(\forall x \in D_f); f(x)-x = \frac{-2x+4}{1+\sqrt{x-1}}$

c ~ En déduire la position relative de (C_f) et de la
droite (D) d'équation $y=x$.

- ③ Étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$ à droite, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.
- ④ a. Montrer que f est dérivable sur $]1;+\infty[$
 b. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]1;+\infty[$
 c. Dresser le tableau de variations de f .
- ⑤ Représenter la droite (D) et la courbe (C_f)
- ⑥ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[2;+\infty[$
 a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 b. Résoudre l'équation $g(x)=g^{-1}(x)$
 c. Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère
 d. Montrer que : $(\forall x \in J); g^{-1}(x)=x+2\sqrt{x-2}$

CORRECTION

① Déterminons D_f

$$x \in D_f \iff x-1 \geq 0 \\ \iff x \geq 1$$

$$\text{Donc } D_f = [1; +\infty[$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x+2-2\sqrt{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x+2-2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x+2-2|x|\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x+2-2x\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-2\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

② La branche infinie de (C_f)

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\sqrt{u(x)} \text{ --- } \rightarrow u(x) \geq 0$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty+(-\infty)$
 $x+2-2\sqrt{x-1}$
 Et puisque $x \neq 2\sqrt{x}$ alors, il suffit de factoriser.

 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x} - 2\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - 2\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

 Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 - 2\sqrt{x-1} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - 2\sqrt{x-1}) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$

$\hookrightarrow$ Montrons que : $(\forall x \in D_f); f(x) - x = \frac{-2x+4}{1+\sqrt{x-1}}$

Soit $x \in D_f$

$$\begin{aligned} f(x) - x &= x + 2 - 2\sqrt{x-1} - x \\ &= 2 - 2\sqrt{x-1} \\ &= 2(1 - \sqrt{x-1}) \\ &= \frac{2(1 - \sqrt{x-1})(1 + \sqrt{x-1})}{1 + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{2(1^2 - (\sqrt{x-1})^2)}{1 + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{2(1 - (x-1))}{1 + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{2(1 - x + 1)}{1 + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{2(2 - x)}{1 + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{-2x + 4}{1 + \sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

D'où : $(\forall x \in D_f); f(x) - x = \frac{-2x+4}{1+\sqrt{x-1}}$

$\hookrightarrow$ La position relative de (C_f) et de la droite $(D) : y = x$

Pour calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, on peut toujours penser à utiliser la dernière expression donnant $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$
Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \rightarrow \infty \\ \rightarrow 0 \\ \rightarrow a \neq 0 \end{cases}$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \begin{cases} \rightarrow b \\ \rightarrow \infty \end{cases}$

(C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $+\infty$

On factorise par 2

On multiplie par le conjugué pour avoir $(1+\sqrt{x-1})$ au dénominateur

D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$(\forall x \in \mathcal{D}_f); f(x) - x = \frac{-2x + 4}{1 + \sqrt{x-1}}$$

Et puisque : $(\forall x \in \mathcal{D}_f); 1 + \sqrt{x-1} > 0$

Alors le signe de $f(x) - x$ dépend du signe de $-2x + 4$

$$\begin{aligned} -2x + 4 = 0 &\iff -2x = -4 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

x	1	2	$+\infty$
$-2x + 4$	+	0	-

x	1	2	$+\infty$
$f(x) - x$		0	
	+		-
La position relative	(C_f) est au dessus de (D)	$B(2,2)$ point d'intersection	(C_f) est au dessous de (D)

3. La dérivabilité de f en $x_0 = 1$ à droite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 2 - 2\sqrt{x-1} - 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1 - 2\sqrt{x-1}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} - \frac{2\sqrt{x-1}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - \frac{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}{(x-1)\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - \frac{2\sqrt{x-1}^2}{(x-1)\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - \frac{2(x-1)}{(x-1)\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - \frac{2}{\sqrt{x-1}} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ à droite.

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(1,3)$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

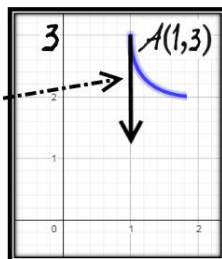
Mais, en remarquant que $x - 1 \rightarrow 0$ et $\sqrt{x-1} \rightarrow 0$ ça sera mieux de séparer les limites

Le conjugué de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ lui même

(Dirigée vers le bas)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \dots = -\infty$$

$$\boxed{+} \times \boxed{-} = \boxed{-}$$



4. Montrons que f est dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$

On $\alpha : x \mapsto x-1$ est dérivable sur $]1; +\infty[$

Et : $(\forall x \in]1; +\infty[); x-1 > 0$

Donc : $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]1; +\infty[$

Et : $x \mapsto -2\sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]1; +\infty[$

Et comme : $x \mapsto x+2$ est dérivable

Alors $f : x \mapsto x+2-2\sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]1; +\infty[$

Comme étant somme de deux fonctions dérivables

Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$

On a f est dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$

Soit $x \in]1; +\infty[$

$$f'(x) = (x+2-2\sqrt{x-1})'$$

$$= 1+0-2 \times \frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}}$$

$$= 1-2 \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x-1}^2 - 1^2}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$= \frac{x-2}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$\text{D'où : } (\forall x \in]1; +\infty[); f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)}$$

Tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$

Si u est une fonction dérivable sur l'intervalle I

Et $(\forall x \in I); u(x) > 0$

Alors : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I

$$(ax)' = a$$

$$a' = 0$$

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \text{ tel que } k \in \mathbb{R}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Ça sera mieux de multiplier $\sqrt{x-1}-1$ par son conjugué pour lever la racine et pour avoir $(\sqrt{x-1}+1)$ qui est positif au dénominateur.

c_n Le tableau de variations de f

On a : $(\forall x \in]1; +\infty[); f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)}$

Et puisque : $(\forall x \in]1; +\infty[); \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1) > 0$

Alors $f'(x)$ et $(x-2)$ ont le même signe

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$ $	0	$+$
$f(x)$	3	2	$+\infty$

5. La représentation de (C_f)

Explication

Représentons les tangentes

La demi-tangente verticale à droite du point $A(1,3)$ (Dirigée vers le bas)

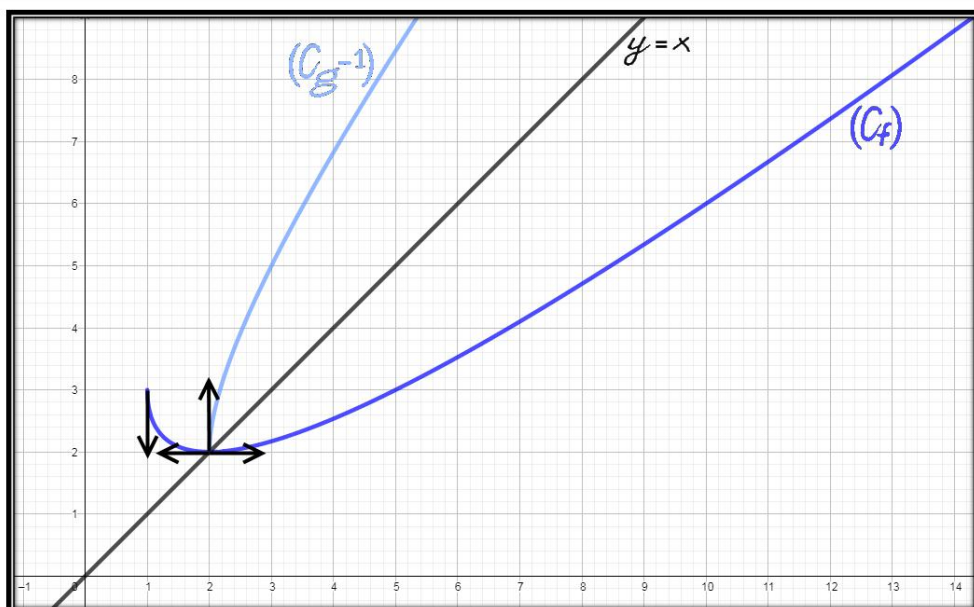
D'après le tableau de variations de f :

on a f' s'annule en $x_0=2$

Donc (C_f) admet une tangente horizontale au point $B(2;f(2))$ ($f(2)=2$)

La position relative de (C_f) et de la droite (D)

En fin, utiliser le tableau de variations de f



⑥. α. Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1}

On a g est continue sur
l'intervalle $I = [2; +\infty[$
Car elle est dérivable sur $]1; +\infty[$
et $[2; +\infty[\subset]1; +\infty[$

Et g est strictement croissante
sur l'intervalle I

Donc g admet une fonction
réciproque g^{-1} définie sur un
intervalle J tel que

$$\begin{aligned} J &= g([2; +\infty[) \\ &= [g(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[\\ &= [2; +\infty[\end{aligned}$$

β. Résolvons l'équation (E): $g(x) = g^{-1}(x)$

☛ Déterminons d'abord le domaine de définition
de l'équation (E)

$$\begin{aligned} x \in D_E &\Leftrightarrow x \in D_g \text{ et } x \in D_{g^{-1}} \\ &\Leftrightarrow x \in I \text{ et } x \in J \\ &\Leftrightarrow x \in I \cap J \\ &\Leftrightarrow x \in [2; +\infty[\end{aligned}$$

Donc $D_E = [2; +\infty[$

Si g est une fonction
continue et strictement
monotone sur un intervalle I
Alors, g admet une fonction
réciproque g^{-1} définie sur
l'intervalle $g(I)$

Il suffit d'appliquer
l'image d'un
intervalle par une
fonction continue
et strictement croissante

Il faut que $x \in I$ et $x \in J$

$g(x) = g^{-1}(x)$ C'est les abscisses
des points d'intersection de
(C_g) et ($C_{g^{-1}}$)

$$g(x) = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(x) = x$$

$$\begin{aligned}
 g(x) = g^{-1}(x) &\Leftrightarrow g(x) = x \\
 &\Leftrightarrow x + 2 - 2\sqrt{x-1} = x \\
 &\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 2 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \\
 &\Leftrightarrow x-1 = 1 \\
 &\Leftrightarrow x = 2
 \end{aligned}$$

Et puisque $2 \in D_E$
 D'où $S = \{2\}$

c. Représentation de $(C_{g^{-1}})$

Explication

 g est définie sur $[2; +\infty[$

 g^{-1} est définie sur $[2; +\infty[$

 (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$

 La droite $(\Delta): y = x$ change les rôles de x et y
 Autrement dit :

 (C_g) admet une demi-tangente horizontale à droite du point $B(2;2)$

 $(C_{g^{-1}})$ admet une demi-tangente verticale à droite du point $B(2;2)$ dirigée vers le haut

 L'image de la branche parabolique de direction la droite $(D): y = x$

 est la branche parabolique de direction $(D): y = x$

d. Montrons que : $(\forall x \in J); g^{-1}(x) = x + 2 - 2\sqrt{x-2}$

$$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 g(y) = x &\Leftrightarrow y + 2 - 2\sqrt{y-1} = x \\
 &\Leftrightarrow y - 1 - 2\sqrt{y-1} + 1 + 2 = x
 \end{aligned}$$

Pour déterminer $g^{-1}(x)$
 On prend $x \in J$ et on cherche l'unique $y \in I$ tel que $g(y) = x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1}^2 - 2\sqrt{y-1} + 1 = x - 2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y-1} - 1)^2 = x - 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1} - 1 = \sqrt{x-2} \text{ ou } \sqrt{y-1} - 1 = -\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1} = \sqrt{x-2} + 1 \text{ ou } \sqrt{y-1} = 1 - \sqrt{x-2}$$

Or $y \in [2; +\infty[$ et $x \in [2; +\infty[$

Donc $\sqrt{y-1} > 1$

Et par suite $\sqrt{y-1} = \sqrt{x-2} + 1$

Donc $y-1 = (\sqrt{x-2} + 1)^2$

$$y-1 = \sqrt{x-2}^2 + 2\sqrt{x-2} + 1$$

$$y-1 = x-2 + 2\sqrt{x-2} + 1$$

$$y = x-2 + 2\sqrt{x-2} + 1 + 1$$

Donc $y = x + 2\sqrt{x-2}$

D'où : $(\forall x \in J); g^{-1}(x) = x + 2\sqrt{x-2}$

Ici, ça sera mieux de penser à l'identité remarquable

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

EXERCICE 31

Première partie Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g: x \mapsto 2x^3 - x^2 - 4x + 6$$

1. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

b. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c. Dresser le tableau de variations de g .

2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et que : $-\sqrt{3} < \alpha < -\frac{5}{3}$

b. Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Deuxième partie

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}$

Et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

6. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

2. Déterminer les branches infinies de la courbe (C_f)

3. a. Montrer que: $f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2}$, pour tout $x \in D_f$

b. Étudier le signe de $f'(x)$

c. Dresser le tableau de variations de f

4. Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

5. Représenter (T) et (C_f) (On prend $f(1) \approx 1,8$)

Première partie

CORRECTION

1. a. Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 - 4x + 6) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - x^2 - 4x + 6) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

En $+\infty$ et en $-\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré

b. Calculons $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

On a g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car g est un polynôme)

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x^3 - x^2 - 4x + 6)' \\ &= 6x^2 - 2x - 4 \end{aligned}$$

$$\text{D'où: } (\forall x \in \mathbb{R}); g'(x) = 6x^2 - 2x - 4$$

c. Le tableau de variations de g

Étudions le signe de $g'(x)$

On a le signe de $g'(x)$ est le signe du trinôme $6x^2 - 2x - 4$

$$\text{Son discriminant } \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(6)(-4) = 100$$

Puisque $\Delta > 0$

Alors le trinôme $6x^2 - 2x - 4$ admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{100}}{2 \times 6} = \frac{2 + 10}{12} = 1$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{100}}{2 \times 6} = \frac{2 - 10}{12} = -\frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$6x^2 - 2x - 4$	$+$	$\circ$	$-$	$+$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\frac{238}{27}$	3	$+\infty$

Si $\Delta > 0$		
$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$		$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
Supposons $x_1 < x_2$		
x	x_1	x_2
$ax^2 + bx + c$	signe de a	signe de $-a$
	$\circ$	$\circ$
	a	a

2. Montrons l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

Sur l'intervalle $]-\infty; -\frac{2}{3}]$

On a g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty; -\frac{2}{3}]$

$$\text{Et } g\left(]-\infty; -\frac{2}{3}]\right) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x); g\left(-\frac{2}{3}\right)\right] \\ = \left[-\infty; \frac{238}{27}\right]$$

Puisque $0 \in]-\infty; \frac{238}{27}]$

Alors, il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty; -\frac{2}{3}]$ tel que $g(\alpha)=0$

Sur l'intervalle $[-\frac{2}{3}; +\infty[$

D'après le tableau de variations de g , on a 3 est une valeur minimale absolue de g sur $[-\frac{2}{3}; +\infty[$

Donc $\forall x \in [-\frac{2}{3}; +\infty[; g(x) \geq 3$

Donc $\forall x \in [-\frac{2}{3}; +\infty[; g(x) \neq 0$

Donc l'équation $g(x)=0$ n'admet aucune solution sur $[-\frac{2}{3}; +\infty[$

Conclusion

L'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

Vérifions que : $-\sqrt{3} < \alpha < -\frac{5}{3}$

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I , alors:
 $(\forall y \in f(I)) (\exists ! x \in I); f(x) = y$

x	$-\infty$	α	$-\frac{2}{3}$
$g(x)$	$-\infty$	$\circ$	$\frac{238}{27}$

x	$-\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\frac{238}{27}$	3	$+\infty$

On a $g(-\sqrt{3}) = 2(-\sqrt{3})^3 - (-\sqrt{3})^2 - 4(-\sqrt{3}) + 6 = 3 - 2\sqrt{3} < 0$
 et $g(-\frac{5}{3}) = 2(-\frac{5}{3})^3 - (-\frac{5}{3})^2 - 4(-\frac{5}{3}) + 6 = \frac{17}{27} > 0$

Donc $g(-\sqrt{3}) \times g(-\frac{5}{3}) < 0$

D'où, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on aura $-\sqrt{3} < \alpha < -\frac{5}{3}$

6. Le signe de $g(x)$

Sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$

Soit $x \in]-\infty; \alpha]$

On a g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$

Donc

$$\begin{aligned} x \in]-\infty; \alpha] &\Rightarrow x \leq \alpha \\ &\Rightarrow g(x) \leq g(\alpha) \\ &\Rightarrow g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

D'où: $(\forall x \in]-\infty; \alpha]); g(x) \leq 0$

Sur l'intervalle $]\alpha; -\frac{2}{3}]$

On a g est continue et strictement croissante sur $]\alpha; -\frac{2}{3}]$

Donc

$$\begin{aligned} x \in]\alpha; -\frac{2}{3}] &\Rightarrow x \geq \alpha \\ &\Rightarrow g(x) \geq g(\alpha) \\ &\Rightarrow g(x) \geq 0 \end{aligned}$$

D'où: $(\forall x \in]\alpha; -\frac{2}{3}]); g(x) \geq 0$

Sur l'intervalle $[-\frac{2}{3}; +\infty[$

D'après le tableau de variations de g , on a 3 est une valeur minimale absolue de g sur $[-\frac{2}{3}; +\infty[$

Donc $\forall x \in [-\frac{2}{3}; +\infty[; g(x) \geq 3$

D'où: $(\forall x \in [-\frac{2}{3}; +\infty[); g(x) > 0$

Conclusion

$$(\forall x \in]-\infty; \alpha]); g(x) \leq 0$$

$$(\forall x \in]\alpha; +\infty[); g(x) \geq 0$$

Si f est continue sur un intervalle fermé $[a; b]$ avec $f(a) \times f(b) < 0$
 Alors, il existe $\alpha \in]a; b[$ tel que $f(\alpha) = 0$

x	$-\sqrt{3}$	α	$-\frac{5}{3}$
$g(x)$	$3 - 2\sqrt{3} < 0$		$\frac{17}{27} > 0$

Il faut juste lire le tableau de variations de g

x	$-\infty$	α	$-\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\frac{238}{27}$	3	$+\infty$	

$g(x) \leq 0$ $g(x) \geq 0$

C'est la question principale de la première partie
 C'est pour cela la fonction g est appelée fonction auxiliaire مُسَاعِدَة

Deuxième partie

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}$$

1. a. Déterminons D_f

$$x \in D_f \iff x \neq 0 \text{ et } x^2 - 2x + 2 \geq 0$$

On sait que: $(\forall x \in \mathbb{R}); (x-1)^2 \geq 0$

$$\text{Donc: } (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\text{Donc: } (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - 2x + 1 + 1 \geq 1 \text{ et } 1 > 0$$

$$\text{Donc: } (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - 2x + 2 > 0$$

$$\text{Donc: } x \in D_f \iff x \neq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \iff x \neq 0$$

$$\text{D'où: } D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

b. Les limites de f aux bornes de D_f

$$\text{On a } D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} = \sqrt[3]{2}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$



$$\frac{u(x)}{v(x)} \xrightarrow{\quad} v(x) \neq 0$$

$$\sqrt[n]{u(x)} \xrightarrow{\quad} u(x) \geq 0$$

En $+\infty$ et en $-\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$$

$$\frac{1}{0^-} = -\infty$$

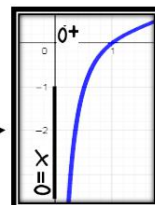
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} = \sqrt[3]{2}$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} = -\infty$

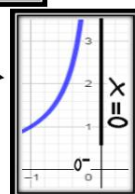
D'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$



2. Les branches infinies de (C_f)

On a : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \end{cases}$



Donc la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à (C_f)

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{\sqrt[3]{-x^3 \left(-\frac{x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} - \frac{2}{x^3}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{\sqrt[3]{(-x)^3 \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{\sqrt[3]{(-x)^3} \sqrt[3]{-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{-x \sqrt[3]{-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}}$$

$$= 0$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Donc, (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$

Si on remplace on trouve $\frac{\infty}{\infty}$, mais $\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ ne pose aucun problème

$\frac{\infty}{\infty}$, on pense toujours à factoriser

Ici, à l'intérieur de $\sqrt[3]{}$ il faut factoriser par $(-x)^3$ et non pas par x^3 car $x \rightarrow -\infty$

$$\sqrt[3]{(-x)^3} = -x$$

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \rightarrow \infty \\ \rightarrow 0 \\ \rightarrow \alpha \neq 0 \end{cases}$

(C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{\sqrt[3]{x^3 \left(\frac{x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{2}{x^3}\right)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{\sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{x \sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Donc, (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

3) Montrons que : $f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2 (\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2})^2}$, pour tout $x \in D_f$

Soit $x \in D_f$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} \right)' \\ &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)' \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}\right)' \\ &= \frac{1}{x^2} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{(x^2 - 2x + 2)'}{3(\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2})^2} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}}{x^2} + \frac{x-1}{x} \times \frac{2x-2}{3(\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2})^2} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}}{x^2} + \frac{(x-1)(2x-2)}{3x(\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x^2} + \frac{2x^2-4x+2}{3x(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2} \\
 &= \frac{\sqrt[3]{x^2-2x+2} \cdot 3(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2}{x^2 \cdot 3(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2} + \frac{x(2x^2-4x+2)}{x \cdot 3x(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2} \\
 &= \frac{3(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^3}{3x^2(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2} + \frac{2x^3-4x^2+2x}{3x^2(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2} \\
 &= \frac{3(x^2-2x+2)+2x^3-4x^2+2x}{3x^2(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2} \\
 &= \frac{3x^2-6x+6+2x^3-4x^2+2x}{3x^2(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2} \\
 &= \frac{2x^3-x^2-4x+6}{3x^2(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2} \\
 &= \frac{g(x)}{3x^2(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2}
 \end{aligned}$$

D'où $(\forall x \in \mathcal{D}_f); f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2}$

b. Le signe de $f'(x)$

Soit $x \in \mathcal{D}_f$

On a $f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2}$

Puisque $3x^2(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2 > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

Et d'après le résultat de la question 2.b de la Première partie on aura :

$$\begin{cases}
 (\forall x \in]-\infty; \alpha]); f'(x) \leq 0 \\
 (\forall x \in]\alpha; +\infty[); f'(x) \geq 0 \\
 f'(\alpha) = 0
 \end{cases}$$

C'est pour cela
la fonction g est
appelée fonction
auxiliaire

Remarque

On a $f'(\alpha) = 0$

Donc (C_f) admet une tangente horizontale au point $A(\alpha; f(\alpha))$

c. Le tableau de variations de f

D'après les résultats des questions précédentes

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$	$+\infty$

$$0 \notin D_f$$

$$f'(\alpha) = 0$$

$$(\forall x \in]-\infty; \alpha]); f'(x) \leq 0$$

$$(\forall x \in]\alpha; +\infty[); f'(x) \geq 0$$

4. Une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$= 1(x-1) + 0$$

$$= x-1$$

$$(T): y = x-1$$

5. Représentation de (C_f)

Explication

La droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à (C_f)

(C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$

(C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

(C_f) admet une tangente horizontale au point B(α ; $f(\alpha)$)
La tangente (T) passe par C(1; 0) et D(2; 1)

